Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 luglio 2017

1. Sia $\{a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ una matrice infinita di numeri reali tali che

   i) $\lim_{m\to+\infty} a_{mn} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

   ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$;

   iii) $\exists\, C \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \le C \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.

   Mostrare che

   (a) l'applicazione A
   $$\{x_k\} \mapsto \{A_k\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n$$
   è lineare e continua nello spazio l^{∞} delle successione limitate.

   (b) Se $\lim x_n = x$ allora $\lim_{m\to+\infty} A_m = x$.

   (c) Il punto b) vale anche se la condizione $ii)$ viene sostituita da $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log(x))^2} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
   Si dimostri che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si consideri poi $f_\epsilon(x) = (\rho_\epsilon * f)(x)$ la mollificata con un nucleo di Friederichs a supporto compatto. e si definisca
   $$F(x) := \sup_{0<\epsilon<1} f_\epsilon(x).$$
   Si dimostri che $F(x) \notin L^1(\mathbb{R})$.
   Sugg. Si usi la diseguaglianza $F(x) := \sup_{0<\epsilon<1}(\rho_\epsilon * f)(x) \ge (\rho_{2x} * f)(x)$

3. È ben noto che le soluzioni non banali di $y'' + y = 0$ hanno al più un numero finito di zeri in qualsiasi intervallo finito. Dimostrare che se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e
   $$q(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
   allora per ogni intervallo finito $[a, b]$, ogni soluzione non banale di
   $$z''(x) + q(x)\, z(x) = 0$$
   ha al più un numero finito di zeri in $[a, b]$.

4. Sia $(H, \|\,.\,\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} subset H$ un sistema ortonormale. Dimostrare che $x_n \rightharpoonup 0$, cioè che
   $$\lim_{n\to+\infty} (x_n, h) = 0 \qquad \forall\, h \in H.$$
   Sia poi dato $x \in H$ tale the $\|x\|_H = \frac{1}{2}$. Costruire una successione di elementi $y_n \in H$ tali che
   $$\|y_n\| = 1 \qquad \text{e} \qquad y_n \rightharpoonup x \quad (\text{ cioè } \lim_{n\to+\infty}(y_n, h) = (x, h) \qquad \forall\, h \in H).$$

5. Risolvere, per $U \in \mathbb{R}$, con la separazione delle variabili, il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{in } 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0, \\ u_x(\pi,t) = U & t > 0. \end{cases}$$

Discutere poi se per $U \neq 0$ può esistere una soluzione stazionaria $u_\infty = u_\infty(x)$.