Corso di Laurea in Matematica Prova di Analisi Matematica 3

21 giugno 2017

1. Sia $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale convergente a $s \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n s_n = s. \quad (1)$$

Trovare una successione tale che $\lim_n s_n$ non esiste, ma il limite in (1) esiste.

Data una funzione f periodica di periodo 2π e sia $S_n(f)(\theta)$ la sua serie parziale di Fourier; dimostrare che

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \quad 0 \leq r < 1.$$

2. Sia $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ per qualche $R > 0$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che per ogni $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che $\text{rot} \Phi = 0$ la formula

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \Phi(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt$$

definisce una funzione di classe $C^{k+1}(\Omega)$ che risolve $\Phi = \nabla \psi$.

Data una $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che $\text{div} \Phi = 0$ trovare una formula analoga che definisce una Ψ regolare che risolve

$$\Phi = \text{rot} \Psi.$$

3. Dimostrare che per $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema al contorno

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda < \delta, u > & x \in]0, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ammette sempre una soluzione. Inoltre esiste uno e uno solo $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che ne ammette due distinte. (Con il simbolo δ si denota la delta di Dirac centrata in $x_0 = 0$).

4. Sia $(H, \|\cdot\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{u_n\} \subset H$ un sistema ortonormale completo. Sia $\{v_n\} \subset H$ un sistema ortonormale tale che

$$\|u_n - v_n\|_H \leq \frac{1}{2^{n+2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrare che anche $\{v_n\}$ è completo.

5. Sia dato $r_0 \in (0, 1)$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'anello

$$\Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\}.$$

Si risolva il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{se } x^2 + y^2 = r_0^2 \\ u = f(\theta) & \text{se } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

con $f(\theta)$ regolare e 2π -periodica.