

Corso di Laurea in Matematica

Prova di Analisi Matematica 3

15 febbraio 2017

1. Studiare la convergenza della serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

e calcolarne poi la somma per $x = \pi/3$.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

Sugg. Iniziare con la sostituzione $y = x^{-1}$

3. Si consideri l'equazione delle onde con condizioni di Neumann omogenee e dove tutti i dati sono a media nulla su $[0, \pi]$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times (0, \pi) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = u_1(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

e si scriva la soluzione in termini di u_0 e u_1 tali che

$$\int_0^\pi |u'_0(x)|^2 dx = \|u_0\|_V^2 < \infty \quad \int_0^\pi |u_1(x)|^2 dx = \|u_1\|_H^2 < \infty.$$

Definita $E_0 := \frac{1}{2}(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \|u_x(0, x)\|^2 + \int_0^\pi \|u_t(0, x)\|^2\right)$ si mostri che se $T \geq 2\pi$ esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 E_0 \leq \int_0^T |u_t(s, 0)|^2 ds \leq c_2 E_0.$$

4. Si trovino, se esistono, condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione f regolare, affinché si possa trovare una funzione armonica $u :]0, L[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u_x(0, y) = u_x(L, y) = u_y(x, 0) = 0 \quad u_y(x, L) = f(x).$$

5. Sia per $\alpha > 0$ dato l'operatore $A = I - \alpha^2 \Delta$ con dominio le funzioni regolari $u :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C}$ che sono 2π -periodiche rispetto alle direzioni coordinate e sono a media nulla. Sia poi $G = A^{-1}$ e si definisca, per $N \in \mathbb{N}$

$$D_N = \sum_{n=0}^N (I - G)^n$$

Scrivere in termini delle variabili di Fourier sia A che D_N e dimostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$, l'operatore D_N è lineare e continuo da $L^2([-\pi, \pi]^3)$ in se stesso.

Calcolare la norma operatoriale $\|D_N\|$ e caratterizzare, se possibile, il limite di D_N per $N \rightarrow +\infty$