Corso di Laurea in Matematica
II prova intermedia di Analisi Matematica 3

17 dicembre 2015

1. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Decomponendola come $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ mostrare che la trasformata di Fourier di f può essere estesa anche a $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Può essere utile considerare l'insieme misurabile A delle $x \in \mathbb{R}$ dove f è maggiore di una assegnata costante positiva.

   Tramite interpolazione si puó mostrare che la trasformata risulta ben definita come mappa lineare da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^{p'}(\mathbb{R})$, con $p' = \frac{p}{p-1}$. Usando le funzioni Gaussiane dare una stima della norma di tale mappa.

   Soluzione. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |f| \geq 1 \ q.o.\}$ allora

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, dx = \|f\|_p^p < \infty.$$

   Scriviamo $f = f\chi_A + f(1 - \chi_A) := f_1 + f_2$. Si ha che $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1| \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f|\chi_A \, dx \leq \|f\|_p \, m(A)^{1/p'} < \infty,$$

   usando la diseguaglianza di Hölder.

   Vediamo poi che $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ dato che

$$\int_{\mathbb{R}} |f_2|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}\setminus A} |f|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}\setminus A} |f|^p \, dx < \infty,$$

   dato che $f \leq 1$ q.o. sul complementare di A.

   Definiamo pertanto

$$\widehat{f} := \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$$

   dove la prima trasformata è quella in L^1, mentre la seconda è quella di L^2. Vediamo che la trasformata è ben definita osservando che se

$$f = f_1 + f_2 = \phi_1 + \phi_2 \qquad f_1, \phi_1 \in L^1(\mathbb{R}), \ f_1, \phi_2 \in L^2(\mathbb{R}),$$

   allora $f_1 - \phi_1 = \phi_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e la uguaglianza diventa anche uguaglianza delle trasformate. Si ha quindi

$$\widehat{f_1 - \phi_1} = \widehat{\phi_2 - f_2} \ \rightarrow \ \widehat{f_1} - \widehat{\phi_1} = \widehat{\phi_2} - \widehat{f_2} \ \rightarrow \ \widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{\phi_1} + \widehat{\phi_2},$$

   da cui la definizione senza ambiguità della trasformata di f.

   Sia ora $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ si ha $\widehat{f} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. Calcoliamo la norma $L^p(\mathbb{R})$ di f e la norma $L^{p'}(\mathbb{R})$ di $\widehat{f}$. Ricordando che $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-px^2/2} \, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{2\pi})^{p'} \mathrm{e}^{-p'\xi^2/2} \, d\xi = (\sqrt{2\pi})^{p'} \sqrt{\frac{2\pi}{p'}}.$$

   Da cui

$$\frac{\|\widehat{f}\|_{p'}}{\|f\|_p} \geq \sqrt{2\pi}^{1+1/p'-1/p} \, \frac{p^{1/2p}}{p'^{1/2p'}}.$$

2. Siano $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, \dots, N$ e $N \in \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\left| \sum_{m,n=1, m\neq n}^{N} \frac{a_m b_n}{m-n} \right| \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{N} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Sugg. Considerare la funzione $f(x) = i\,(\pi - x)$ *definita per* $x \in]0, 2\pi[$, *e prolungata per periodicità e la quantità*

$$\int_0^{2\pi} f(x)A(-x)B(x)\,dx$$

con $A(x) = \sum_{m=1}^{N} a_m \mathrm{e}^{imx}$ *e* $B(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \mathrm{e}^{inx}$.

Soluzione. Osserviamo che la funzione $f(x)$ è tale che

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{k} \qquad \forall\, k \neq 0,$$

e inoltre $|f(x)| \leq \pi$. Calcolando esplicitamente la quantità suggerita si ha per $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} f(x)A(-x)B(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{m,n=1}^{N} a_m b_n f(x) \mathrm{e}^{-i(m-n)x}\,dx$$

$$= 2\pi \sum_{m,n=1}^{N} a_m b_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-i(m-n)x}\,dx = 2\pi \sum_{m,n=1}^{N} \frac{a_m b_n}{m-n}.$$

Pertanto

$$\left| \sum_{m\neq n} \frac{a_m b_n}{m-n} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x)A(-x)B(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi |A(-x)B(x)|\,dx \leq \frac{1}{2} \|A\|_{L^2} \|B\|_{L^2}.$$

Ora l'uguaglianza di Parseval applicata alle funzioni A e B implica che

$$\left| \sum_{m\neq n} \frac{a_m b_n}{m-n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(2\pi \sum_{m=1}^{N} a_m^2 \right)^{1/2} \left(2\pi \sum_{n=1}^{N} b_n^2 \right)^{1/2} = \pi \left(\sum_{m=1}^{N} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \right)^{1/2}.$$

La diseguaglianza richiesta è nota come diseguaglianza di Hilbert ed è stata il punto di partenza per la più famosa diseguaglianza di Hardy, di cui rappresenta il caso discreto.

3. Sia $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica e non negativa nella palla $B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ di centro zero e raggio $R > 0$. Dimostrare che

$$\frac{R - |x|}{R + |x|} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{R - |x|} u(0) \qquad \forall\, x \in B(0,R).$$

Dedurne che

$$\max_{B(0,R/2)} u \leq 9 \min_{B(0,R/2)} u.$$

Soluzione. Scriviamo la formula di Poisson e abbiamo per ogni $x \in B(0,R)$

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{u(s)}{|s-x|^2} dS.$$

Dato che nell'integrale $|s| = R$ usando la diseguaglianza triangolare otteniamo

$$R - |x| \leq |s - x| \leq R + |x| \qquad \forall\, x \in B(0,R).$$

Pertanto abbiamo

$$\frac{R-|x|}{R+|x|} = \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^2} \leq \frac{R^2-|x|^2}{|s-x|^2} \leq \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^2} = \frac{R+|x|}{R-|x|} \qquad \forall\, x \in B(0,R).$$

Usando il fatto che la u è non-negativa si ha quindi che le diseguaglianze continuano a valere anche moltiplicate per u e quindi

$$\frac{R-|x|}{R+|x|}\frac{1}{2\pi R}\int_{|s|=R} u(s)\,dS \leq \frac{1}{2\pi R}\int_{|s|=R} \frac{R^2-|x|^2}{|s-x|^2}u(s)\,dS \leq \frac{R+|x|}{R-|x|}\frac{1}{2\pi R}\int_{|s|=R} u(s)\,dS$$

e usando la proprietà della media

$$\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0) \leq u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|s|=R} \frac{R^2-|x|^2}{|s-x|^2}u(s)\,dS \leq \frac{R+|x|}{R-|x|}u(0).$$

Una volta dimostrata la diseguaglianza, osserviamo che se definiamo $x_m, x_M \in \partial B(0,R/2)$ come punti tali che

$$u(x_m) = \min_{B_{R/2}} u, \qquad\qquad u(x_M) = \max_{B_{R/2}} u,$$

si ha

$$u(x_M) \leq \frac{R+|x_M|}{R-|x_M|}u(0) \leq 3\,u(0) \leq 3\,\frac{R+|x_m|}{R-|x_m|}u(x_m) = 9\,u(x_m).$$

4. Trovare una formula esplicita per la soluzione del seguente problema (con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{cases} w_t - \varepsilon w_{xx} + \dfrac{1}{2}w_x^2 = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \\ w(0,x) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cercandola della forma $W = \phi(w)$ per una opportuna $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare, che riconduca il problema a quello del calore.

Applicarlo poi alla soluzione dell'equazione di Burgers

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} + u u_x = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ponendo $w(t,x) = \int_{-\infty}^x u(t,s)\,ds$ e $h(x) = \int_{-\infty}^x u_0(s)$.

Soluzione. Cerchiamo una soluzione della forma $W = \phi(w)$ e si ha quindi

$$W_t = \phi'(w)w_t \qquad W_x = \phi'(w)w_x \qquad W_{xx} = \phi''(w)w_x^2 + \phi'(w)w_{xx}.$$

Pertanto

$$W_t - \epsilon W_{xx} = \phi'(w)w_t - \epsilon\phi''(w)w_x^2 - \epsilon\phi'(w)w_{xx},$$

e se $\phi' \neq 0$

$$W_t - \epsilon W_{xx} = \phi'(w)\left[w_t - \epsilon w_{xx} - \epsilon\frac{\phi''(w)}{\phi'(w)}w_x^2\right].$$

Quindi W risolve l'equazione del calore se w risolve l'equazione richiesta ϕ nel caso in cui

$$-\epsilon\frac{\phi''(w)}{\phi'(w)} = \frac{1}{2}.$$

Integrando esplicitamente l'equazione ordinaria otteniamo

$$\phi(s) = \mathrm{e}^{-s/2\epsilon} \neq 0$$

e quindi se poniamo

$$W = \mathrm{e}^{-w/2\epsilon},$$

si ha che W soddisfa

$$\begin{cases} W_t - \varepsilon W_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \\ w(0,x) = \mathrm{e}^{-\frac{h(x)}{2\epsilon}} & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e tale trasformazione è nota in letteratura come trasformazione di Cole-Hopf.

Per la formula risolutiva dell'equazione del calore abbiamo che

$$W(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} \mathrm{e}^{-\frac{h(y)}{2\epsilon}}\, dy,$$

e quindi

$$w(t,x) = -2\epsilon \log\left(\frac{1}{\sqrt{4\epsilon\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} \mathrm{e}^{-\frac{h(y)}{2\epsilon}}\, dy \right).$$

Nel caso dell'equazione di Burgers si ha che $u = w_x$ e quindi

$$u(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{t} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} \mathrm{e}^{-\frac{h(y)}{2\epsilon}}\, dy}{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} \mathrm{e}^{-\frac{h(y)}{2\epsilon}}\, dy}.$$

5. Sia $\Omega = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ -\infty < x_1 < x < x_2 < +\infty\}$ per qualche $T > 0$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che: a) $u \in C(\overline{\Omega})$; b) $u \in C^2(\Omega)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ in tutti i punti di Ω.

   1) Dimostrare che esiste $(t_0, x_0) \in \partial\Omega$ tale che $u(t_0,x_0) \geq u(t,x)$ per ogni $(t,x) \in \overline{\Omega}$.

   2) Dimostrare poi che se oltre alle ipotesi precedenti $u \in C^2(\Omega_1)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ per tutti i punti di Ω_1 per qualche aperto $\Omega_1 \supset \Omega$, allora esiste almeno un punto di massimo assoluto (t_0,x_0) non appartenente al segmento $L = \{(T,x) :\ x_1 < x < x_2\}$.

   3) In analogia col caso del problema di Poisson, dimostrare che la stesso risultato del punto 2) vale, sotto le stesse ipotesi, anche se si ha solamente $u_t - u_{xx} \leq 0$.

   Soluzione. Sia $(t_0,x_0) \in \overline{\Omega}$ punto di massimo assoluto, che esiste per il teorema di Weierstrass.

   1) Supponiamo per assurdo che (t_0,x_0) sia un punto interno; essendo la funzione derivabile, allora è punto stazionario e

$$u_t(t_0,x_0) = 0.$$

   Restringendo la funzione alla retta $t = t_0$ si ha anche che

$$u_{xx}(t_0,x_0) \leq 0$$

   dato che $u(t_0,x)$ ha massimo per $x = x_0$. Pertanto si ha $u_t(t_0,x_0) - u_{xx}(t_0,x_0) \geq 0$, quindi una contraddizione.

   2) Supponiamo ora che $(t_0,x_0) = (T,x_0)$ con $x_1 < x_0 < x_2$. Lo stesso ragionamento di prima implica che $u_{xx}(T,x_0) \leq 0$ ma adesso, non essendo il punto interno, si ha una condizione unilaterale sulla derivata temporale. Considerando la funzione $u(t,x_0)$ per $0 < t \leq T$ si ha infatti che avere un massimo per $t = T$ implica

$$u_t(T,x_0) \geq 0.$$

   Pertanto si ha ancora $u_t(T,x_0) - u_{xx}(T,x_0) \geq 0$, quindi una contraddizione.

3) Sia $(t_0, x_0) \in \partial\Omega \setminus \{(T, x) : \ x_1 < x < x_2\}$ tale che

$$u(t_0, x_0) \geq u(t, x) \quad \forall\, (t, x) \in \partial\Omega \setminus \{(T, x) : \ x_1 < x < x_2\}$$

e consideriamo la funzione $\psi(t, x) = u(t, x) + \epsilon x^2$ con $\epsilon > 0$. Si ha $\psi_t - \psi_{xx} < 0$ e quindi per il punto precedente esiste un punto di massimo assoluto $(\bar{t}, \overline{x})$ di ψ non appartiene alla parte superiore del bordo. Si ha quindi per $R := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ che

$$u(t_0, x_0) + \epsilon\, R^2 \geq u(\bar{t}, \overline{x}) + \epsilon\, |\overline{x}|^2 = \psi(\bar{t}, \overline{x}) \geq \psi(t, x) \geq u(t, x) \qquad \forall\, (t, x) \in \overline{\Omega},$$

e mandando ϵ a zero si ha che

$$u(t_0, x_0) \geq u(t, x) \qquad \forall\, (t, x) \in \overline{\Omega}.$$