Corso di Laurea in Matematica
I prova intermedia di Analisi Matematica 3

12 novembre 2015

1. Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ una funzione decrescente e regolare (C^1 a tratti), prolungata poi per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Dimostrare che

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione $\sin(nx)$ si annulla e cambia segno per $x = \frac{2k}{n}\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Riscriviamo quindi l'integrale che definisce b_n come segue

$$b_n := \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Ragioniamo su ogni singolo addendo e otteniamo

$$\int_{2k\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx = \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx + \int_{(2k+1)\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Nel secondo integrale cambiamo variabile $z = x - \frac{\pi}{n}$, in tal modo

$$\begin{aligned}
\int_{(2k+1)\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx &= \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} f(z + \pi/n) \sin(n(z + \pi/n))\, dz \\
&= \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} f(z + \pi/n) \sin(nz + \pi)\, dz \\
&= -\int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} f(z + \pi/n) \sin(nz)\, dz.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{2k\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x) \sin(nx)\, dx = \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} [f(x) - f(x + \pi/n)] \sin(nx)\, dx \geq 0,$$

dato che $f(x) - f(x+\pi/n) \geq 0$ perchè f è decrescente, mentre $\sin(nx) \geq 0$ in $[2k\pi/n, (2k+1)\pi/n]$.

2. Sia, per $\alpha \notin \mathbb{Z}$, definita la funzione $f(x) = \cos(\alpha x)$, per $x \in [-\pi, \pi]$

   a) Calcolare lo sviluppo (reale) di f in serie di Fourier;
   b) Usare la formula ottenuta per scrivere lo sviluppo della cotangente di x per $x = \alpha\pi$;
   c) Integrando termine a termine rispetto ad α arrivare al prodotto (infinito) di Eulero

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

   d) Uguagliare i coefficienti di x^2 nello sviluppo di Taylor di $\frac{\sin(x)}{x}$ e del prodotto e verificare la formula per la somma della serie armonica generalizzata.

Soluzione. a) La funzione f è pari e quindi lo sviluppo è in soli coseni. Integrando per parti si trova (per $n \neq 0$)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{2(n\cos(\pi\alpha)\sin(n\pi) - \alpha\cos(n\pi)\sin(\pi\alpha))}{\pi\,(n^2-\alpha^2)}$$

e in definitiva, dato che $a_0 = \frac{2}{\pi\alpha}\sin(\pi\alpha)$ si ha

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}.$$

b) Valutando la somma per $x=\pi$ e dividendo per la quantità non nulla $\sin(\alpha\pi)$ si ha

$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{\alpha^2-n^2} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

con convergenza puntuale della serie.

c) Riscriviamo l'uguaglianza come

$$\pi\cot(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^\infty \frac{-2\alpha}{n^2-\alpha^2}.$$

Integrando termine a termine in $d\alpha$ tra 0 e x, con $x<1$, si ha

$$\log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^\infty \log(1-\frac{x^2}{n^2}).$$

Osserviamo che la funzione $\pi\cot(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha}$ è limitata in un intorno destro di zero e che la serie di termine generico $\frac{-2\alpha}{n^2-\alpha^2}$ è convergente se $n^2-\alpha^2 > 1-\alpha^2 > 0$. Passando all'esponenziale si ha

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots$$

e quindi cambiando variabile $x/\pi \to x$ si ha

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

d) Sviluppando secondo Taylor a sinistra e sviluppando i prodotti a destra si ha

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots = 1 - x^2\frac{1}{\pi^2}\big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\big)+\dots$$

da cui

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Sia $\mathbb{K}$ un convesso chiuso nello spazio di Hilbert $(X, \|\,.\,\|_X)$. Verificare che la proiezione $P_{\mathbb{K}}$ è una funzione uniformemente continua e in particolare

$$\|P_{\mathbb{K}}f - P_{\mathbb{K}}g\|_X \leq \|f-g\|_X \qquad \forall\, f,g\in X.$$

Definiamo poi come caso particolare

$$\mathbb{K} = \left\{f:(-1,1)\to\mathbb{R}:\ f\in L^2(-1,1) \text{ e } f(x)\geq -x^2+\frac{1}{2} \text{ q.o. } x\in(-1,1)\right\} \subset L^2(-1,1)$$

Stabilire se il teorema della proiezione di può applicare e calcolare $P_{\mathbb{K}} f$ se $f(x) = x + \frac{2}{3}$.

Soluzione: Dati $f, g \in X$ per la definizione di proiezione si ha

$$\langle f - P_{\mathbb{K}} f, \eta - P_{\mathbb{K}} f\rangle \leq 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{K},$$

$$\langle g - P_{\mathbb{K}} g, \mu - P_{\mathbb{K}} g\rangle \leq 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{K},$$

e scegliendo $\eta = P_{\mathbb{K}} g$, $\mu = P_{\mathbb{K}} f$ e sommando si ha

$$\langle P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g + g - f, P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\rangle \leq 0,$$

da cui

$$\|P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\|^2 \leq \langle f - g, P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\rangle \leq \|f - g\|\, \|P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\|,$$

da cui la tesi.

Nel caso specifico $\mathbb{K}$ è ovviamente un convesso e la chiusura si dimostra osservando che se $\{f_n\} \subset \mathbb{K}$ converge a f in $L^2(-1, 1)$, a meno di una sottosuccessione $f_{n_k} \to f(x)$ q.o. e quindi anche $f(x) \geq -x^2 + \frac{1}{2}$. La proiezione $P_{\mathbb{K}} f$ soddisfa

$$P_{\mathbb{K}} f \in \mathbb{K} : \quad \int_{-1}^{1} P_{\mathbb{K}} f\, (v - P_{\mathbb{K}} f)\, dx \geq \int_{-1}^{1} f(v - P_{\mathbb{K}} f)\, dx \qquad \forall v \in \mathbb{K}.$$

La proiezione soddisfa

$$P_{\mathbb{K}} f(x) = \max\{f(x), -x^2 + 1/2\}$$

dove il massimo è inteso quasi ovunque. Infatti si ha, definendo $\phi(x) := -x^2 + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_{\mathbb{K}} f\, (v - P_{\mathbb{K}} f)\, dx &= \int_{\{f<\phi\}} \phi(v - \phi)\, dx + \int_{\{f\geq\phi\}} f(v - f)\, dx \\ &\geq \int_{\{f<\phi\}} f(v - \phi)\, dx + \int_{\{f\geq\phi\}} f(v - f)\, dx,\end{aligned}$$

dato che $v - \phi \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{K}$. Pertanto

$$\int_{-1}^{1} P_{\mathbb{K}} f\, (v - P_{\mathbb{K}} f)\, dx \geq \int_{\{f<\phi\}} f(v - \phi)\, dx + \int_{\{f\geq\phi\}} f(v - f)\, dx, \qquad \forall\, v \in \mathbb{K}$$

e quindi la soluzione risulta

$$P_{\mathbb{K}} f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{2}{3} & \text{se } x \in \left[-1, \dfrac{1}{6}\left(-3 - \sqrt{3}\right)\right] \cup \left[\dfrac{1}{6}\left(-3 + \sqrt{3}\right), 1\right], \\ -x^2 + \dfrac{1}{2} & \text{se } x \in \left]\dfrac{1}{6}\left(-3 - \sqrt{3}\right), \dfrac{1}{6}\left(-3 + \sqrt{3}\right)\right[. \end{cases}$$

4. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno (con condizioni miste) per l'equazione delle onde ($T > 0$, $c \neq 0$)

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & (t, x) \in (0, \pi) \times (0, T) \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0, x) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = g(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Si può immaginare una corda elastica con estremo fissato e uno libero, oppure una colonna di aria posta in vibrazione con una estremità aperta e una chiusa (clarinetto, organo...)

Risolvere il problema con la separazione delle variabili, descrivendo le ipotesi da fare su f, g. Paragonare gli autovalori e le autofunzoni con quelli del problema di Neumann per le onde (entrambi estremi liberi)

Soluzione: Dopo la separazione delle variabili $u(t,x) = T(t)X(x)$ il problema al contorno da risolvere risulta

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & x \in]0, \pi[\\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Nella maniera usuale moltiplicando per X e integrando per parti si dimostra che $\lambda \geq 0$ e poniamo quindi $\lambda = \nu^2$. La soluzione generale risulta quindi

$$X(x) = A\cos(\nu x) + B\sin(\nu x).$$

Le due condizioni al contorno diventano pertanto

$$X(0) = A\cos(0) = A = 0$$

$$X'(0) = \nu(-A\sin(\nu\pi) + B\cos(\nu\pi)) = \nu\, B\cos(\nu\pi)) = 0,$$

e la condizione $A = 0$ esclude il caso $\nu = 0$. Per avere soluzioni non banali (non indenticamente nulle) si richiede pertanto che $\cos(\nu\pi) = 0$ e quindi

$$\nu\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi le autofunzioni (non normalizzate) risultano

$$X_n(x) = \sin\left[(n - \frac{1}{2})x\right] \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Risolvendo anche il problema per la $T_n(t)$ (analoga equazione lineare del secondo ordine) si ha quindi che

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(n-\frac{1}{2})x\right]\left[a_n\cos\left[(n-\frac{1}{2})ct\right] + b_n\sin\left[(n-\frac{1}{2})ct\right]\right]$$

Se ora

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left[(n-\frac{1}{2})x\right]$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left[(n-\frac{1}{2})x\right]$$

si ha

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(n-\frac{1}{2})x\right]\left[c_n\cos\left[(n-\frac{1}{2})ct\right] + \frac{d_n}{(n-\frac{1}{2})c}\sin\left[(n-\frac{1}{2})ct\right]\right].$$

La regolarità richiesta su u_0 e u_1 è la stessa per le onde con le condizioni periodiche al contorno.

La differenza con l'equazione delle onde con estremi entrambi liberi è che in tal caso la soluzione risulta della forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)\big[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)\big]$$

le vibrazioni hanno frequenza (rispetto alla variabile temporale)

$$\frac{nc}{2\pi},$$

cioè le frequenze consentite sono multipli interi della frequenza fondamentale $\frac{c}{2\pi}$.

Invece nel caso in questione le frequenze permesse sono della forma

$$\frac{(2n-1)c}{4\pi}$$

cioè solo i multipli dispari della frequenza fondamentale $\frac{c}{4\pi}$. Quindi nel caso con entrambi estremi liberi la frequenza fondamentale è doppia che nel caso con un solo estremo libero. Un solo estremo libero (a parità di lunghezza della corda o della colonna di aria che vibra) produce suoni di una ottava più bassi oltre ad avere meno armoniche.

5. Sia $(X, \|\,.\,\|)$ uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(X,X)$ con

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1$$

Mostrare che $(\mathrm{I} - A)$ è lineare e invertibile e che

$$\|(\mathrm{I}-A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$

Sugg. Ricordare la formula per la somma di una progressione geometrica e cominciare dal caso dim $X < \infty$.

Soluzione. Partendo dalla identità valida per $x \in \mathbb{R}$, con $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

scriviamo formalmente

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1-A)^{-1}.$$

Verifichiamone la convergenza: sia $V_n = \sum_{k=0}^{1} A^k$. Dato che

$$\|A^n x\| = \|A\,A^{n-1}x\| \leq \|A\|\|A^{n-1}x\| \leq \|A\|^n\|x\|,$$

si ha

$$\|V_m - V_n\| = \|A^{n+1} + A^{n+2} + \cdots + A^n\| \leq \|A\|^{n+1} + \|A\|^{n+2} + \cdots + \|A^n\|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|}$$

Pertanto la successione V_n è di Cauchy ed esiste $V = \lim_{n\to+\infty} V_n$. Questo è l'unico punto che richiede qualche precisazione nel caso infinito-dimensionale. Se dim $(X) = n$ si tratta di usare la completezza di $\mathbb{R}^{n^2}$. Nel caso generale bisogna verificare che $\mathcal{L}(X,X)$ è completo. In tal caso, sia V_N di Cauchy, allora

$$\|V_n x - V_m x\| \leq \|V_n - V_m\| \|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

e quindi $V_n x$ è di Cauchy per ogni $x \in X$, quindi esiste $Vx \in X$ tale che $Vx = \lim_{n\to+\infty} V_n x$. Si verifica che V è lineare e inoltre

$$\|Vx\| \leq \|Vx - V_n x\| + \|V_n x\| \leq C\|x\|$$

e quindi V è continuo.

Osserviamo anche che

$$\|V\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Infine osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(I-A)V_n = V_n - AV_n = V_n(I-A) = V_n - V_n A = I - A^{n+1},$$

dato che A commuta con tutte le sue potenze. Usando il fatto che $\|A\|^n \to 0$ si ha, passando al limite

$$(I-A)V = V(I-A) = I.$$