Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 settembre 2016

1. Sia data l'equazione

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0 \quad (x, y) \in R := (0, \pi) \times (0, 1),$$

e sia $u \in C(\overline{R}) \cap C^2(R)$ soluzione tale che $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ per $0 \leq y \leq 1$. Mostrare che per certi valori dei dati su $\{y = 0\}$ non esistono soluzioni.

Soluzione. La soluzione u può essere sviluppata in serie di Fourier della forma

$$u(x, y) = \sum f_n(y) \sin(nx),$$

in modo da soddisfare la condizioni al contorno per $\{x = 0\} \cup \{x = \pi\}$. Sostituendo si trova che f_n deve soddisfare l'equazione ordinaria a coefficienti non costanti

$$y^2 f_n''(y) - n^2 f_n(y) = 0.$$

Si tratta di una equazione equidimensionale e cercando soluzioni del tipo $f_n(y) = y^{\alpha_n}$, con $\alpha_n \in \mathbb{R}$, e sostituendo si ottiene che necessariamente

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{1 + 4n^2}\big).$$

Osserviamo che $\frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1 + 4n^2}\big) > 0$, mentre $\frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1 + 4n^2}\big) < 0$, pertanto, dato che u è continua e quindi limitata per $y = 0$ bisogna escludere la soluzione con α_n negativa e quindi

$$f_n(y) = c_n y^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4n^2}\right)}.$$

Ne segue che

$$u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n y^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4n^2}\right)} \sin(nx),$$

purchè i coefficienti c_n assicurino la convergenza della serie. In ogni caso $u(x, 0) = 0$ e quindi le soluzioni continue fino al bordo devono avere dati nulli per $\{y = 0\}$. In caso di dati non nulli per $y = 0$ il problema non ha soluzioni classiche.

2. Sia X uno spazio di Hilbert reale e sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione ortonormale. Dimostrare che $\{e_n\}$ converge debolmente a zero, cioè che

$$\lim_{n \to +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Soluzione. Consideriamo la quantità $\|x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\|^2$ e minimizzandola rispetto a c_k si trova, grazie al fatto che gli e_n sono ortnormali che $c_k = \langle x, e_k \rangle$. Inoltre, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

da cui $\sup_N \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = \sup_N \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \infty$ ed essendo una serie convergente, necessariamente i suoi termini sono infinitesimi, da cui la tesi.

3. Trovare le soluzioni dell'equazione del calore $u_t - \nu u_{xx} = 0$ della forma $u(t,x) = v(x/\sqrt{t})$

Soluzione. Sostituiamo nell'equazione e poniamo $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, da cui

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{x}{2\sqrt{t}} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} = 0.$$

Pertanto

$$u_t(t,x) = -\frac{x}{2t\sqrt{t}} v'(\xi) \qquad \text{e} \qquad u_{xx}(t,x) = \frac{1}{t} v''(\xi),$$

da cui si ricava

$$v''(\xi) + \frac{\xi}{2\nu} v'(\xi) = 0.$$

Risolvendo si ottiene

$$v'(\xi) = c\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2\nu}},$$

e integrando si ottiene

$$v(\xi) = c_1 + c_2 \int_0^{\frac{\xi}{\sqrt{4\nu}}} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz, \qquad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Consideriamo l'operatore Δ_h *differenza finita* definito, per $h \neq 0$, da

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Dimostrare che

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k\,h) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare poi che, se f è regolare, allora

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n}.$$

Soluzione. La dimostrazione della prima formula segue dal principio di induzione, infatti, la formula per $n = 1$ risulta corretta. Osserviamo che Δ_h è un operatore lineare e supponendo la fomula vera per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = \Delta_h \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k\,h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left[f(x + (k+1)\,h) - f(x, k\,h)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f(x + k\,h) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x + k\,h).$$

La proprietà $f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n}$ può essere dimostrata in vari modi, per esempio con la regola de L'Hopital. Osserviamo però che

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+u)\, du,$$

e che

$$\Delta_h^2 f(x) = \int_0^h \frac{d}{dx} \Delta_h f(x+u)\, du = \int_0^h \int_0^h f(x+u+v)\, dudv,$$

da cui (per induzione)

$$\Delta_h^n f(x) = \int_0^h \ldots \int_0^h f^{(n)}(x + u_1 + \cdots + u_n)\, du_1 \ldots du_n,$$

e se $f^{(n)}$ è continua la funzione $f^{(n)}(x + u_1 + \cdots + u_n)$ converge uniformemente a $f^{(n)}(x)$ quando $h \to 0$. Osserviamo poi che il dominio di integrazione ha volume h^n.

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Costruire $f \in C_c^\infty(\Omega)$ che vale 1 su $K \subset \Omega$ compatto e tale che $0 \leq f \leq 1$.

Soluzione. Sia
$$\delta = \inf\{\|x - y\| : \; x \in K, \; y \notin \Omega\}$$
e dato che K è compatto e $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ è chiuso si ha $\delta > 0$. Definiamo ora
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x - y\| < \frac{\delta}{2} \text{ per qualche } y \in K\}.$$
Si vede subito che
$$K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega.$$
Consideriamo ora χ_U, la funzione caratteristica di U e mollifichiamola per ottenere la funzione richiesta. Prendiamo una ϕ regolare tale che
$$\phi \geq 0, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \phi \subset B_{\delta/2}(0), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1.$$
Si ha ovviamente che $\chi_U * \phi$ è di classe C^∞ e dato che sono entrambe non-negative $\chi_U * \phi \geq 0$. Inoltre
$$|(\chi_U * \phi)(x)| \leq \|\chi_U\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y)\, dy = 1.$$
Osserviamo poi che per $x \in K$
$$(\chi_U * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_U(y)\phi(x - y)\, dy = \int_U \chi_U(y)\phi(x - y)\, dy = \int_U \phi(x - y)\, dy = 1.$$
Allo stesso modo si dimostra che $\chi_U * \phi(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, dato che tali punti distano da K almeno il doppio del raggio del supporto della ϕ.