Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 luglio 2016

1. Siano $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, dove $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione continua e che $\|f * g\|_\infty \le C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.
Soluzione. Dalla definizione abbiamo che

$$(f * g)(x + \delta) - (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\big[g(x + \delta - s) - g(x - s)\big]\,ds$$

e con la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|(f*g)(x+\delta)-(f*g)(x)| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |g(x+\delta-s)-g(x-s)|^2\,ds\right)^{1/2},$$

e il primo integrale è limitato per ipotesi. Il secondo tende a zero per $\delta \to 0$. Questo si vede facilmente approssimando (in $L^2(\mathbb{T})$) la funzione g con una funzione continua (esattamente come in $L^1(\mathbb{T})$).
Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(s)g(x-s)\,ds\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s)g(x-s)|\,ds \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |g(x-s)|^2\,ds\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\end{aligned}$$

dato che g è 2π-periodica.

2. Calcolare per $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(x) = f(|x|)$ quanto vale (per $x \ne 0$) il bi-Laplaciano $\Delta^2 f := \Delta(\Delta f)$. Trovare poi le soluzioni di

$$\Delta^2 f(|x|) = 0 \qquad 0 \ne x \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione. Ricordiamo che per funzioni regolari e radiali in $\mathbb{R}^3$ si ha $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$, pertanto $\Delta^2(f) = \Delta(\Delta(f))$ ha la seguente espressione

$$\Delta^2 f(r) = \left(f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right)'' + \frac{2}{r}\left(f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right)' = f^{(4)}(r) + \frac{4f^{(3)}(r)}{r}.$$

Le soluzioni dell'equazione ordinaria lineare (di Eulero) $\frac{4f^{(3)}(r)}{r} + f^{(4)}(r) = 0$ si cercano della forma $f(r) = r^\alpha$ e sostituendo si trova

$$r^{\alpha-4}\alpha\left(\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2\right) = r^{\alpha-4}\alpha(\alpha-2)(\alpha^2-1) = 0,$$

che ha come soluzioni $\alpha = 0, \pm 1, 2$, quindi la soluzione cercata ha la forma

$$f(r) = c_4 r^2 + c_3 r + c_2 + \frac{c_1}{r}.$$

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, con $n \geq 3$. Dimostrare che

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{n-2} \|\nabla f\|_{L^2}$$

Sugg. Si consideri la quantità $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$ applicata alla funzione $|x|^{-2}$ e si integri per parti $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2} \, dx$.

Soluzione. Osserviamo che con calcolo diretto dato che $|x| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ si ha

$$\mathcal{R}(|x|^{-2}) = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i |x|^{-2} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|x|^2} = -\frac{2}{|x|^2}.$$

Pertanto si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x|^2} \sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^n \partial_i \frac{x_i f(x)}{|x|^2} \, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x) x_i \partial_i f(x)}{|x|^2} + \sum_{i=1}^n \frac{f(x)f(x)}{|x|^2} + f(x)f(x) \sum_{i=1}^n x_i \partial_i \frac{1}{|x|^2} \, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2} + n\frac{|f(x)|^2}{|x|^2} - 2\frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, dx.$$

Quindi si ha

$$(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2} \, dx$$

e con la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, dx \leq \frac{2}{n-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{R}f(x)|}{|x|^2} \, dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{2}{n-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

da cui la tesi.

4. Sia dato $1 \leq p \leq \infty$ e $C > 0$. Sia $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| \, dy \leq C \qquad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| \, dx \leq C.$$

Dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione Tf

$$Tf(x) := \int_{R^n} K(x,y) \, f(y) \, dy$$

risulta ben definita quasi ovunque e $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soluzione. Cominciamo dal caso $1 < p < \infty$ e usando la diseguaglianza di Hölder si ottiene

$$|Tf(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| dy \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| \, |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq C^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| \, |f(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

per $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Elevando tutto alla potenza p-esima e integrando rispetto alla variabile x si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx \leq C^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| \, |f(y)|^p dy dx,$$

$$\leq C^{p/q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy,$$

e quindi estraendo la radice p-esima

$$\|Tf\|_{L^p} \le C^{1/p+1/q}\|f\|_{L^p} = C\|f\|_{L^p},$$

quindi la funzione Tf risulta finita quasi ovunque.

Nel caso $p = 1$ la dimostrazione è essenzialmente la stessa, e serve unicamente l'ipotesi $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{R^n}|K(x,y)|\,dx \le C$. Il caso $p = \infty$ è banale e serve unicamente l'ipotesi $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{R^n}|K(x,y)|\,dy \le C$

5. Sia $u \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Per $x \in \Omega$ dimostrare che

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0}\frac{4}{r^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\,dS_y - u(x)\right]$$

Sugg. Considerare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di u e usare argomenti di simmetria per verificare che $\int_{\partial B(0,1)} y_j\,dS_y = 0$ e $\int_{\partial B(0,1)} y_j y_k\,dS_y = \pi\delta_{jk}$.
Soluzione. Scrivendo lo sviluppo di Taylor centrato in x e di ordine 2 si ha

$$u(x+ry) = u(x) + r\partial_i u(x)\cdot y_i + \frac{r^2}{2}\partial^2_{ij}u(x+sy)y_i y_j \qquad 0<s<r.$$

Osserviamo ora che da considerazioni di simmetria

$$\int_{\partial B(0,1)} y_j\,dS_y = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial B(0,1)} y_j y_k\,dS_y = 0 \ j\neq k.$$

Quindi

$$\int_{\partial B(0,1)} y_k^2\,dS_y = \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,1)} (y_1^2+y_2^2)\,dS_y = \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,1)} dS_y = \pi.$$

Pertanto integrando esplicitamente

$$\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\,dS_y = \int_{\partial B(0,1)} u(x) + r\partial_i u(x)\cdot y_i + \frac{r^2}{2}\partial^2_{ij}u(x+sy)y_i y_j\,dS_y$$

$$= \int_{\partial B(0,1)} u(x) + r\partial_i u(x)\cdot y_i + \frac{r^2}{2}\big(\partial^2_{ij}u(x) + \partial^2_{ij}u(x+sy) - \partial^2_{ij}u(x)\big)y_i y_j\,dS_y$$

$$= 2\pi u(x) + \frac{r^2\pi}{2}\Delta u(x) + \frac{r^2}{2}\int_{\partial B(0,1)} \big(\partial^2_{ij}u(x+sy) - \partial^2_{ij}u(x)\big)y_i y_j\,dS_y.$$

Osserviamo ora che essendo $u \in C^2(\Omega)$ si ha, dato che $0 < s < r$

$$\left|\int_{\partial B(0,1)} \big(\partial^2_{ij}u(x+sy) - \partial^2_{ij}u(x)\big)y_i y_j\,dS_y\right| \le 2\pi\|\partial^2_{ij}u(x+sy) - \partial^2_{ij}u(x)\|_\infty \to 0, \quad \text{per } r\to 0.$$

Sostituendo si trova dunque

$$\frac{4}{r^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\,dS_y - u(x)\right]$$

$$= \Delta u(x) + \int_{\partial B(0,1)} \big(\partial^2_{ij}u(x+sy) - \partial^2_{ij}u(x)\big)y_i y_j\,dS_y \xrightarrow{r\to 0} \Delta u(x).$$