

Corso di Laurea in Matematica

Prova di Analisi Matematica 3

22 giugno 2016

1. Sia

$$X = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0, f(1) = 1\}$$

e consideriamo la applicazione T definita da

$$[Tf](x) = \begin{cases} f(3x)/2 & 0 \leq 3x \leq 1 \\ 1/2 & 1 < 3x < 2 \\ 1/2 + f(3x-2)/2 & 2 \leq 3x \leq 3 \end{cases}$$

Mostrare che a) $T : X \rightarrow X$; b) T è una contrazione (in realtà è Lipschitziana); c) esiste un unico punto fisso di T .

Chiamata $d(x)$ la funzione tale che $d(x) = [Td](x)$ per ogni $x \in [0, 1]$ calcolare, se esistono, i punti dove $d'(x) = 0$.

Soluzione. Osserviamo che con verifica diretta $[Tf](0) = 0$ e che $[Tf](1) = 1$, inoltre la funzione $[Tf]$ è ovviamente continua a tratti (composizione di funzioni continue) e nei "punti di raccordo"

$$[Tf](1/3^-) = [Tf](1/3^+) = [Tf](2/3^-) = [Tf](2/3^+) = \frac{1}{2}$$

dove $[Tf](x_0^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} [Tf](x)$. Lo spazio X è uno spazio metrico completo, dato che è un sottoinsieme chiuso dello spazio $C^0([0, 1])$, verifichiamo che si ha contrazione. Si ha che per ogni $f, g \in X$ l'uguaglianza $[Tf](x) = [Tg](x)$ per ogni $x \in (1/3, 2/3)$ e quindi

$$\max_{x \in [0, 1]} |[Tf](x) - [Tg](x)| = \max_{x \in [0, 1] \setminus [1/3, 2/3]} |[Tf](x) - [Tg](x)|$$

e se $x \in [0, 1/3]$ si ha $|[Tf](x) - [Tg](x)| = \frac{1}{2}|f(3x) - g(3x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Analogo risultato se $x \in [2/3, 1]$ e quindi

$$\|[Tf](x) - [Tg](x)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty.$$

Per il teorema delle contrazioni esiste e unica $d \in X$ punto fisso. Sicuramente $d'(x) = 0$ in $(1/3, 2/3)$ dato che $d(x) = [Td](x) = \frac{1}{2}$ in tale intervallo.

Usando di nuovo la stessa informazione, otteniamo che $d(x) = \frac{1}{4}$ in $(1/9, 2/9)$ e che $d(x) = \frac{3}{4}$ in $(7/9, 8/9)$ e pertanto è derivabile con derivata nulla in $(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$. iterando il ragionamento si ha che d è costante sull'unione di 2^{n-1} intervalli disgiunti, ciascuno di lunghezza 3^{-n} . Pertanto la misura dell'insieme C dove d è localmente costante (e quindi d ha derivata nulla in C) è

$$|C| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

2. Sia per $0 < \epsilon < \pi/2$ la funzione $g_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π tale che

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{se } x \in [-\epsilon, \epsilon], \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\epsilon, \epsilon], \end{cases}$$

Calcolare la serie di Fourier complessa di g_ϵ e calcolare $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{g}_\epsilon(m)$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(x-a)f(x)dx$ per f funzione continua e discutere il limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, anche in relazione con i coefficienti di Fourier.

Soluzione. Si ha

$$\widehat{g}_\epsilon(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-imx} dx = \begin{cases} \frac{\sin(\epsilon m)}{2\pi \epsilon m} & \text{se } m \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

La funzione g_ϵ è tale che la serie di Fourier converge in tutti i punti, eccetto che nei salti dove converge al valor medio. Osserviamo che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \widehat{g}_\epsilon(m) = \frac{1}{2\pi}$$

e quindi al limite non si hanno dei coefficienti di Fourier di una funzione di classe L^1 . Questo è naturale osservando che

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(x-a)f(x)dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

e quindi al limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(x-a)f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)dx = f(a)$$

per ogni funzione continua. Quindi g_ϵ risulta essere una approssimazione continua a tratti della delta di Dirac.

3. Sia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si considerino le funzioni

$$\psi_{m,n} := 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - n) \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{m,n}(x) \psi_{m',n'}(x) dx = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad \forall m, m', n, n' \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Dato che il supporto di $\psi_{m,n}$ è uguale all'intervallo $[2^m n, 2^m(n+1)]$, a fissato $m \in \mathbb{N}$, l'intersezione $\text{supp}(\psi_{m,n}) \cap \text{supp}(\psi_{m,n'}) = \emptyset$ e quindi

$$\langle \psi_{m,n}, \psi_{m,n'} \rangle = \delta_{n,n'} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

In particolare osserviamo che $\langle \psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{m,n}|^2 dx = \int_{2^m n}^{2^m(n+1)} 2^{-m} dx = 1$ grazie al fattore di scala.

Se invece $m \neq m'$ è possibile che ci sia sovrapposizione dei supporti. Per fissare le idee, se $m < m'$ allora il supporto di $\psi_{m,n}$ sta tutto nella regione dove $\psi_{m',n'}$ è costante e quindi il prodotto scalare è proporzionale all'integrale di ψ , che è nullo.

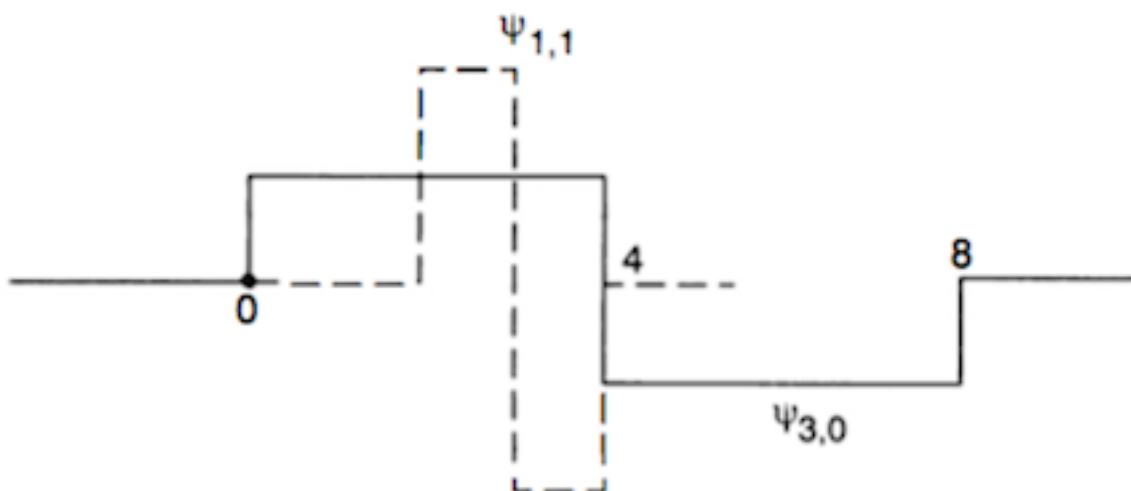


Figura 1: Grafico di $\psi_{1,1}$ e $\psi_{3,0}$ da cui si vede come il supporto della prima funzione è contenuto in un intervallo dove la seconda è costante.

4. Risolvere, per $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\Delta u = \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \alpha > 1$$

Soluzione. Dato che il lato destro dipende solo dalla distanza $|x|$ del punto $x \in \mathbb{R}^2$ dall'origine e visto che il Laplaciano è invariante per rotazioni, cerchiamo soluzioni del tipo $u(x) = |x|^\beta = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\beta}{2}}$. Si ha quindi

$$\partial_{x_i} u = \beta x_i (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\beta}{2}-1} \quad \partial_{x_i}^2 u = \beta (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\beta}{2}-2} ((\beta-1)x_1^2 + x_2^2)$$

e quindi

$$\Delta u = \beta^2 (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\beta}{2}-1} = \beta^2 |x|^{\beta-2}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare scrivendo $u = u(\rho)$ con $\rho = |x|$ e il Laplaciano in coordinate polari $\Delta u(\rho) = u''(\rho) + u'(\rho)/\rho$.

La soluzione risulta quindi

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{(2-\alpha)^2} |x|^{2-\alpha} \quad \alpha \neq 2.$$

Ora ovviamente, se u è soluzione anche $u + c$ risulta soluzione e anche $u + H(|x|) + c$ dove H è armonica e dipende solo da $|x|$, quindi la soluzione risulta

$$u(x_1, x_2) = \frac{A}{(2-\alpha)^2} |x|^{2-\alpha} + B \log |x| + C \quad \alpha \neq 2$$

al variare di $(A, B, C) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se $1 < \alpha < 2$ allora $1/|x|^\alpha \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ per qualche $p > 1$. Al variare di α la soluzione u risulta classica per $x \neq 0$, ma la funzione u potrebbe non appartenere a nessun $L_{loc}^q(\mathbb{R}^2)$ se α è sufficientemente grande.

5. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, 1)$ una successione tale che esiste una costante C in modo che $\|f_n\| \leq C$. Dimostrare che esiste una sotto-successione estratta $\{f_{n_k}\}$ e esiste $f \in L^2(0, 1)$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{n_k}(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad \forall g \in L^2(0, 1).$$

Per la dimostrazione seguire la seguente traccia: fissare un insieme denso $\{\phi_j\} \subset L^2(0, 1)$ e considerare $\int_0^1 f_n \phi_j dx$ in modo da identificare (tramite procedimento diagonale) un limite. Usare poi la densità dei ϕ_j e il teorema di rappresentazione di Riesz per concludere determinando f e la convergenza quando si moltiplica scalarmente per ogni $g \in L^2(0, 1)$.

Soluzione. Sia $\phi_j(x)$ l'insieme della funzioni caratteristiche di intervalli aperti con estremi razionali. Tale insieme è denso e numerabile.

Consideriamo la successione numerica

$$\int_0^1 f_n \phi_1 dx$$

risulta limitata, quindi posso trovare $f_n^{(1)}$ sotto-successione di f_n tale che $\int_0^1 f_n^{(1)} \phi_1 dx$ risulta convergente. Nello stesso modo posso trovare $f_n^{(2)}$, una sotto-successione di $f_n^{(1)}$, tale che $\int_0^1 f_n^{(2)} \phi_2 dx$ risulta convergente. Induttivamente costruisco $f_n^{(j)}$ tale che la successione numerica $\int_0^1 f_n^{(j)} \phi_j dx$ risulta convergente. Estrahendo la successione diagonale $f_n^{(n)}$ si trova che

$$\int_0^1 f_n^{(n)} \phi_j dx$$

converge per ogni $j \in \mathbb{N}$ fissato.

Dato che ϕ_j è denso, per ogni $g \in L^2(0, 1)$ e per ogni $\epsilon > 0$ posso trovare $j \in \mathbb{N}$ tale che $\|g - \phi_j\| < \epsilon$ e pertanto

$$\int_0^1 f_n^{(n)} g(x) dx = \int_0^1 f_n^{(n)} (g(x) - \phi_j) dx + \int_0^1 f_n^{(n)} \phi_j dx$$

da cui, se n, m sono abbastanza grandi, dato che $\int_0^1 f_n^{(n)} \phi_j$ converge

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f_n^{(n)} - f_m^{(m)}) g(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 (f_n^{(n)} - f_m^{(m)}) (g(x) - \phi_j) dx \right| + \left| \int_0^1 (f_n^{(n)} - f_m^{(m)}) \phi_j dx \right| \\ &\leq 2C\epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

Pertanto la successione reale $\int_0^1 f_n^{(n)} g(x) dx$ è di Cauchy e quindi convergente.

Ora il funzionale $A : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$Ag = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n^{(n)} g dx$$

risulta lineare e continuo, dato che $\|f_n\| \leq C$, quindi per il teorema di rappresentazione di Riesz (dei funzionali lineari e continui su spazi di Hilbert) esiste $f \in L^2(0, 1)$ tale che

$$Ag = \int_0^1 f g dx$$

e si ha pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n^{(n)} g dx = \int_0^1 f g dx \quad \forall g \in L^2(0, 1).$$