Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

10 febbraio 2016

1. Si determini lo sviluppo in serie (di seni e coseni) di Fourier della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad x \in [-\pi, \pi[.$$

Si usi il risultato ottenuto per calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Soluzione. Calcolando esplicitamente i coefficienti di Fourier tramite integrazione per parti si ottiene il seguente sviluppo per la funzione f

$$f(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)(\cos(kx) - k\sin(kx))}{k^2+1} \qquad x \in]-\pi, \pi[,$$

con convergenza puntuale dato che la funzione esponenziale è di classe C^1. Agli estremi si ha convergenza al valor medio del salto e quindi calcolando la $f(x)$ in $x = 0$ e in $x = \pi$ otteniamo

$$1 = f(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{k^2+1}$$

$$\cosh(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh(\pi)}{n^2+1}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\sinh(\pi)} - 1\right] \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1\right].$$

2. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-\frac{1}{16x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

studiando

$$H(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-a/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad a > 0$$

tramite derivazione sotto il segno di integrale e la sostituzione $x = a/t$.

Soluzione Derivando la espressione per $H(a)$ rispetto ad a otteniamo

$$H'(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-a/x} \Big(-\frac{1}{x}\Big) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

e col cambio di variabile $t = \frac{a}{x}$, da cui $dt = -\frac{a}{x^2}dx$ e l'intervallo di integrazione va da $+\infty$ a 0 si ha

$$H'(a) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-a/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} H(a).$$

Integrando l'equazione a variabili separabili otteniamo quindi

$$H(a) = H(0)\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}}/$$

Osserviamo ora che

$$H(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

da cui $H(a) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}}$ e pertanto

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-\frac{1}{16x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = H(1/16) = \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{e}}}.$$

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{f(s)}{s}\right|^2 ds \le 4\int_0^{+\infty} |f'(s)|^2\, ds,$$

ricordando che $\frac{f(s)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s f'(t)\,dt$ e usando i cambi di variabile $s = \mathrm{e}^\sigma$, $t = \mathrm{e}^\tau$ per ricondursi ai teoremi sulla convoluzione.

Soluzione. Con i cambi di variabile suggeriti si ha

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{f(s)}{s}\right|^2 ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2}\Big(\int_0^s f'(t)\,dt\Big)^2 ds = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\sigma}\Big(\int_0^{\mathrm{e}^\sigma} f'(t)\,dt\Big)^2 \mathrm{e}^\sigma\, d\sigma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\sigma}\Big(\int_{-\infty}^{\sigma} f'(\mathrm{e}^\tau)\,\mathrm{e}^\tau\, d\tau\Big)^2 \mathrm{e}^\sigma\, d\sigma$$

che possiamo riscrivere, tramite la funzione caratteristica, come

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{f(s)}{s}\right|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-\infty,\sigma[}(\tau) f'(\mathrm{e}^\tau)\,\mathrm{e}^\tau \mathrm{e}^{-\sigma/2}\, d\tau\Big)^2 d\sigma.$$

Introducendo la funzione a scalino $H(x)$ che vale 1 per $x > 0$ e zero altrimenti possiamo riscrivere l'ultima formula come

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{f(s)}{s}\right|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} H(\sigma-\tau)\mathrm{e}^{-(\sigma-\tau)/2} f'(\mathrm{e}^\tau)\,\mathrm{e}^{\tau/2}\, d\tau\Big)^2 d\sigma.$$

e quindi si tratta del quadrato della norma $L^2(\mathbb{R})$ della funzione $\phi(\sigma) = (F * G)(\sigma)$ con $F(\sigma) = H(\sigma)\mathrm{e}^{-\sigma/2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $G(\sigma) = f'(e^\sigma)\mathrm{e}^{\sigma/2} \in L^2(\mathbb{R})$ da cui

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \le \|H(\sigma)\mathrm{e}^{-\sigma/2}\|_{L^1}^2 \|f'(e^\sigma)\mathrm{e}^{\sigma/2}\|_{L^2}^2$$

e tornando alle variabili iniziali

$$\le 4\int_0^\infty |f'(t)|^2\, dt.$$

4. Si consideri il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = g(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u_t(t,x) = h(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\} \end{cases}$$

e lo si risolva con tramite la formula di D'Alembert (dopo aver definito un problema opportuno per $x \in \mathbb{R}$). Si interpreti il risultato ottenuto nel caso $h = 0$.

Soluzione. Prolunghiamo per riflessione sia la soluzione u che i dati f, g nel seguente modo

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) \text{ per } t \geq 0,\ x \geq 0 \\ -u(t,-x) \text{ per } t \geq 0,\ x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) \text{ per } x \geq 0, \\ -g(-x) \text{ per } x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) \text{ per } x \geq 0, \\ -h(-x) \text{ per } x < 0, \end{cases}$$

e quindi il problema da risolvere diventa

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(t,x) - \tilde{u}_{xx}(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}(t,x) = \tilde{g}(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t(t,x) = \tilde{h}(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

che tramite la formula di D'Alembert ha come soluzione la funzione

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(s)\, ds.$$

Nel caso $h = 0$ e ritornando alla funzione u si ha

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(g(x+t) + g(x-t)\Big) & 0 < t \leq x \\ \frac{1}{2}\Big(g(x+t) - g(x-t)\Big) & 0 < x \leq t \end{cases}$$

che si può intepretare come lo spostamento iniziale g si spezza in due parti una che si muove verso destra e una che si muove verso sinistra con la stessa velocità uguale a 1. La seconda "onda" si riflette quando arriva a toccare il lato $\{x = 0\}$ dove la corda è fissata.

5. Sia

$$B^+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\big\}$$

e sia $u \in C^2(B^+) \cap C(\overline{B^+})$ armonica e tale che $u(x,0) = 0$. Dimostrare che la funzione $\tilde{u}$ ottenuta estendendo per riflessione dispari rispetto all'asse delle x è ancora armonica in tutta la palla unitaria B.

Applicare poi tale risultato per risolvere il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^+ \\ u = y & \text{su } \partial B^+ \end{cases}$$

Soluzione. La funzione u soddisfa $\Delta u = 0$ ed è continua in $\overline{B^+}$; sia U la funzione riflessa

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ -u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

che risulta continua su tutta la palla B. Consideriamo ora la soluzione del problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B \\ \\ v = U_{|\partial B} & \text{su } \partial B \end{cases}$$

che esiste ed è unica e di classe $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$, tramite la formula di rappresentazione di Poisson e il principio del massimo. Osserviamo che $v(x, -y)$ è ancora armonica e assume i valori al bordo cambiati di segno. Se consideriamo la funzione $w(x, y) = v(x, y) + v(x, -y)$ si ha pertanto

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } B \\ \\ w = 0 & \text{su } \partial B \end{cases}$$

da cui $w(x, y) \equiv 0$ e quindi

$$v(x, y) = -v(x, -y)$$

è dispari e in particolare $v(x, 0) = 0$. Quindi v armonica coincide con u su ∂B^+ e quindi $v = u$ su $\overline{B^+}$. Pertanto si ha anche $v = u = U$ in $\overline{B^+}$. Ma essendo sia v che U dispari si ha anche

$$v = U \qquad \text{in } \overline{B}$$

e essendo v armonica si ha $\Delta U = 0$.

Inoltre abbiamo che la funzione $u(x, y) = y$ è armonica e soddisfa le condizioni al contorno su ∂B^+ e quindi è l'unica soluzione. In ogni caso, prolungando la condizione al bordo si ha che $U(x, y) = y = \sin(\theta)$ per $(x, y) \in \partial B$. Quindi usando lo sviluppo di Poisson (utilizzando i coefficienti di Fourier del dato al contorno visto come funzione periodica della variabile angolare θ) si ha che in coordinate polari

$$U(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_k \rho^{|k|} \mathrm{e}^{ik\theta} = r \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} = r \sin(\theta)$$

che ristretta a $\theta \in [0, \pi]$ è $U(x, y) = y$.