Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

20 gennaio 2016

1. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ usando le proprietà della trasformata di Fourier e controllare il risultato ottenuto studiando la funzione $F(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)^2 dx$ in termini del parametro non-negativo t.

   Soluzione. Ricordiamo che la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$ vale $\widehat{f}(\xi) = \sin(\xi)/\xi$. Pertanto per il teorema di Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_R |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

   Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right)^2 d\xi = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \, dx = \pi.$$

   Se per verifica consideriamo $F(t)$ abbiamo

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{x} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2y)}{y} \, dy = \frac{\pi}{2},$$

   usando l'integrale notevole di $\sin(x)/x$ sulla semiretta reale. Pertanto $F(t)$ avendo derivata costante è lineare, e dato che $F(0) = 0$ si ha

$$F(t) = \frac{\pi}{2} t.$$

   Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = 2\, F(1) = \pi.$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo la successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho[n(t-x)]\, n\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} \, dt,$$

   dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, è pari e tale che $0 \le \rho(s)$, $\rho(s) = 0$ se $|s| > 1$ e $\int_{\mathbb{R}} \rho(s)\, ds = 1$. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $M \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f_n^{(k)}(x)| \le C_M |x|^{-M} \quad \text{per } |x| \to +\infty.$$

   Dimostrare poi che se F è una funzione "regolare" allora

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) F(x) \, dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x) F(x) \, dx.$$

   Soluzione. Scrivendo la derivata p-esima di $f_n(x)$ otteniamo

$$|f_n^{(p)}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)(-n)^p \rho^{(p)}[n(t-x)]\, n\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} \, dt \right|,$$

$$\le n^{p+1} \max_{|s|\le 1} \left|\rho^{(p)}(s)\right| \int_{|n(t-x)|\le 1} |f(t)| \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} \, dt.$$

In particolare l'integrale si può maggiorare con quello su

$$|x| - 1 < |t| < |x| + 1,$$

dove vale $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} \le \mathrm{e}^{-\frac{(|x|-1)^2}{n^2}}$ ottenendo quindi

$$|f_n^{(p)}(x)| \le n^{p+1} \max_{|s|\le 1} \left|\rho^{(p)}(s)\right| \mathrm{e}^{-\frac{(|x|-1)^2}{n^2}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \le C_{p,M}|x|^{-M} \text{ per } x \to +\infty.$$

Per la seconda parte osserviamo che con un cambio di variabile si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} (f_n(x)F(x) - f(x)F(x))\, dx = \int_{-1}^{1} \rho(y)\, dy \left[\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} F(t - y/n) - \int_{\mathbb{R}} f(t)F(t)\, dt\right].$$

Pertanto, se $F \in C^1(\mathbb{R})$ e se F, F' sono limitate

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)F(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)F(x)\, dx\right|$$

$$\le \|\rho\|_\infty \max_{|y|\le 1} \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}} \big(F(t - y/n) - F(t)\big)\, dt\right| + \int_{\mathbb{R}} |f(t)F(t)|(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}})\, dt$$

$$\le \|\rho\|_\infty \frac{1}{n} \sup_{\mathbb{R}} |F'| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt + \sup_{\mathbb{R}} |F| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}})\, dt,$$

e i due integrali tendono a zero per $n \to +\infty$. In particolare per il secondo usiamo il teorema della convergenza dominata dato che $|f(t)|(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}}) \le |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Risolvere nel rettangolo $Q = \{(x, y) :\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ il problema misto

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = g(x) & \text{in } 0 \le x \le a, \\ u(0, y) = 0,\ u_x(a, y) = 0 & \text{in } 0 \le y \le b, \end{cases}$$

dove $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = g'(a) = 0$.

Soluzione. Con il metodo della separazione delle variabili cerchiamo una soluzione della forma $u(x, y) = v(x)w(y)$ e sostituendo otteniamo

$$-\lambda = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda,$$

con le condizioni al contorno

$$v(0) = v'(a) = 0 \qquad w(0) = 0.$$

Risolvendo le equazioni ordinarie lineari si ricava che le soluzioni sono per $k \ge 0$ e con $\lambda = \lambda_k = -\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4a^2}$

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right), \qquad w_k(y) = c_1 \sinh\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\right).$$

Il fatto che le soluzioni siano queste si ottiene imponendo le condizioni al contorno sulla v. Imponendo che $w(0) = 0$ abbiamo che $c_2 = 0$ e quindi la soluzione risulta essere

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right) \sinh\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\right).$$

I coefficienti α_k si possono determinare osservando che la $g(x)$ può essere scritta puntualmente (dato che è di classe C^1) come

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right)$$

con $g_k = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right)\,dx$, quindi scegliamo

$$\alpha_k = \frac{g_k}{\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi b}{2a}\right)}$$

in modo da imporre la condizione di Dirichlet $u(x,b) = g(x)$.

Osserviamo che $\sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| < \infty$ e pertanto in $\overline{Q}$ si ha la convergenza uniforme, quindi u è continua. All'interno u risulta armonica, con calcoli espliciti e dentro Q si può derivare quante volte si vuole dato che il coefficiente α_k è rapidamente decrescente essendo rapporto tra una quantità infinitesima (g_k) e un seno iperbolico che cresce in maniera esponenziale in k. Dato che $g'(a) = 0$, il dato di Neumann è assunto in senso classico sul segmento $\{x = a;\ y = b\}$.

4. Studiare il problema non omogeneo per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

In particolare, fissato il parametro $s \in \mathbb{R}$ definiamo $v(t,x,s)$ come soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x;s) - \Delta v(t,x;s) = 0 & \text{in } (s,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v(t,x;s) = 0 & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n, \\ v_t(t,x;s) = f(s,x) & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Mostrare allora che la soluzione u è data

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x;s)\,ds.$$

Applicarlo poi al caso uni-dimensionale, scrivendo la soluzione in forma esplicita usando la formula di D'Alembert.

Soluzione. Sia $v(t,x;s)$ la soluzione del problema omoegeneo in $(s,+\infty) \times \mathbb{R}$, intanto osserviamo che se $u(t,x) = \int_0^t v(t,x;s)\,ds$ allora derivando l'espressione per $u(t,x)$ si ha

$$u_t(t,x) = v(t,x;t) + \int_0^t v_t(t,x;s)\,ds = \int_0^t v_t(t,x;s)\,ds,$$

$$u_{tt}(t,x) = v_t(t,x,t) + \int_0^t v_{tt}(t,x;s)\,ds,$$

$$u_{xx}(t,x) = \int_0^t v_{xx}(t,x;s)\,ds,$$

e in particolare

$$u(0,x) = \int_0^0 v(t,x;s)\,ds = 0 \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = v(0,x;0) + \int_0^0 v_t(t,x;s) = 0.$$

Inoltre si ha $u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x)$.

Pertanto, ricordando la formula di D'Alembert che si ottiene scrivendo $u(t,x) = \phi(x-t) + \psi(x+t)$, si ha

$$v(t,x;s) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,dy$$

e quindi

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,dy\right] ds.$$

Dalla ultima espressione si vede che se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ allora $v(t,x;s) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e tutti conti sono giustificati e quindi la soluzione u risulta classica.

5. Siano p e $\mathcal{P}$ due polinomi in una variabile reale. Mostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti

   i) $\mathcal{P}(x) = p(x) - p^{(2)}(x) + p^{(4)}(x) - p^{(6)}(x) + \dots \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$;

   ii) $p(x) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}''(x)$;

   dove $p^{(k)}(x) = \frac{d^k p(x)}{dx^k}$.

   Siano p e $\mathcal{P}$ come sopra. Mostrare poi che

$$\int p(x)\sin(x)\,dx = \mathcal{P}'(x)\sin(x) - \mathcal{P}(x)\cos(x) + C.$$

Soluzione. Osserviamo intanto che $i) \ \Rightarrow \ ii)$ infatti

$$\mathcal{P}(x) + \mathcal{P}''(x) = p(x) - p^{(2)}(x) + p^{(4)}(x) - p^{(6)}(x) + \dots + p^{(2)}(x) - p^{(4)}(x) + p^{(6)}(x) + \dots = p(x),$$

dove la somma è finita.

Viceversa vediamo che $ii) \ \Rightarrow \ i)$. Dato $p(x)$ allora la funzione $\mathcal{P}(x)$ risolve una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti con lato destro $p(x)$. Le soluzioni di tale equazione sono della forma

$$\mathcal{P}(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + Q(x)$$

dove Q è un polinomio dello stesso grado di p. Che questo sia l'integrale generale si vede col metodo degli annichilatori. Dovendo essere $\mathcal{P}(x)$ un polinomio allora $A = B = 0$. Pertanto se $p(x) = \sum_{k=0}^M a_k x^k$ allora $\mathcal{P}(x) = Q(x) = \sum_{k=0}^M q_k x^k$ Pertanto ricaviamo le seguenti uguaglianze tra polinomi dello stesso grado

$$\mathcal{P}^{(2k+2)}(x) + \mathcal{P}^{(2k)}(x) = p^{(2k)}(x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} k \le \dfrac{N+1}{2} & \text{se } N \text{ è dispari} \\[2ex] k \le \dfrac{N+2}{2} & \text{se } N \text{ è pari.} \end{cases}$$

Quindi scrivendo la somma finita (telescopica nel lato sinistro)

$$\mathcal{P}(x) = \big(\mathcal{P}^{(2)}(x) + \mathcal{P}(x)\big) - \big(\mathcal{P}^{(4)}(x) + \mathcal{P}^{(2)}(x)\big) + \dots = p(x) - p^{(2)}(x) + p^{(4)}(x) - p^{(6)}(x) + \dots$$

Integrando per parti 2 volte si ha

$$\int p(x)\sin(x)\,dx = -p(x)\cos(x) + p'(x)\sin(x) - \int p''(x)\sin(x)\,dx + C,$$

o più in generale

$$\int p^{(k)}(x)\sin(x)\,dx = -p^{(k)}(x)\cos(x) + p^{(k+1)}(x)\sin(x) - \int p^{(k+2)}(x)\sin(x)\,dx + C_k. \quad (I_k)$$

Pertanto sommando a segno alterno le uguaglianze

$$I_0 - I_2 + I_4 - I_6 + \dots$$

si ha

$$\int p(x) \sin(x)\, dx = (-p(x) + p''(x) - \dots) \cos(x) + (p'(x) - p'''(x) + \dots) \sin(x) + C_0 - C_2 + \dots$$

da cui la tesi ricordando la definizione di $\mathcal{P}$.