

Corso di Laurea in Matematica

II prova intermedia di Analisi Matematica 3

17 dicembre 2015

1. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Decomponendola come $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ mostrare che la trasformata di Fourier di f può essere estesa anche a $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Può essere utile considerare l'insieme misurabile A delle $x \in \mathbb{R}$ dove f è maggiore di una assegnata costante positiva.

Tramite interpolazione si può mostrare che la trasformata risulta ben definita come mappa lineare da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^{p'}(\mathbb{R})$, con $p' = \frac{p}{p-1}$. Usando le funzioni Gaussiane dare una stima della norma di tale mappa.

2. Siano $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, \dots, N$ e $N \in \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\left| \sum_{m,n=1, m \neq n}^N \frac{a_m b_n}{m-n} \right| \leq \pi \left(\sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Sugg. Considerare la funzione $f(x) = i(\pi - x)$ definita per $x \in]0, 2\pi[$, e prolungata per periodicità e la quantità

$$\int_0^{2\pi} f(x) A(-x) B(x) dx$$

con $A(x) = \sum_{m=1}^N a_m e^{imx}$ e $B(x) = \sum_{n=1}^N b_n e^{inx}$.

3. Sia $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica e non negativa nella palla $B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ di centro zero e raggio $R > 0$. Dimostrare che

$$\frac{R-|x|}{R+|x|} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+|x|}{R-|x|} u(0) \quad \forall x \in B(0, R).$$

Dedurre che

$$\max_{B(0, R/2)} u \leq 9 \min_{B(0, R/2)} u.$$

4. Trovare una formula esplicita per la soluzione del seguente problema (con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{cases} w_t - \epsilon w_{xx} + \frac{1}{2} w_x^2 = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cercandola della forma $W = \phi(w)$ per una opportuna $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ regolare, che riconduca il problema a quello del calore.

Applicarlo poi alla soluzione dell'equazione di Burgers

$$\begin{cases} u_t - \epsilon u_{xx} + uu_x = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ponendo $w(t, x) = \int_{-\infty}^x u(t, s) ds$ e $h(x) = \int_{-\infty}^x u_0(s) ds$.

5. Sia $\Omega = \{(t, x) : 0 < t < T, -\infty < x_1 < x < x_2 < +\infty\}$ per qualche $T > 0$. Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che: a) $u \in C(\overline{\Omega})$; b) $u \in C^2(\Omega)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ in tutti i punti di Ω .
- 1) Dimostrare che esiste $(t_0, x_0) \in \partial\Omega$ tale che $u(t_0, x_0) \geq u(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \overline{\Omega}$.
 - 2) Dimostrare poi che se oltre alle ipotesi precedenti $u \in C^2(\Omega_1)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ per tutti i punti di Ω_1 per qualche aperto $\Omega_1 \supset \Omega$, allora esiste almeno un punto di massimo assoluto (t_0, x_0) non appartenente al segmento $L = \{(T, x) : x_1 < x < x_2\}$.
 - 3) In analogia col caso del problema di Poisson, dimostrare che lo stesso risultato del punto 2) vale, sotto le stesse ipotesi, anche se si ha solamente $u_t - u_{xx} \leq 0$.