Corso di Laurea in Matematica
I prova intermedia di Analisi Matematica 3

12 novembre 2015

1. Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ una funzione decrescente e regolare (C^1 a tratti), prolungata poi per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Dimostrare che

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. Sia, per $\alpha \notin \mathbb{Z}$, definita la funzione $f(x) = \cos(\alpha x)$, per $x \in [-\pi, \pi]$

   a) Calcolare lo sviluppo (reale) di f in serie di Fourier;

   b) Usare la formula ottenuta per scrivere lo sviluppo della cotangente di x per $x = \alpha\pi$;

   c) Integrando termine a termine rispetto ad α arrivare al prodotto (infinito) di Eulero

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

   d) Uguagliare i coefficienti di x^2 nello sviluppo di Taylor di $\frac{\sin(x)}{x}$ e del prodotto e verificare la formula per la somma della serie armonica generalizzata.

3. Sia $\mathbb{K}$ un convesso chiuso nello spazio di Hilbert $(X, \|\,.\,\|_X)$. Verificare che la proiezione $P_{\mathbb{K}}$ è una funzione uniformemente continua e in particolare

$$\|P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\|_X \leq \|f - g\|_X \qquad \forall\, f, g \in X.$$

   Definiamo poi come caso particolare

$$\mathbb{K} = \left\{ f : (-1, 1) \to \mathbb{R} :\ f \in L^2(-1, 1) \text{ e } f(x) \geq -x^2 + \frac{1}{2} \text{ q.o. } x \in (-1, 1) \right\} \subset L^2(-1, 1)$$

   Stabilire se il teorema della proiezione di può applicare e calcolare $P_{\mathbb{K}} f$ se $f(x) = x + \frac{2}{3}$.

4. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno (con condizioni miste) per l'equazione delle onde ($T > 0$, $c \neq 0$)

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & (t, x) \in (0, \pi) \times (0, T) \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0, x) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = g(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

   Si può immaginare una corda elastica con estremo fissato e uno libero, oppure una colonna di aria posta in vibrazione con una estremità aperta e una chiusa (clarinetto, organo...)

   Risolvere il problema con la separazione delle variabili, descrivendo le ipotesi da fare su f, g. Paragonare gli autovalori e le autofunzioni con quelli del problema di Neumann per le onde (entrambi estremi liberi)

5. Sia $(X, \|\,.\,\|)$ uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(X, X)$ con

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1$$

Mostrare che $(\mathrm{I} - A)$ è lineare e invertibile e che

$$\|(\mathrm{I} - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$

Sugg. Ricordare la formula per la somma di una progressione geometrica e cominciare dal caso dim $X < \infty$.