

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 settembre 2016

1. Sia data l'equazione

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0 \quad (x, y) \in R := (0, \pi) \times (0, 1),$$

e sia $u \in C(\overline{R}) \cap C^2(R)$ soluzione tale che $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ per $0 \leq y \leq 1$. Mostrare che per certi valori dei dati su $\{y = 0\}$ non esistono soluzioni.

2. Sia X uno spazio di Hilbert reale e sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione ortonormale. Dimostrare che $\{e_n\}$ converge debolmente a zero, cioè che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

3. Trovare le soluzioni dell'equazione del calore $u_t - \nu u_{xx} = 0$ della forma $u(t, x) = v(x/\sqrt{t})$
4. Consideriamo l'operatore Δ_h *differenza finita* definito, per $h \neq 0$, da

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Dimostrare che

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k h) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare poi che, se f è regolare, allora

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n}.$$

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Costruire $f \in C_c^\infty(\Omega)$ che vale 1 su $K \subset \Omega$ compatto e tale che $0 \leq f \leq 1$.