Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 luglio 2016

1. Siano $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, dove $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione continua e che $\|f * g\|_\infty \leq C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

2. Calcolare per $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(x) = f(|x|)$ quanto vale (per $x \neq 0$) il bi-Laplaciano $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$. Trovare poi le soluzioni di
$$\Delta^2 f(|x|) = 0 \qquad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3.$$

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, con $n \geq 3$. Dimostrare che
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\, dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{n-2}\|\nabla f\|_{L^2}$$
Sugg. Si consideri la quantità $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$ applicata alla funzione $|x|^{-2}$ e si integri per parti $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2}\, dx$.

4. Sia dato $1 \leq p \leq \infty$ e $C > 0$. Sia $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\, dy \leq C \qquad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\, dx \leq C.$$
Dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione Tf
$$Tf(x) := \int_{R^n} K(x,y)\, f(y)\, dy$$
risulta ben definita quasi ovunque e $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

5. Sia $u \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Per $x \in \Omega$ dimostrare che
$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{4}{r^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} u(x + ry)\, dS_y - u(x) \right]$$
Sugg. Considerare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di u e usare argomenti di simmetria per verificare che $\int_{\partial B(0,1)} y_j\, dS_y = 0$ e $\int_{\partial B(0,1)} y_j y_k\, dS_y = \pi\delta_{jk}$.