Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

22 giugno 2016

1. Sia
$$X = \{f \in C([0,1]) :\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$$
e consideriamo la applicazione T definita da
$$[Tf](x) = \begin{cases} f(3x)/2 & 0 \leq 3x \leq 1 \\ 1/2 & 1 < 3x < 2 \\ 1/2 + f(3x-2)/2 & 2 \leq 3x \leq 3 \end{cases}$$
Mostrare che a) $T : X \to X$; b) T è una contrazione (in realtà è Lipschitziana); c) esiste un unico punto fisso di T.

Chiamata $d(x)$ la funzione tale che $d(x) = [Td](x)$ per ogni $x \in [0,1]$ calcolare, se esistono, i punti dove $g'(x) = 0$.

2. Sia per $0 < \epsilon < \pi/2$ la funzione $g_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π tale che
$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon} & \text{se } x \in [-\epsilon, \epsilon], \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \backslash [-\epsilon, \epsilon], \end{cases}$$
Calcolare la serie di Fourier complessa di g_ϵ e calcolare $\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{g_\epsilon}(m)$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(x - a) f(x)\, dx$ per f funzione continua e discutere il limite $\epsilon \to 0^+$, anche in relazione con i coefficienti di Fourier.

3. Sia $\psi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue
$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
consideriamo le funzioni
$$\psi_{m,n} := 2^{-m/2} \psi(2^{-m} x - n) \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$
Dimostrare che
$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{m,n}(x) \psi_{m',n'}(x)\, dx = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \qquad \forall\, m, m', n, n' \in \mathbb{N}.$$

4. Risolvere, per $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
$$\Delta u = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \alpha > 1$$

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,1)$ una successione tale che esiste una costante C in modo che $\|f_n\| \leq C$. Dimostrare che esiste una sotto-successione estratta $\{f_{n_k}\}$ e esiste $f \in L^2(0,1)$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_{n_k}(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad \forall\, g \in L^2(0,1).$$

Per la dimostrazione seguire la seguente traccia: fissare un insieme denso $\{\phi_j\} \subset L^2(0,1)$ e considerare $\int_0^1 f_n\phi_j\,dx$ in modo da identificare (tramite procedimento diagonale) un limite. Usare poi la densità dei ϕ_j e il teorema di rappresentazione di Riesz per concludere determinando f e la convergenza quando si moltiplica scalarmente per ogni $g \in L^2(0,1)$.