Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

10 febbraio 2016

1. Si determini lo sviluppo in serie (di seni e coseni) di Fourier della funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad x \in [-\pi, \pi[.$$
Si usi il risultato ottenuto per calcolare
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-1/(16x)} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
studiando
$$H(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-a/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad a > 0$$
tramite derivazione sotto il segno di integrale e la sostituzione $x = a/t$.

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Dimostrare che
$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{f(s)}{s} \right|^2 ds \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'(s)|^2 \, ds,$$
ricordando che $\frac{f(s)}{s} = \frac{1}{s} \int_0^s f'(t)\, dt$ e usando i cambi di variabile $s = \mathrm{e}^\sigma$, $t = \mathrm{e}^\tau$ per ricondursi ai teoremi sulla convoluzione.

4. Si consideri il problema ai valori iniziali e al contorno
$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = g(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u_t(t,x) = h(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\} \end{cases}$$
e lo si risolva con tramite la formula di D'Alembert (dopo aver definito un problema opportuno per $x \in \mathbb{R}$). Si interpreti il risultato ottenuto nel caso $h = 0$.

5. Sia
$$B^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0 \right\}$$
e sia $u \in C^2(B^+) \cap C(\overline{B^+})$ armonica e tale che $u(x,0) = 0$. Dimostrare che la funzione $\tilde{u}$ ottenuta estendendo per riflessione dispari rispetto all'asse delle x è ancora armonica in tutta la palla unitaria B.

   Applicare poi tale risultato per risolvere il problema
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^+ \\ u = y & \text{su } \partial B^+ \end{cases}$$