Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

20 gennaio 2016

1. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ usando le proprietà della trasformata di Fourier e controllare il risultato ottenuto studiando la funzione $F(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)^2 dx$ in termini del parametro non-negativo t.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo la successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho[n(t-x)]\, n\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}}\, dt,$$

dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, è pari e tale che $0 \le \rho(s)$, $\rho(s) = 0$ se $|s| > 1$ e $\int_{\mathbb{R}} \rho(s)\, ds = 1$. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $M \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f_n^{(k)}(x)| \le C_M |x|^{-M} \quad \text{per } |x| \to +\infty.$$

Dimostrare poi che se F è una funzione "regolare" allora

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)F(x)\, dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)F(x)\, dx.$$

3. Risolvere nel rettangolo $Q = \{(x,y):\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ il problema misto

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x) & \text{in } 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = 0,\ u_x(a,y) = 0 & \text{in } 0 \le y \le b, \end{cases}$$

dove $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = g'(a) = 0$.

4. Studiare il problema non omogeneo per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

In particolare, fissato il parametro $s \in \mathbb{R}$ definiamo $v(t,x,s)$ come soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x;s) - \Delta v(t,x;s) = 0 & \text{in } (s,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v(t,x;s) = 0 & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n, \\ v_t(t,x;s) = f(s,x) & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Mostrare allora che la soluzione u è data

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x;s)\, ds.$$

Applicarlo poi al caso uni-dimensionale, scrivendo la soluzione in forma esplicita usando la formula di D'Alembert.

5. Siano p e $\mathcal{P}$ due polinomi in una variabile reale. Mostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti

   i) $\mathcal{P}(x) = p(x) - p^{(2)}(x) + p^{(4)}(x) - p^{(6)}(x) + \dots \qquad \forall\, x \in \mathbb{R};$

   ii) $p(x) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}''(x);$

   dove $p^{(k)}(x) = \frac{d^k p(x)}{dx^k}$.

   Siano p e $\mathcal{P}$ come sopra. Mostrare poi che

$$\int p(x)\sin(x)\,dx = \mathcal{P}'(x)\sin(x) - \mathcal{P}(x)\cos(x) + C.$$