Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

18 settembre 2015

1. Consideriamo la funzione di due variabili $u(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2})^\alpha$ e sia $B(0,1) = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

   (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u \in L^2(B(0,1))$;

   (b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u, \nabla u \in L^2(B(0,1))$

   (c) Usando la diseguaglianza $\|v\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2}$ valida per tutti i $p < +\infty$ e per le funzioni regolari e nulle su $\partial B(0,1)$ dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta valida la diseguaglianza: esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che
   $$\left| \int_B u\, v\, dx \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^2(B(0,1))}$$
   per ogni funzione v regolare e nulla su $\partial B(0,1)$.

   Soluzione. a) Calcoliamo esplicitamente l'integrale e otteniamo, passando a coordinate polari,
   $$\|u\|^2_{L^2} = \int_B (x^2+y^2)^\alpha\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^{2\alpha+1}\, d\rho,$$
   che converge se e solo se $2\alpha + 1 > -1$, cioè $\alpha > -1$.

   b) Per il gradiente otteniamo nello stesso modo (il procedimento è solo formale se $\alpha < 0$, ma i passaggi possono essere giustificato usando le derivate distribuzionali)
   $$\|\nabla u\|^2_{L^2} = \alpha^2 \int_B (x^2+y^2)^{\alpha-1}\, dxdy = \alpha^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^{2\alpha-1}\, d\rho,$$
   che converge se e solo se $2\alpha - 1 > -1$, cioè $\alpha > 0$, oppure se $\alpha = 0$.

   c) Usando la diseguaglianza di Hölder si ha
   $$\left| \int_B u\, v\, dx \right| \leq \|u\|_{L^q} \|v\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^q} \|\nabla v\|_{L^2(B(0,1))}$$
   con $q > 1$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quindi è necessario che $u \in L^q(B(0,1))$ e ancora con calcoli espliciti
   $$\|u\|^q_{L^q} = \int_B (x^2+y^2)^{\frac{\alpha q}{2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^{q\alpha+1}\, d\rho,$$
   e $q\alpha + 1 > -1$ è verificata per qualche $q > 1$ se $\alpha > -2$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica misurabile e $f \in L^1(0, 2\pi)$ tale che $f \geq 0$ q.o. Dimostrare che
   $$|a_n| \leq a_0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
   Usando come f il nucleo di Fejér $\sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$ studiare se la stima è precisa.

   Soluzione. Dalla definizione dei coefficienti di Fourier abbiamo
   $$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \big[1 \pm \cos(nx)\big] f(x)\, dx = a_0 \pm a_n,$$

e dato che l'integrale è non-negativo, si ha immediatamente la tesi. Osserviamo che, a meno che $f = 0$ (e quindi $a_k = 0$ per tutti i k), l'uguaglianza non può valere, come segue da considerazioni sul segno del prodotto e dal fatto che il coseno è sempre non maggiore in valore assoluto a 1.

Usando però come $f \geq 0$ il nucleo di Fejér, si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N}(1-\frac{|k|}{N+1})\mathrm{e}^{ikx}\,dx = 2$$

con calcoli espliciti, se $N \geq n$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cdot\sum_{k=-N}^{N}(1-\frac{|k|}{N+1})\mathrm{e}^{ikx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}}{2}\cdot\sum_{k=-N}^{N}(1-\frac{|k|}{N+1})\mathrm{e}^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{inx}(1-\frac{n}{N+1})\mathrm{e}^{-inx}\,dx = 2\,\frac{N+1-n}{N+1},$$

che può essere reso arbitrariamente vicino a 2 scegliendo $N \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande.

3. Sia $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione regolare e a supporto compatto. Sia assegnato $\vec{f} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$ e sia $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$. Determinare $\vec{u}$ in termini di $\vec{f}$

   Sugg. Applicare ancora il rotore

   Soluzione. Calcolando il rotore del rotore otteniamo

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{u}) = -\Delta\vec{u} + \nabla\mathrm{div}\,\vec{u}$$

   e essendo $\vec{u}$ a divergenza nulla otteniamo il problema di Poisson

$$-\Delta\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{f},$$

   quindi

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{rot}\,\vec{f}(x-y)}{|y|}\,dy.$$

   Cambiando variabile e integrando per parti si ottiene

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{rot}\,\vec{f}(y)}{|x-y|}\,dy = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}(y)\times\frac{x-y}{|x-y|^3}\,dy.$$

4. Sia p un polinomio di grado m in due variabili e sia

$$P(x) = \int_S f(z)\frac{1-|x|^2}{|x-z|^2}\,d\sigma(z)$$

   la soluzione del problema di Poisson nella palla unitaria

$$\begin{cases} \Delta P = 0 & x \in B(0,1) \\ P = p & x \in S := \partial B(0,1) \end{cases}$$

   Dimostrare che P si scrive come

$$P = (1-|x|^2)q + p$$

   con q polinomio di grado minore o uguale a $m-2$.

Sugg.: Considerare prima i casi $m = 0, 1$ e poi ricordare the lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a m ha dimensione finita e l'operatore di Laplace è lineare

Soluzione. Osserviamo che se $m = 0, 1$ allora p è automaticamente armonico e quindi la formula vale con $q = 0$. Se invece $m \geq 2$ osserviamo intanto che $(1 - |x|)^2 q$ è un polinomio di grado m che sia annulla su S, quindi P soddisfa la condizione corretta al bordo. Per verificare la formula, basta scegliere quindi q in modo che P sia armonico è cioè serve che

$$\Delta(1 - |x|^2)q = -\Delta p.$$

Se chiamiamo V lo spazio a dimensione finita dei polinomi di grado minore o uguale a $m-2$ la mappa $Lq := \Delta(1 - |x|^2)q$ è ovviamente lineare e dal calcolo esplicito

$$\Delta(1 - |x|^2)q = -2q - 4(x_1, x_2) \cdot (\partial_1 q, \partial_2 q) + (1 - |x|^2)\Delta q$$

risulta un polinomio di grado minore o uguale $m - 2$. Pertanto $L : V \mapsto V$.

Dobbiamo quindi trovare q in modo tale che $Lq = -\Delta p$ per ogni polinomio p di grado minore o uguale a m. Possiamo far vedere che L è surgettiva, mostrando che è iniettiva, dato che siamo in uno spazio a dimensione finita. Osserviamo quindi che se $Lq = 0$, questo vuol dire che la funzione polinomiale (e quindi continua) $(1 - |x|^2)q$ è sia armonica, sia nulla su S. Quindi $(1-|x|^2)q$ è necessariamente nulla in tutta la palla $B(0, 1)$, da cui $q = 0$ e l'iniettività.

5. Trovare la soluzione, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, del problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) + a^2 u(t,x) = 0 & x \in]0,\pi[, \ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \leq t, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in]0,\pi[, \\ u_t(0,x) = u_1(x) & x \in]0,\pi[\end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Per soddisfare le condizioni al contorno cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin(kx),$$

e sostituendo nell'equazione troviamo le equazioni ordinarie

$$c_k'' + (k^2 + a^2)c_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

che hanno come integrale generale

$$c_k(t) = A_k \sin(\sqrt{k^2 + a^2}\ t) + B_k \cos(\sqrt{k^2 + a^2}\ t).$$

Pertanto se $u_0(x)$ e $u_1(x)$ hanno sviluppo in seni

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx) \qquad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$$

dobbiamo risolvere la famiglia di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} c_k'' + (k^2 + a^2)c_k = 0 \\ c_k(0) = \alpha_k \\ c_k'(0) = \alpha_k \end{cases}$$

Da cui si ottiene

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_k}{\sqrt{k^2 + a^2}} \sin(\sqrt{k^2 + a^2}\ t) + \alpha_k \cos(\sqrt{k^2 + a^2}\ t) \right] \sin(kx).$$