

Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi in più variabili 2

18 dicembre 2014

Cenni alla risoluzione

1. Sia $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e periodica di periodo 2π . Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(2\pi k \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Soluzione. Data $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, definiamo $\Phi_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(2\pi k \gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ e osserviamo che

$$\Phi_n(1) = n^{-1} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \equiv 0.$$

Sia poi $f_m(t) = e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} |\Phi_n(f_m)| &= \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k m \gamma} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} dt \right| = \left| n^{-1} e^{2\pi i m \gamma t} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k m \gamma} - 0 \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| e^{2\pi i m \gamma} \frac{e^{2\pi i m n \gamma} - 1}{e^{2\pi i m \gamma} - 1} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|e^{2\pi i m \gamma} - 1|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

osservando che il denominatore non si annulla mai dato che γ è irrazionale.

Per linearità, per ogni $N \in \mathbb{N}$, si ha che $\Phi_n(\sum_{k=-N}^N a_m e^{imt}) \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$.

Se poi f, g sono funzioni continue e 2π -periodiche tali che $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)| < \epsilon$ si ha

$$|\Phi_n(f) - \Phi_n(g)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(2\pi k \gamma) - g(2\pi k \gamma)| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| dt < 2\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fissato $\epsilon > 0$, per il teorema di Weierstrass possiamo trovare un polinomio trigonometrico $P(t)$ tale che

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - P(t)| < \frac{\epsilon}{3}$$

e quindi $|\Phi_n(f) - \Phi_n(P)| = |\Phi_n(f - P)| < 2\epsilon/3$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Esiste poi $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\Phi_n(P)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n > N_0$$

e quindi

$$|\Phi_n(f)| \leq |\Phi_n(P)| + |\Phi_n(f - P)| < \epsilon \quad \forall n > N_0.$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e definiamo

$$\phi(t) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j), \quad t \in]-\pi, \pi[.$$

Mostrare che è periodica di periodo 2π , definita quasi ovunque su tutto $\mathbb{R}$ e che $\phi \in L^1(-\pi, \pi)$. Calcolare $\hat{\phi}_n$, il coefficiente di Fourier (complesso) associato alla funzione ϕ in termini di $\mathcal{F}(f)(\xi)$, la trasformata di Fourier di f . Supponendo che f sia continua e

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

calcolare $\phi(0)$ tramite il suo sviluppo in serie di Fourier, esprimendo il risultato in termini di $\mathcal{F}(f)$.

Soluzione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)| dt &\leq 2\pi \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j) dt \right| \leq 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j) \right| dt \\ &\leq 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(t + 2\pi j)| dt \leq 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t + 2\pi j)| dt, \end{aligned}$$

per i teoremi di convergenza monotona (i passaggi possono essere giustificati sulle somme parziali e poi passando al limite). Cambiando variabile $t + 2\pi j = s$ in ciascuno degli integrali si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)| dt \leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty,$$

quindi la funzione ϕ risulta finita quasi ovunque e inoltre questo dimostra anche che la serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j)$ è assolutamente convergente q.o. $t \in \mathbb{R}$, mentre la periodicità di ϕ deriva dall'osservazione che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e per q.o. $t \in [-\pi, \pi]$

$$\phi(t + 2\pi k) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi k + 2\pi j) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi(k + j)) = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi m) = \phi(t).$$

Con calcoli espliciti (e cambiando variabile di nuovo in ciascuno degli integrali) si ottiene che

$$\hat{\phi}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j) e^{-int} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt := \mathcal{F}(f)(n).$$

Pertanto, se scriviamo la serie di Fourier di ϕ otteniamo

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_n e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n) e^{int}$$

e dall'ipotesi sul decadimento della trasformata $\mathcal{F}(f)(\xi)$ la serie converge totalmente e quindi converge in $t = 0$

$$\phi(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n).$$

Dall'ipotesi di decadimento anche della f otteniamo la convergenza puntuale anche della serie $2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j)$ e quindi valutandola in zero otteniamo quella che è chiamata la *formula di somma di Poisson*

$$2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(2\pi j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)$$

che lega la restrizione della f ai multipli interi di 2π e la sua trasformata ristretta agli interi.

3. Risolvere (con trasformata di Fourier parziale rispetto a x) il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Mostrare poi che la soluzione $u(x, y)$ ha gradiente in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ se è soddisfatta la condizione

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi| |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Inoltre se $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (non necessariamente in $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$) allora la soluzione u è classica e $u(x_0, y) \rightarrow g(x_0)$ quando $y \rightarrow 0^+$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Definiamo

$$\widehat{u}(\xi, y) := \int_{\mathbb{R}} u(x, y) e^{-ix\xi} dx$$

si ha quindi $\widehat{u_{xx}}(\xi, y) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi, y)$ e pertanto $\widehat{u}$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \widehat{u_{yy}}(\xi, y) - \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) = 0 & y \in \mathbb{R}^+, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti (in y , con $\xi \in \mathbb{R}$ parametro) è

$$\widehat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-|\xi|y}$$

ma cercare soluzioni con trasformata di Fourier in L^1 oppure L^2 impone $c_1(\xi) \equiv 0$ e quindi imponendo la condizione a $\{y = 0\}$ si ottiene

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{g}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Osserviamo ora che $\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y})$ (l'antitrasformata di Fourier rispetto a ξ) vale

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

che è il nucleo di Poisson nel semipiano. Dall'ultima formula possiamo ottenere con i teoremi sulla convoluzione

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\xi)) *_x \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) = g(x) *_x \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Abbiamo pertanto la formula di rappresentazione

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{s^2 + y^2} g(x - s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - s)^2 + y^2} g(s) ds.$$

Per il teorema di Plancherel la norma $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^+)$ di u_x è equivalente alla norma $L^2(\mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_y^+)$ della funzione $i\xi \widehat{u}(\xi, y)$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi, y)| dy d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi, y)| dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 e^{-2|\xi|y} dy d\xi = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \end{aligned}$$

L'integrale di $|\widehat{u}_y|^2$ si maggiora in modo analogo.

La soluzione risulta classica, dato che il nucleo di Poisson è regolare e armonico in $\{y > 0\}$. Inoltre, dato che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = 1$$

si ha

$$u(x_0, y) - g(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} (g(s) - g(x_0)) ds.$$

Pertanto, sia $(x_0, y) \rightarrow (x_0, 0)$ e fissato $\epsilon > 0$, esiste $\lambda > 0$ tale che si ha $|g(s) - g(x_0)| < \epsilon/2$ se $|s - x_0| < \lambda$. Scriviamo

$$\begin{aligned} |u(x_0, y) - g(x_0)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|s-x_0| < \lambda} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} |g(s) - g(x_0)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|s-x_0| \geq \lambda} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} |g(s) - g(x_0)| ds. \end{aligned}$$

Il primo integrale si stima (ricordando che $y > 0$) come

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{|s-x_0| < \lambda} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} |g(s) - g(x_0)| ds &< \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_{|s-x_0| < \lambda} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} ds \\ &< \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Il secondo integrale si stima come

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{|s-x_0| \geq \lambda} \frac{y}{(x_0-s)^2 + y^2} |g(s) - g(x_0)| ds &\leq \frac{2y \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi} \int_{|s-x_0| \geq \lambda} \frac{1}{(x_0-s)^2 + y^2} ds \\ &\leq \frac{2y \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi} \int_{|z| \geq \lambda} \frac{1}{z^2 + y^2} dz < \frac{2y \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi} \int_{|z| \geq \lambda} \frac{1}{z^2} dz \\ &= \frac{4y \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz = \frac{4y \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi \lambda}. \end{aligned}$$

Quindi definendo $\delta := \frac{\epsilon \lambda \pi}{8 \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$ si ha

$$|u(x_0, y) - g(x_0)| < \epsilon \quad \forall y \in]0, \delta[.$$

4. Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty([0, +\infty[) \cap L^1(0, +\infty)$. La funzione definita con prolungamento pari (riflessione del grafico rispetto alla retta $\{x = 0\}$) risulta continua, ma non derivabile in $x = 0$, a meno che $f'_+(0) = 0$.

Sia quindi definita la funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \geq 0, \\ \alpha_1 f(-x) + \alpha_2 f(-x/2) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Scegliere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $F \in C^1(\mathbb{R})$. Dare una stima per la velocità con cui $\widehat{F}(\xi)$ tende a zero per $|\xi| \rightarrow +\infty$.

È possibile in analogia definire una funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $F|_{x \geq 0} = f(x)$ e $F \in C^k(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$ assegnato?

Soluzione. La funzione F risulta ovviamente regolare in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi l'unica cosa da imporre è che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \quad \left(= \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = F'(0) \quad \left(= \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) \right)$$

e si ha quindi il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 &= 1 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 4$. La funzione F risulta quindi di classe $C^1(\mathbb{R})$, se chiediamo inoltre che $f' \in L^1([0, +\infty[)$, si ha che $F' \in L^1(\mathbb{R})$ e pertanto

$$\widehat{F'}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}).$$

Ma osservando che quindi esiste $|\widehat{F'}(\xi)| = |\xi| |\widehat{F}(\xi)| \leq C$, si ha

$$\widehat{F}(\xi) = o(|\xi|^{-1}).$$

Il processo può essere generalizzato per ottenere una estensione di classe C^k nel seguente modo, usando $k+1$ termini

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j f(x/j) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Imponendo che F sia derivabile k volte in $x = 0$ (l'unico punto dove non è automatico) si ottiene il sistema lineare di $k+1$ equazioni in $k+1$ incognite

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} &= 1 \\ -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 + \dots - \frac{1}{k+1}\alpha_{k+1} &= 1 \\ &\vdots = 1 \\ (-1)^{m+1}\alpha_1 + \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}}\alpha_2 + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{(k+1)^{m+1}}\alpha_{k+1} &= 1 \\ &\vdots = 1 \\ (-1)^{k+1}\alpha_1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\alpha_2 + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\alpha_{k+1} &= 1 \end{cases}$$

e pertanto la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m+1} & \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} & \dots & \frac{(-1)^{m+1}}{(k+1)^{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k+1} & \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} & \dots & \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \end{pmatrix}$$

risulta una matrice di Vandermonde con determinante non nullo. Il sistema associato è sempre risolubile e quindi, se chiediamo che anche $f^{(m)}(x) \in L^1(0, +\infty)$, per ogni $m \leq k$ si ha

$$\widehat{F}(\xi) = o(|\xi|^{-k}).$$

5. Determinare il momento di inerzia rispetto alla retta generata da e_3 della (porzione di) superficie regolare parametrica (con densità di massa costante e unitaria)

$$\phi : T \rightarrow (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^3$$

con $T := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Soluzione. Con calcoli espliciti si ricava che l'elemento di area vale

$$dS = \sqrt{W_\phi} \, dudv = \sqrt{E_\phi G_\phi - F_\phi^2} \, dudv = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2) \, dudv.$$

L'integrale in questione diventa pertanto

$$\int_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} (u^2 + v^2)^2 4\sqrt{2}(u^2 + v^2) \, dudv$$

e passando alle coordinate polari

$$\int_{\phi} (x_1^2 + x_2^2) \, dS = 4\sqrt{2} 2\pi \int_0^1 \rho^6 \rho \, d\rho = \sqrt{2}\pi$$