

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

19 gennaio 2015

Cenni alla risoluzione

1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Per $m \in \mathbb{N}$ definiamo

$$f_{(m)}(t) = f(mt).$$

Calcolare i coefficienti di Fourier complessi

$$\widehat{f_{(m)}}(k),$$

in termini dei coefficienti di Fourier $\widehat{f}(k)$ della funzione $f(t)$.

Soluzione. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora possiamo scrivere $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ e quindi

$$f_{(m)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inmt} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, ponendo $nm = k$,

$$f_{(m)}(t) = \sum_{k \equiv 0 \pmod{m}} c_{k/m} e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi il coefficiente k -esimo di $f_{(m)}$ risulta

$$\widehat{f_{(m)}}(k) = \begin{cases} \widehat{f}\left(\frac{k}{m}\right) & \text{se } m \text{ divide } k, \\ 0 & \text{se } m \text{ non divide } k. \end{cases}$$

Rendiamo ora il conto rigoroso per f solo sommabile, calcolando esplicitamente i coefficienti cercati (senza usare quindi alcun risultato di convergenza della serie). Dalla definizione si ha

$$\widehat{f_{(m)}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(mx) e^{-ikx} dx.$$

Effettuando dei cambi di variabile e usando la periodicità di f si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(mx) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi m} f(y) e^{-i\frac{k}{m}y} dy = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} f(y) e^{-i\frac{k}{m}y} dy \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} f(y - 2\pi j) e^{-i\frac{k}{m}y} dy \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-i\frac{k}{m}z} e^{-i2\pi\frac{kj}{m}} dz \\
 &= \int_0^{2\pi} f(z) e^{-i\frac{k}{m}z} dz \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i2\pi\frac{kj}{m}}.
 \end{aligned}$$

Ora il termine

$$I := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i2\pi\frac{kj}{m}} = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} 1 = 1 & \text{se } k \text{ divide } m, \\ \frac{1}{m} \frac{1 - e^{-i2\pi k}}{1 - e^{-i2\pi k/m}} = 0 & \text{se } k \text{ non divide } m, \end{cases}$$

quindi $\int_0^{2\pi} f(z) e^{-i\frac{k}{m}z} dz = 2\pi \hat{f}(k/m)$, se $k/m \in \mathbb{Z}$, zero altrimenti. Si ritrova lo stesso risultato ottenuto formalmente all'inizio.

2. Sia $Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ e sia $H = L^2(Q)$. Consideriamo

$$V := \{u \in H : u(x, y) = v(x) \text{ q.o., con } v \in L^2(-\pi, \pi)\}$$

Verificare che V è un sottospazio chiuso di H e determinare $V^\perp$ tale che $H = V \oplus V^\perp$. Chiamato P_V il proiettore su V , calcolare

$$P_V(xy).$$

Soluzione. Verifichiamo che V è un sottospazio chiuso (che sia un sottospazio lineare è ovvio). Sia $\{u_n(x, y)\} = \{v_n(x)\} \subset V$ e tale che $u_n \rightarrow u(x, y)$ in $L^2(Q)$. Allora

$$\int_Q |u_n(x, y) - u_m(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |v_n(x) - v_m(x)|^2 dx dy = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |v_n(x) - v_m(x)|^2 dx.$$

Pertanto, dato che $\{u_n(x, y)\}$ è per ipotesi di Cauchy in $L^2(Q)$, anche $\{v_n(x)\}$ lo è in $L^2(-\pi, \pi)$ e quindi converge (a meno di un insieme di misura nulla) verso $v(x) \in L^2(-\pi, \pi)$.

Dato che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v_n(x) - v(x)|^2 dx = 2\pi \int_Q |v_n(x) - v(x)|^2 dx dy,$$

necessariamente $v(x) = u(x, y)$ q.o. e quindi abbiamo la chiusura di V .

Il complemento ortogonale $V^\perp$ è dato dalle funzioni $f(x, y) \in H$ tali che, per ogni $v \in L^2(-\pi, \pi)$

$$0 = \langle f(x, y), v(x) \rangle = \int_Q f(x, y) v(x) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy \right) v(x) dx.$$

Pertanto se vogliamo sia verificata l'uguaglianza per ogni $v \in L^2(-\pi, \pi)$ ricaviamo che

$$V^\perp = \left\{ f \in H : \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy = 0, \text{ q.o. } x \in (-\pi, \pi) \right\}.$$

Ogni funzione $f \in H$ può essere scritta come

$$f(x, y) = \left[f(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy = P_{V^\perp} f + P_V f,$$

osservando che non basta togliere l'integrale rispetto a y , ma bisogna prendere il valor medio per avere $(P_V)_{|V} = Id$ e in particolare nel nostro caso $P_V(xy) = 0$.

3. Determinare l'espressione dei polinomi armonici omogenei di grado n nella variabile $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Calcolare poi il polinomio (giustificare se ne esiste uno solo) armonico omogeneo u di grado 3 con coefficienti unitari per x_1^3 e x_2^3 .

Dimostrare poi che se u è un polinomio armonico omogeneo di grado 2 e M è una matrice reale 2×2 ortogonale, allora $v(\mathbf{x}) := u(M\mathbf{x})$ è ancora una funzione armonica. La proprietà è vera anche per una funzione armonica u più generale di un polinomio?

Soluzione. Determiniamo il generico polinomio omogeneo di grado n della forma

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} y^k.$$

Derivando e uguagliando si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x, y) &= \sum_{k=0}^{n-2} c_k (n-k)(n-k-1) x^{n-k-2} y^k + \sum_{k=2}^n c_k k(k-1) x^{n-k} y^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} [c_k (n-k)(n-k-1) + c_{k+2} (k+2)(k+1)] x^{n-k-2} y^k. \end{aligned}$$

La condizione da verificare risulta pertanto $c_k (n-k)(n-k-1) + c_{k+2} (k+2)(k+1) = 0$, da cui

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+2)(k+1)} c_k.$$

Si ha quindi una formula di ricorrenza per i termini pari e per quelli dispari. Cominciando da quelli pari, si ha per $k = 0$

$$c_2 = -\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} c_0 = -\binom{n}{2} c_0,$$

mentre per $k = 2$

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} c_0 = \binom{n}{4} c_0,$$

e poi si vede facilmente per induzione che

$$c_{2h} = (-1)^h \binom{n}{2h} c_0.$$

Allo stesso modo per i dispari si ottiene per induzione

$$c_{2h+1} = (-1)^h \binom{n}{2h+1} \frac{c_1}{n}.$$

Il polinomio richiesto è quindi

$$P_3(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 + x_2^3.$$

Sia ora $M = m_{ij}$ ortogonale cioè $MM^T = I$, o in componenti (con sommatoria sugli indici ripetuti)

$$m_{il}m_{jl} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2.$$

Il polinomio armonico omogeneo di grado 2 più generale si scrive come $P_2(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 - \alpha x_2^2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pertanto $v(\mathbf{x}) = P_2(M\mathbf{x})$ risulta

$$v(\mathbf{x}) = \alpha(m_{1,j})^2 + \beta(m_{1l}x_l)(m_{2k}x_k) - \alpha(m_{2j}x_j)^2.$$

Derivando esplicitamente risulta

$$\Delta v(\mathbf{x}) = 2\alpha(m_{11}^2 - m_{21}^2 + m_{12}^2 - m_{22}^2) + 2\beta(m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22})$$

e ora dato che M è ortogonale $m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22} = m_{1l}m_{2l} = \delta_{12} = 0$, mentre $m_{11}^2 - m_{21}^2 + m_{12}^2 - m_{22}^2 = m_{1l}m_{1l} - m_{2l}m_{2l} = 1 - 1 = 0$, quindi v risulta armonica.

La proprietà risulta poi vera per ogni funzione armonica (e non necessariamente di due variabili) anche tramite una dimostrazione più generale. Se u è armonica e quindi continua, la funzione v risulta ancora continua e quindi basta verificare che la proprietà della media risulta soddisfatta da v .

Per ogni $r > 0$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(M\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Dato che la matrice M è ortogonale $|\det(M)| = 1$ e quindi con cambio di variabile $\mathbf{z} = M\mathbf{y}$ si ottiene (osserviamo che se $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ allora $M\mathbf{y} \in B(M\mathbf{x}, r)$, dato che M preserva le lunghezze)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(M\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{|B(M\mathbf{x}, r)|} \int_{B(M\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = u(M\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà di media sulle palle della funzione armonica u e il fatto che $|B(M\mathbf{x}, r)| = |B(\mathbf{x}, r)|$, dato che M è ortogonale.

4. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}^+$, il flusso nella direzione positiva dell'asse z del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x, y^2, z)$ attraverso la parte $\mathcal{S}$ nel primo ottante della superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq y \leq b$.

Soluzione. La superficie $\mathcal{S}$ e i piani $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{y = b\}$ e $\{z = 0\}$ determinano una superficie chiusa $S = \mathcal{S} + \sum_{i=1}^4 \mathcal{S}_i$ (un quarto di cilindro retto a base circolare di raggio a e di altezza b , con l'asse coincidente con l'asse y) che racchiude il volume finito D .

Orientando la normale nella direzione uscente su tutte le superfici possiamo calcolare il flusso tramite il teorema della divergenza

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Sulla superficie S_1 che sta nel piano $\{x = 0\}$ il versore normale è $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ e pertanto $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{S_1} = -x = 0$, quindi

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Analogamente, sulla superficie S_2 che sta nel piano $\{y = 0\}$ il versore normale è $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ e pertanto $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{S_2} = -y^2 = 0$, quindi $\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ e sulla superficie S_4 che sta nel piano $\{z = 0\}$ il versore normale è $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e pertanto $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{S_4} = -z = 0$, quindi $\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. Gli unici integrali di superficie rimangono sono su S e S_3 dove $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ e pertanto $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{S_3} = y^2 = b^2$. Dato che S_4 è un quarto di cerchio di raggio a si ottiene

$$\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\pi a^2 b^2}{4}.$$

Dunque

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz - \frac{\pi a^2 b^2}{4}.$$

Calcoliamo ora l'integrale di volume: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2 + 2y$:

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \int_0^a \int_0^b \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2 + 2y) dz \right) dy dx = \frac{\pi a^2 b}{2} + \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

e quindi il flusso richiesto risulta

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

5. Risolvere, con il metodo della separazione delle variabili, il problema misto (Robin-Neumann)

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & x \in]0, \pi[, t > 0, \\ u(0, x) = g(x) & x \in]0, \pi[, \\ u_x(t, 0) = 0 & t > 0, \\ u_x(t, \pi) + u(t, \pi) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

con g regolare e periodica di periodo π .

Calcolare poi, se possibile, il limite per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione.

Soluzione. Cerchiamo soluzioni del tipo $u(t, x) = v(x)w(t)$ e arriviamo a dover risolvere

$$w'(t) = \lambda w(t) \quad \text{e} \quad \begin{cases} v''(x) - \lambda v(x) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v'(\pi) + v(\pi) = 0 \end{cases}$$

Scartiamo $\lambda > 0$ perchè troveremmo soluzioni non fisiche (in realtà si dimostra facilmente che il problema al contorno per la v non ha soluzioni in questo caso). Se $\lambda = 0$ allora

$$v(x) = c_1 + c_2 x$$

e le condizioni al contorno implicano immediatamente $c_1 = c_2 = 0$.

Nel caso $\lambda < 0$ scriviamo $\lambda = -\mu^2$ e quindi l'equazione $v''(x) + \mu^2 v(x) = 0$ ha come soluzione $v(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$. Imponendo le condizioni al contorno si ha che $v'(0) = 0$ implica $c_2 = 0$, mentre $v'(\pi) + v(\pi) = 0$ implica $-c_1 \mu \sin(\mu \pi) + c_1 \cos(\mu \pi) = 0$. Quindi, per ogni $c_1 \in \mathbb{R}$, la condizione da soddisfare per avere soluzioni del problema al contorno per v è

$$\tan(\mu \pi) = \frac{1}{\mu}$$

che ammette una e una sola soluzione μ_n in ogni intervallo che va da $n - 1/2$ a $n + 1/2$ (in particolare $n < \mu_n < n + 1/2$) e inoltre

$$\mu_n \sim n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Troviamo quindi la successione di (auto)valori $\lambda_n = -\mu_n^2$ e le corrispondenti (auto)funzioni

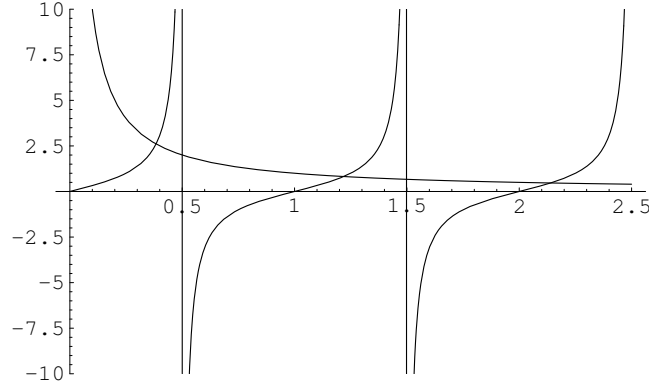


Figura 1: Grafico di $\tan(\mu\pi)$ e $\frac{1}{\mu}$ per $0 < \mu < 3/2$

$\cos(\mu_n x)$. La soluzione risulta quindi essere

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-\mu_n^2 t} \cos(\mu_n x).$$

La condizione iniziale impone

$$u(0, x) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(\mu_n x).$$

Osserviamo che, con una integrazione per parti si ha, se $\alpha \neq \beta$,

$$\int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha \cos(\pi\beta) \sin(\pi\alpha) - \beta \cos(\pi\alpha) \sin(\pi\beta)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

e quindi

$$\int_0^\pi \cos(\mu_n x) \cos(\mu_m x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2\pi\mu_n)}{4\mu_n} = \beta_n \neq 0 & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Pertanto $\{\cos(\mu_n x)\}_n$ risulta un sistema ortogonale e se g è regolare scriviamo

$$g_n := \frac{1}{\beta_n} \int_0^\pi g(x) \cos(\mu_n x) dx$$

trovando così la soluzione

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n e^{-\mu_n^2 t} \cos(\mu_n x).$$

Dato che $\mu_n \sim n$, allora necessariamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(\mu_n \pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\mu_n \pi) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{\pi}{2},$$

e in particolare

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2\pi\mu_n)}{4\mu_n} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4\mu_1} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 1$$

e quindi chiamato $M = \max_x |g(x)|$

$$|g_n| \leq \frac{1}{\beta_n} \int_0^\pi |g(x)| dx \leq \pi \max_x |g(x)| = M\pi.$$

Da questo deriva che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n e^{-\mu_n^2} \cos(\mu_n x)$ è totalmente convergente e inoltre si verifica che $u(t, x) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, uniformemente in $[0, \pi]$.

Pisa, 23 gennaio 2015