Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

18 giugno 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione limitata e 2π-periodica. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} ⨍ f(x)g(nx)\,dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) = \left(⨍ f(x)\,dx\right)\left(⨍ g(x)\,dx\right) \tag{1}$$

Soluzione. Sia $\sigma_N[f](x) = \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\widehat{f}_k\, \mathrm{e}^{ikx}$ il polinomio approssimante di Fejér e fissato $\epsilon > 0$ si scelga $N \in \mathbb{N}$ in modo tale che

$$\|f - \sigma_N[f]\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{\|g\|_{L^\infty}}.$$

Scriviamo poi

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \Big(f(x) - \sigma_N[f](x) + \sigma_N[f](x)\Big)g(nx)\,dx,$$

e pertanto

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - \int_0^{2\pi} \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\widehat{f}_k\,\mathrm{e}^{ikx}g(nx)\,dx\right| \le \|g\|_{L^\infty}\int_0^{2\pi} |f - \sigma_N[f]|\,dx < \epsilon$$

Con un cambio di variabile si ottiene che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(nx)\mathrm{e}^{ikx}\,dx = \begin{cases} \widehat{g}_{-k/n} & \text{se } k/n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e pertanto, visto che $|k| \le N$, scegliendo $n > N$ si ha che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(nx)\mathrm{e}^{ikx}\,dx = \begin{cases} \widehat{g}_0 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } 1 \le |k| < n. \end{cases}$$

Si ha quindi, scambiando somma finita e integrale, se $n > N$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\widehat{f}_k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikx}g(nx)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - \sum_{|k|=0}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\widehat{f}_k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikx}g(nx)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - 2\pi\widehat{f}_0\widehat{g}_0\right| < \epsilon,$$

da cui la tesi, data la arbitrarietà di $\epsilon > 0$.

2. Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy = 1$ e siano

$$\alpha := \int_{-\infty}^{0} g(y)\, dy \qquad \text{e} \qquad \beta := \int_{0}^{+\infty} g(y)\, dy.$$

Sia f una funzione limitata e continua a tratti. Allora definendo per $\epsilon > 0$ la funzione $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$ si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (f * g_\epsilon)(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-),$$

dove $f(x^\pm) := \lim_{z \to x^\pm} f(z)$.

Soluzione. Scrivendo

$$f*g_\epsilon(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-) = \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x^+)] g_\epsilon(y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)] g_\epsilon(y)\, dy$$

è sufficiente mostrare che i due integrali si annullano quando $\epsilon \to 0$. Studiamo solo il secondo, il primo si tratta in maniera analoga. Visto che f ammette limite sia da destra che da sinistra in x, fissato $\lambda > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x-y) - f(x^-)| < \lambda \quad \text{per} \quad 0 < y < \delta.$$

Spezziamo l'integrale su $(0, +\infty)$ come quello su $(0, \delta)$ più quello su $(\delta, +\infty)$. Per quello con intervallo finito si ha

$$\left| \int_0^\delta [f(x-y) - f(x^-)] g_\epsilon(y) dy \right| \leq \lambda \int_0^\delta |g_\epsilon(y)|\, dy = \lambda \int_0^{\delta/\epsilon} |g(y)| dy \leq \lambda \int_0^{+\infty} |g(y)|\, dy,$$

e questo può essere reso arbitrariamente piccolo con una scelta opportuna di $\lambda > 0$.

Per l'integrale sulla semiretta usiamo che esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $|f| \leq M$ per scrivere

$$\left| \int_\delta^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)] g_\epsilon(y) dy \right| \leq 2M \int_\delta^{+\infty} |g_\epsilon(y)|\, dy = 2M \int_{\delta/\epsilon}^{+\infty} |g(y)|\, dy$$

e quest'ultimo integrale si annulla per $\epsilon \to 0$ dato che $g \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Verificare che la funzione reale $\|\,.\|_1$ definita per un polinomio di grado n a coefficienti e indeterminata complessa $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ tramite

$$\|P(z)\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

definisce una norma e verificare che dati $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ e $Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ allora

$$\|P(z)Q(z)\|_1 \leq \|P(z)\|_1 \, \|Q(z)\|_1.$$

Soluzione. Sia ha ovviamente che $\|P(z)\| \geq 0$, e se $\|P(z)\| = \sum_{k=0}^n |a_k| = 0$ allora $P(z) = 0$. Se P ha grado n e non è nullo allora $\|P(z)\| \geq |a_n| \neq 0$. Inoltre si ha che $\|\lambda P(z)\| = \sum_{k=0}^n \lambda |a_k| = \lambda \|P(z)\|$. Dati P, Q di grado n si ha che $P(z) + Q(z) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) z^k$ e quindi

$$\|P(z) + Q(z)\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| + |b_k| = \|P(z)\| + \|Q(z)\|.$$

Siano ora P e Q anche di grado diverso, per fissare le idee supponiamo $n > m$. Ponendo $b_k = 0$ per $m \le k \le n$, possiamo pensarli dello stesso grado e inoltre $P(z)Q(z) = \sum_{r=0}^{n} c_r z^r$ con $c_r = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}$. Si ha pertanto

$$\|P(z)Q(z)\| = \sum_{r=0}^{n} |c_r| = \sum_{r=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} \right| \le \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{r} |a_k b_{r-k}|$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{r} |a_k|\ |b_{r-k}| = \left(\sum_{k=0}^{r} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{r} |b_k| \right) = \|P(z)\|\, \|Q(z)\|.$$

4. Dimostrare che gli zeri di una funzione armonica $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, non sono mai isolati

   Verificare poi che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la proposizione è falsa construendo un controesempio. Trovare infatti la parte immaginaria di una funzione ϕ la cui parte reale è

   $$\Re(\phi) = (1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2,$$

   in modo che $\Delta\phi = 0$ e nell'origine ci sia uno zero isolato.

   Soluzione. Per semplicità scriviamo la formula della media in due dimensioni, ma il conto è del tutto analogo in ogni dimensione spaziale. Sia $x_0 \in \Omega$ tale che $f(x_0) = 0$ e pertanto

   $$0 = f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x_0,r)} f\, dS \qquad \forall\, 0 < r < d(x_0, \partial\Omega).$$

   Dato che l'integrale si annulla, e la funzione f è continua (essendo armonica), questo implica che deve esistere almeno un punto $x_r \in \partial B(x_0, r)$ tale che

   $$f(x_r) = 0.$$

   Infatti o f è identicamente nulla sulla sfera, o assumendo valori sia positivi che negativi deve annullarsi almeno una volta. Siccome questo è soddisfatto per tutti i numeri $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$, ne consegue che x_0 non può essere uno zero isolato.

   Dato che la parte reale di ϕ è armonica, basta scegliere come parte immaginaria una opportuna funzione lineare e quindi armonica. Per esempio

   $$\phi = (1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 + i x_1$$

   è armonica e si verifica che si annulla solo nell'origine.

5. Sia u soluzione del problema *ai valori finali*

   $$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & x \in]0,\pi[,\ 0 < t < T, \\ u(T,x) = g(x) & x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

   a Utlizzare il cambio di variabile $t = T - s$ per far diventare il problema uno ai valori iniziali;

   b Risolvere (almeno formalmente) con la separazione delle variabili il problema ai valori finali e cercare ipotesi sulla g in modo che la formula trovata sia una soluzione;

c Usare il dato finale $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ per mostrare che la dipendenza continua dai dati non vale.

Soluzione. a) Col cambio di variabile e definendo $v(s,x) = u(T-s,x)$ si ha $\partial_s v(s,x) = -\partial_t u(T-s,x)$ e $v(0,x) = u(T,x)$, quindi il problema diventa

$$\begin{cases} v_s(s,x) + v_{xx}(s,x) = 0 & x \in]0,\pi[,\ 0 < s < T, \\ v(0,x) = g(x) & x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(\pi,0) = 0 & 0 < s, \end{cases}$$

b) Cercando una soluzione del tipo $u(t,x) = T(t)X(x)$ si ottiene l'espressione "formale"

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k \mathrm{e}^{-k^2 t} \sin(kx)$$

e imponendo che $u(T,x) = g(x)$ si ha, sviluppando la g in serie di Fourier (di soli seni dato che si annulla per $x = 0$, $x = \pi$)

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}_k \sin(kx),$$

la seguente espressione

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}_k \mathrm{e}^{k^2(T-t)} \sin(kx).$$

osserviamo che $T - t > 0$ e quindi che l'esponenziale peggiora di molto le proprietà della g. Per avere convergenza una condizione sufficiente è che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{g}_k| \mathrm{e}^{k^2 T} < +\infty$$

e quindi i coefficienti di Fourier della g si devono annullare, per $k \to +\infty$, più rapidamente di qualsiasi potenza negativa di k.

c) Scegliendo come dato finale $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ si ha

$$u_n(t,x) = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{n^2(T-t)} \sin(nx)$$

e osserviamo che mentre $|g_n| \leq \frac{1}{n}$ uniformemente in x, se $n = 2N+1$, $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$|u_n(\pi/2, 0)| = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{n^2 T} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty.$$