Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

12 febbraio 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Dimostrare la seguente formula
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(t) - f(t - \frac{\pi}{n}) \Big] \, \mathrm{e}^{-int} \, dt \qquad 0 \neq n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
per il coefficiente di Fourier complesso n-esimo.

Usare la (1) per dimostrare il Lemma di Riemann-Lebesgue
$$\lim_{n \to \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$
Se oltre alle ipotesi precedenti assumiamo $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, con $0 < \alpha \leq 1$, possiamo dedurre un andamento più preciso per $n \to +\infty$?

Soluzione. Dalla definizione di coefficiente di Fourier complesso abbiamo, con un cambio di variabili,
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \, dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{e}^{-in\pi/n} \, dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi+\pi/n}^{\pi+\pi/n} f(s - \pi/n) \mathrm{e}^{-ins} \, ds.$$
Per periodicità l'integrale è uguale a quello su $]-\pi, \pi[$ e quindi
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2}\widehat{f}(n) + \frac{1}{2}\widehat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} - \frac{1}{2\pi} f(t - \pi/n) \mathrm{e}^{-int} \right] dt,$$
da cui la formula (1). Per dimostrare che il coefficiente di Fourier n-esimo è infinitesimo, osserviamo che se f periodica soddisfa $f \in L^p(-\pi, \pi)$, allora
$$\forall\, p \in [1, \infty[\qquad \lim_{\tau \to 0} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{L^p(-\pi,\pi)} = 0.$$
Per dimostrarlo fissiamo $\epsilon > 0$, e supponiamo $|\tau| < 1$. Allora, con i soliti argomenti di densità esiste una funzione $g \in C(\mathbb{R})$, con supporto in $[-5\pi, 5\pi]$ e tale che $\sup_{t \in [-3\pi, 3\pi]} |f(t) - g(t)| < \epsilon 4 (2\pi)^{-1/p}$. In particolare si ottiene con $g = \rho_\eta * (f \chi_{]-4\pi, 4\pi[})$ dove ρ_η è l'usuale mollificatore con $0 < \eta < \pi$. In questo modo possiamo scrivere tramite la diseguaglianza di Minkowski
$$\|f(t+\tau) - f(t)\|_{L^p} \leq \|f(t+\tau) - g(t+\tau)\|_{L^p} + \|g(t+\tau) - g(t)\|_{L^p} + \|g(t) - f(t)\|_{L^p},$$
dove le norme sono quelle di $L^p(-\pi, \pi)$. Si ha pertanto che
$$\|f(t+\tau) - g(t+\tau)\|_{L^p} + \|g(t) - f(t)\|_{L^p} < 2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon^p}{4^p 2\pi} \right]^{1/p} = \frac{\epsilon}{2}.$$
Data la uniforme continuità della g, esiste $\delta > 0$ tale che se $|\tau| < \delta$ allora $|g(t+\tau) - g(t)| \leq \epsilon 2 (2\pi)^{-1/p}$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, da cui
$$\|g(t+\tau) - g(t)\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{2} \qquad |\tau| < \delta.$$

Fissato $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che se $|n| > N$

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f(t) - f(t - \pi/n)\|_{L^1} \|\mathrm{e}^{-int}\|_{L^\infty} \leq \|f(t) - f(t - \pi/n)\|_{L^1} < \epsilon.$$

Nel caso Hölderiano esiste $C_\alpha \geq 0$ tale che $|f(t) - f(t - \pi/n)| \leq C_\alpha \left(\frac{\pi}{|n|}\right)^\alpha$ per $n \neq 0$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_\alpha \left(\frac{\pi}{|n|}\right)^\alpha dt = \frac{C_\alpha \pi^\alpha}{2} \frac{1}{|n|^\alpha}$$

da cui $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(|n|^{-\alpha})$.

2. Sia $H = L^2(0,1)$ e per $f \in H$ definiamo la funzione $\mathcal{T}[f](t) : (0,1) \to \mathbb{R}$ come segue:

$$\mathcal{T}[f](t) := \int_0^1 (2t + f(s))^2 \, ds.$$

Dimostrare che $\mathcal{T}[f](t) \in H$ e che $\mathcal{T}$ è un operatore continuo da H in H. $\mathcal{T}$ è lineare? Mostrare inoltre che se $\|f\|_H \leq M$ allora

$$\exists\, C > 0 : \qquad \|\mathcal{T}[f](t+h) - \mathcal{T}[f](t)\|_H^2 \leq Ch^2,$$

considerando $\mathcal{T}[f]$ come estesa a zero fuori da $(0,1)$.

Soluzione. Se $f \in H$ allora usando la diseguaglianza elementare $(a+b)^2 \leq 2a^2 + b^2$ abbiamo

$$|\mathcal{T}[f](t)| = \int_0^1 (2t + f(s))^2 \, ds \leq 2 \int_0^1 (4t^2 + f^2(s)) \, ds \leq 8t^2 + 2\|f\|_H^2, \qquad \forall\, t \in (0,1).$$

Pertanto $\|\mathcal{T}[f](t)\|_H^2$ risulta sicuramente finita e la possiamo stimare come

$$\|\mathcal{T}[f](t)\|_H^2 = \int_0^1 |\mathcal{T}[f](t)|^2 \, dt \leq \int_0^1 (8t^2 + 2\|f\|_H)^2 \, dt = \frac{128}{5} + 8\|f\|_H^4 < +\infty.$$

L'operatore $\mathcal{T}$ non è ovviamente lineare, dato che per esempio $\mathcal{T}[f](0) = 2t \not\equiv 0$. Verifichiamo la continuità dalla definizione. Siano $f, g \in H$, allora

$$\|\mathcal{T}[f] - \mathcal{T}[g]\|_H^2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 (2t + f(s))^2 - (2t + g(s))^2 \, ds\right]^2 dt$$

scomponendo differenza di quadrati in prodotto di somma e differenza

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (4t + f(s) + g(s))(f(s) - g(s)) \, ds\right]^2 dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |4t + f(s) + g(s)|^2 \, ds\right] \left[\int_0^1 |f(s) - g(s)|^2 \, ds\right]$$

$$\leq 2\|f - g\|_H^2 \int_0^1 (16t^2 + \|f + g\|_H^2) \, dt$$

$$\leq \left(\frac{32}{3} + 2\|f + g\|_H^2\right) \|f - g\|_H^2.$$

Calcoliamo la norma dell'incremento in maniera esplicita, per $|h| < 1$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}[f](t+h) - \mathcal{T}[f](t)\|_H^2 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (2t+2h+f(s))^2 - (2t+f(s))^2 \, ds \right]^2 dt \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 4h(2t+h+f(s)) \, ds \right]^2 dt \\
&\le 16h^2 \int_0^1 \int_0^1 (2t+1+f(s))^2 \, ds \, dt \\
&\le 16h^2 \left(\frac{26}{3} + 2\|f\|_H^2 \right).
\end{aligned}$$

3. Sia $u(\mathbf{x}) : W \to \mathbb{R}$ una funzione regolare definita nel settore angolare

$$W := \{(r,\theta) : \ r > 0 \text{ e } 0 < \theta < \theta_0, \text{ con } 0 < \theta_0 < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La funzione u è detta *omogenea* se esiste una funzione regolare $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(\alpha\mathbf{x}) = b(\alpha)u(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in W, \ \forall\, \alpha > 0.$$

Dimostrare che esiste una costante γ tale che, se u è omogenea, in coordinate polari

$$u(r,\theta) = r^\gamma \, S(\theta).$$

Calcolare poi le funzioni omogenee e armoniche su W, che si annullanno per $\theta = 0$ e per $\theta = \theta_0$.

Soluzione. Passando alle coordinate polari si ottiene

$$u(\alpha r, \theta) = b(\alpha)u(r,\theta)$$

e derivando rispetto ad α si ottiene $r\, u_r(\alpha r, \theta) = b'(\alpha)u(r,\theta)$, per cui ponendo $\alpha = 1$ si ha l'equazione differenziale ordinaria (nella variabile r) a variabili separabili

$$u_r(r,\theta) = \frac{b'(1)}{r} u(r,\theta),$$

la cui soluzione è

$$u(r,\theta) = u(1,\theta) r^{b'(1)}$$

e ponendo $\gamma := b'(1)$ e $S(\theta) = u(1,\theta)$ si ha la tesi.

Cercando funzioni armoniche e omogenee si, ha ricordando l'espressione del Laplaciano in coordinate polari,

$$0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = \left[\gamma^2 S(\theta) + S''(\theta) \right] r^{\gamma - 2}.$$

Dobbiamo pertanto da risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} S''(\theta) + \gamma^2 S(\theta) = 0 \qquad 0 < \theta < \theta_0, \\[2ex] \quad S(0) = S(\theta_0) = 0, \end{cases}$$

che ha soluziono non nulle se e solo se $\gamma = \pm n\pi/\theta_0$, con $n \in \mathbb{N}$. Le soluzioni richieste sono pertanto

$$u(r,\theta) = r^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0} \theta \right) \qquad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

a cui va aggiunta quella banale $u \equiv 0$.

4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera
$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$
e sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro
$$C := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}, \ z \ge 0\right\}.$$
La superficie $S \cap C$ è regolare? Calcolare la sua area.

Soluzione. Se $\mathcal{C}$ è il cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$ nel piano x-y allora il sostegno della superficie richiesta può essere parametrizzato tramite la superficie cartesiana $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$
$$\phi(t, u) = (t, u, \sqrt{1 - t^2 - u^2}) \qquad (t, u) \in \mathcal{C}.$$
Anche se $W_\phi > 0$, la superficie non risulta regolare dato che non è di classe C^1 in tutto $\mathcal{C}$, ma solo in $\mathcal{C}\backslash\{(1, 0)\}$. La sua area può essere calcolata tramite la formula
$$A(C) = \iint_{\mathcal{C}} \sqrt{W_\phi}\, dtdu,$$
dove l'integrale va inteso in senso di Riemann generalizzato.
Scrivendo esplicitamente l'elemento di area abbiamo
$$A(C) = \iint_{\mathcal{C}} \sqrt{W_\phi}\, dtdu = \iint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 - u^2}}\, dtdu = 2\iint_{\mathcal{C}^+} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 - u^2}}\, dtdu,$$
dove $\mathcal{C}^+$ è il semicerchio $\mathcal{C}^+ := \mathcal{C} \cap \{u \ge 0\}$.
Cambiando coordinate e passando alle polari $t = \rho\cos(\theta)$, $u = \rho\sin(\theta)$ il dominio di integrazione diventa
$$\mathcal{C}^* = \{(\rho, \theta) : \theta \in [0, \pi/2], \ \rho \in [0, \cos(\theta)]\}$$
e quindi
$$A(\mathcal{C}) = 2\iint_{\mathcal{C}^*} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\theta d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos(\theta)} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\rho$$
$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} - 1)\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(\theta))\, d\theta = \pi - 2.$$
Per calcolare l'integrale generalizzato più precisamente si sarebbe dovuto definire per $\epsilon > 0$
$$\mathcal{C}^*_\epsilon = \{(\rho, \theta) : \theta \in [\epsilon, \pi/2], \ \rho \in [0, \cos(\theta)]\}$$
e quindi
$$2\iint_{\mathcal{C}^*_\epsilon} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\theta d\rho = \pi - 2\epsilon - 2\cos(\epsilon) \to \pi - 2.$$

5. Risolvere, tramite l'uso delle soluzioni fondamentali, il problema al contorno nella semiretta
$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & x \in]0, +\infty[, \ t > 0, \\ u(0, x) = g(x) & x \in]0, +\infty[, \\ u(t, 0) = 0 & t > 0, \end{cases}$$
con g regolare.
Considerare poi il caso $g(x) = g_0 \in \mathbb{R}^+$ e calcolare in questo caso $u_x(t, 0)$.

Soluzione. Estendiamo la funzione g in maniera dispari

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0, \\ \\ g(0) = \lim_{x \to 0^+} g(x), \\ \\ -\, g(-x) & x < 0, \end{cases}$$

e la funzione estesa risulta continua solo se $g(0) = 0$.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \overline{u}_t(t,x) - \overline{u}_{xx}(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(0,x) = \overline{g}(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

la cui soluzione risulta essere

$$\begin{aligned} \overline{u}(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} g(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{0} g(-y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_0^{+\infty} g(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \int_0^{+\infty} g(y) \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\, dy \right). \end{aligned}$$

Dato che la $\overline{g}$ è continua (e limitata) si ha che $\overline{u}(t,x)$ risolve in maniera classica l'equazione del calore per $t > 0$ e che $\overline{u}(t,x) \to \overline{g}(x_0)$ per $(t,x) \to (0,x_0)$. Inoltre,

$$\overline{u}(t,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_0^{+\infty} g(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(-y)^2}{4t}} - \int_0^{+\infty} g(y) \mathrm{e}^{-\frac{(+y)^2}{4t}}\, dy \right) = 0 \qquad t > 0,$$

e quindi la soluzione cercata risulta essere la restrizione di $\overline{u}$ alle x positive

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} g(y) \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) dy \quad x > 0,\ t > 0.$$

Nel caso di g costante (anche se qualche attenzione va posta nel punto $(x,t) = (0,0)$ dato che nell'origine la funzione estesa $\overline{g}$ ha un salto, ma la soluzione risulta regolare per ogni $t > 0$) la soluzione diventa

$$\overline{u}(t,x) = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) dy \quad x > 0,\ t > 0.$$

Derivando (formalmente) si ha

$$\begin{aligned} \overline{u}_x(t,0) &= \frac{g_0}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{2(x-y)}{4t} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + \frac{2(x-y)}{4t} \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) dy \Bigg|_{x=0} \\ &= \frac{g_0}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{4t} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = -\frac{g_0}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{g_0}{\sqrt{\pi t}}. \end{aligned}$$