Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

9 luglio 2015

1. Sia $X = L^2_{uloc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni uniformemente localmente a quadrato sommabile, cioè

$$L^2_{uloc}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ misurabili e tali che } \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+1} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}$$

Dire se la funzione $|||\,.\,|||$ definita da

$$|||f|||^2 = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx$$

definisce una norma sullo spazio X.

Soluzione. Osserviamo inanzitutto che la funzione $|||\,.\,|||$ risulta ovviamente non-negativa e ben definita dato che, scelto $N \in \mathbb{N}$ tale che $T \le N < T+1$, si ha

$$\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx^2 \le \int_{-N}^{N} |f(x)|^2\, dx = \sum_{k=-N}^{N-1} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 \le 2N \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+1} |f(x)|^2\, dx,$$

e quindi

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx \le \frac{1}{2T} \int_{-N}^{N} |f(x)|^2\, dx \le \frac{2(T+1)}{2T} \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+1} |f(x)|^2\, dx < +\infty,$$

da cui si deduce che il limite superiore è finito.
Inoltre, dato che $\int_{-T}^{T} |\lambda f(x)|^2\, dx = \lambda^2 \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx$ e per la linearità di estremo superiore e inferiore si ha che $|||\lambda f||| = |\lambda|\, |||f|||$.

Per quello che riguarda la diseguaglianza triangolare si ha che, per ogni $T > 0$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) + g(x)|^2\, dx \le \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(x)|^2\, dx,$$

da cui

$$|||f + g||| \le |||f||| + |||g|||.$$

La quantità $|||\,.\,|||$ non è però una norma dato che non è vero che $|||f||| = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. Se prendiamo infatti $f \not\equiv 0$ con $\mathrm{supp}(f) \subset [-M, M]$ per qualche $M > 0$ allora

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2T} \int_{-M}^{M} |f(x)|^2\, dx \qquad \forall\, T \ge M,$$

e quindi

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-M}^{M} |f(x)|^2\, dx$$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-M}^{M} |f(x)|^2\, dx = 0.$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica misurabile e tale che $\|f\|_{L^\infty} \leq M$. Dare una stima della quantità
$$|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_0| \tag{1}$$
in termini di M e discutere se la stima trovata sia ottimale.

Soluzione. Dalla definizione abbiamo che
$$\begin{aligned}|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_0| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-ix} - 1)\,dx\right| \leq \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{-ix} - 1|\,dx \\ &= \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2|\sin(x/2)|\,dx = \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x/2)\,dx = \frac{4M}{\pi}.\end{aligned}$$
Si tratta ora di vedere se esiste una funzione limitata in modulo da M tale che $f(x)(\mathrm{e}^{-ix} - 1) = M|\mathrm{e}^{-ix} - 1|$. Poniamo pertanto
$$f(x) = \frac{2M\sin x/2}{\mathrm{e}^{-ix} - 1}.$$
Con facili calcoli risulta che la funzione ha modulo esattamente M, dato che
$$f(x) = iM\mathrm{e}^{ix/2}$$
e quindi f rende la diseguaglianza una uguaglianza

3. Dimostrare che esistono polinomi di grado esattamente n (con coefficiente del termine di grado massimo 1 se $n = 0$ e 2^{n-1} negli altri casi) tali che
$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Mostrare poi che i polinomi $2^{-1/2}T_0, T_1, T_2 \ldots$ sono ortonormali su $(-1, 1)$ rispetto al prodotto scalare (prodotto scalare in $L^2(-1, 1)$ con peso)
$$\langle f,\, g\rangle := \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x)\, g(x)\,dx.$$

Soluzione. Sicuramente l'identità è verificata per $n = 0, 1$ prendendo
$$T_0(t) = 1 \qquad T_1(t) = t.$$
Supponendo il risultato noto per induzione tutti gli $0 \leq n < N$, con $N \geq 2$ scriviamo
$$\begin{aligned}\cos(N\theta) &= \cos(N\theta) + \cos((N-2)\theta) - \cos((N-2)\theta) \\ &= \cos((N-1)\theta - \theta) + \cos((N-1)\theta - \theta) - \cos((N-2)\theta) \\ &\quad \text{e con la formula di addizione del coseno} \\ &= 2\cos(\theta)\cos((N-1)\theta) - \cos((N-2)\theta) \\ &= 2\cos(\theta)T_{N-1}(\theta) - T_{N-2}(\theta).\end{aligned}$$
Pertanto se T_n è un polinomio come sopra per $0 \leq n < N$, allora $\cos(N\theta)$ risulta essere, nella variabile $\cos(\theta)$ un polinomio di grado esattamente N e il cui coefficiente di grado N è il doppio di quello di grado $N - 1$ di T_{N-1}, da cui la tesi.

Se almeno uno tra n e m è uguale a zero il risultato di ortonormalità è immediato. Se n e m sono entrambi maggiori di zero, con il cambio di variabile $x = \cos(\theta)$ con $\theta \in (\pi, 0)$ se $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)\, T_m(x)\, dx = \frac{-2}{\pi}\int_{\pi}^{0} T_n(\cos(\theta))\, T_m(\cos(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta = \delta_{nm}.\end{aligned}$$

4. Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = y^2 & \text{su } \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione che definisce il valore al bordo può essere scritta come una funzione $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo $g(\theta) = \sin^2(\theta)$, questo dato che associa al punto $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ il valore $\sin^2(\theta)$, quindi in termini di esponenziali complessi

$$g(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta}}{4}.$$

Usando la formula di Poisson per la soluzione della palla bi-dimensionale abbiamo quindi

$$u(r,\theta) = \widehat{g}_0 + r^2(\widehat{g}_2 \mathrm{e}^{2i\theta} + \widehat{g}_{-2}\mathrm{e}^{-2i\theta}) = \frac{1}{2} - r^2 \frac{\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta}}{4} = \frac{1}{2}(1 - r^2\cos(2\theta)).$$

Usando le formule di duplicazione

$$u(r,\theta) = 1 - r^2(1 - 2\sin^2(\theta)),$$

cioè nelle variabili $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{2}.$$

5. Sia u soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \sin(t)\sin(x) & x \in]0,\pi[,\ 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

a) Determinare α in modo che se $u(0, x) = \alpha \sin(x)$ la soluzione sia 2π-periodica in t, cioè

$$u(0,x) = u(2k\pi, x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

b) Sotto le stesse condizioni risolvere il problema con $\sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kt)\sin(x)$ al posto di $\sin(t)\sin(x)$ al lato destro dell'equazione

c) Cosa si può dire se $N = +\infty$?

Soluzione. a) L'equazione in questione può essere risolta con il metodo della separazione delle variabili e la soluzione va cercata, per imporre le condizioni al contorno, della forma $u(t,x) = c_k(t)\sin(kx)$. Si ottengono quindi le seguenti equazioni

$$c_1'(t) + c_1(t) = \sin(t) \qquad c_1(0) = \alpha,$$

e

$$c_k'(t) + k^2 c_k(t) = 0 \qquad c_k(0) = 0 \qquad \forall\, k \neq 1.$$

Pertanto $c_k(t) = 0$ se $k \neq 1$. Risolvendo esplicitamente l'equazione ordinaria per c_1 si ha

$$c_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^s \sin(s)\, ds = \alpha e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)).$$

Pertanto, imponendo $c_1(2\pi) = c_1(0) = \alpha$ si ottiene la condizione

$$\alpha = -\frac{1}{2},$$

e quindi la soluzione cercata risulta essere

$$u(t,x) = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))\right]\sin(x).$$

b) L'unica cosa che cambia è l'espressione per c_1 che diventa

$$c_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \sum_{k=1}^{N} b_k \mathrm{e}^s \sin(ks)\, ds.$$

Si ha quindi, imponendo la periodicità e calcolando gli integrali

$$c_1(2\pi) = \alpha = \alpha \mathrm{e}^{-2\pi} + \mathrm{e}^{-2\pi}\sum_{k=1}^{N} b_k \frac{k}{1+k^2}(1 - \mathrm{e}^{2\pi}),$$

da cui

$$\alpha = -\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k k}{1+k^2}.$$

c) Nel caso in cui la forza esterna sia periodica 2π-periodica in t e della forma $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)\sin(x)$ si ha

$$\alpha = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k k}{1+k^2}$$

e la serie converge se per esempio $b_k = \mathcal{O}(k^{-\gamma})$ per ogni γ positivo. In particolare, se $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$ è la serie di Fourier si una funzione a quadrato sommabile, se cioè $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 < +\infty$, allora la serie che determina α risulta convergente.