Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi in più variabili 2

18 dicembre 2014

1. Sia $\gamma \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e periodica di periodo 2π. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi\, k\, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e definiamo

$$\phi(t) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j), \qquad t \in]-\pi, \pi[.$$

Mostrare che è periodica di periodo 2π, definita quasi ovunque su tutto $\mathbb{R}$ e che $\phi \in L^1(-\pi, \pi)$. Calcolare $\widehat{\phi}_n$, il coefficiente di Fourier (complesso) associato alla funzione ϕ in termini di $\mathcal{F}(f)(\xi)$, la trasformata di Fourier di f. Supponendo inoltre che f sia continua e

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^2}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R},$$

calcolare $\phi(0)$ tramite il suo sviluppo in serie di Fourier, esprimendo il risultato in termini di $\mathcal{F}(f)$.

3. Risolvere (con trasformata di Fourier parziale rispetto a x) il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Mostrare poi che la soluzione $u(x, y)$ ha gradiente in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ se è soddisfatta la condizione

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|\, |\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty.$$

Inoltre se $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (non necessariamente in $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$) allora la soluzione u è classica e $u(x_0, y) \to g(x_0)$ quando $y \to 0^+$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty([0, +\infty[) \cap L^1(0, +\infty)$. La funzione definita con prolungamento pari (riflessione del grafico rispetto alla retta $\{x = 0\}$) risulta continua, ma non derivabile in $x = 0$, a meno che $f'_+(0) = 0$.

Sia quindi definita la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \geq 0, \\ \alpha_1 f(-x) + \alpha_2 f(-x/2) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Scegliere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $F \in C^1(\mathbb{R})$. Dare una stima per la velocità con cui $\widehat{F}(\xi)$ tende a zero per $|\xi| \to +\infty$.

È possibile in analogia definire una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $F_{|x \geq 0} = f(x)$ e $F \in C^k(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$ assegnato?

5. Determinare il momento di inerzia rispetto alla retta generata da e_3 della (porzione di) superficie regolare parametrica (con densità di massa costante e unitaria)

$$\phi : T \to (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^3$$

con $T := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u^2 + v^2 \leq 1\}$.