Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi in più variabili 2

12 novembre 2014

1. Sia $f :]-\pi,\pi[^2 \to \mathbb{R}$ una funzione regolare a quadrato integrabile e periodica di periodo 2π-rispetto sia a x_1 che a x_2. Dare delle condizioni sufficienti (sulla sommabilità al quadrato di opportune derivate di f) affinchè

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

sia una serie convergente nella norma L^∞.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier delle funzioni definite su $[-\pi,\pi[$ e prolungate poi per 2π-periodicità,

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & |t| < \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \dfrac{1}{2} \le |t| \le \pi, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1, \\ 0 & 1 \le |t| \le \pi, \end{cases}$$

C'è qualche legame tra $f(t)$ e $\Delta(t)$?

3. a) Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{txx} - u_{xx} = 0 & x \in]-\pi,\pi[\times]0,T[, \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & t \in]0,T[, \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

dove $T > 0$, $0 < \alpha \le 1$ e il dato iniziale $u_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\,kx}$ è tale che i suoi coefficienti di Fourier soddisfano $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 |c_k|^2 < +\infty$.

   b) Cosa si può dire sulla regolarità di $u(t,x)$ per $0 < t < T$. Il problema è risolubile per $t < 0$? (L'equazione è legata ad alcuni fenomeni di viscoelasticità)

   c) Studiare, nel caso di soluzioni che sono in aggiunta a media nulla, se la soluzione decade esponenzialmente a zero nella norma naturale e trovare l'eventuale velocità di azzeramento.

4. Sia $\mathcal{D}$ definito da

$$\mathcal{D} := \big\{\mathbf{v} :]-\pi,\pi[^3 \to \mathbb{R}^3, \text{di classe } C^\infty, 2\pi-\text{periodiche in ogni direzione}\big\}$$

e $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ il sottospazio

$$\mathcal{V} := \left\{\mathbf{v} \in \mathcal{D} : \int_{]-\pi,\pi[^3} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0\right\}$$

a) Mostrare che $\mathcal{V} \neq \{0\}$;

b) Dimostrare che dim $\mathcal{V} = +\infty$;

c) Caratterizzare $\mathcal{V}$ tramite lo sviluppo in serie di Fourier;

d) Rispetto al prodotto scalare di $\left(L^2(]-\pi,\pi[^3)\right)^3$ scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione ortogonale $P : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$;

e) Dimostrare che P può essere esteso un operatore lineare e limitato da $\left(L^2(]-\pi,\pi[^3)\right)^3$ a un suo sottospazio chiuso H.

5. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g(x)$ e $h(x)$ di classe $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e nulle fuori dall'intervallo limitato $[a,b]$. Dimostrare che esiste un tempo $\mathcal{T} > 0$ abbastanza grande tale che

$$E_{cin}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_t(t,x)|^2\,dx \equiv E_{pot}(t) = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x(t,x)|^2\,dx, \qquad \forall\, t > \mathcal{T}.$$