Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

19 genaio 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Per $m \in \mathbb{N}$ definiamo
$$f_{(m)}(t) = f(mt)$$
Calcolare i coefficienti di Fourier complessi
$$\widehat{f_{(m)}}(k)$$
in termini dei coefficienti $\widehat{f}(k)$ della funzione $f(t)$.

2. Sia $Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ e sia $H = L^2(Q)$. Consideriamo
$$V := \left\{u \in H : \ u(x, y) = v(x) \text{ q.o., con } v \in L^2(-\pi, \pi)\right\}$$
Verificare che V è un sottospazio chiuso di H e determinare $V^\perp$ tale che $H = V \oplus V^\perp$. Chiamato P_V il proiettore su V, calcolare
$$P_V(x\,y).$$

3. Determinare l'espressione dei polinomi armonici omogenei di grado n nella variabile $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Calcolare poi il polinomio (giustificare se ne esiste uno solo) armonico omogeneo u di grado 3 con coefficienti unitari per x_1^3 e x_2^3.

   Dimostrare poi che se u è un polinomio armonico omogeneo di grado 2 e M è una matrice 2×2 ortogonale, allora $v(\mathbf{x}) := u(M\mathbf{x})$ è ancora una funzione armonica. La proprietà è vera anche per una funzione armonica u più generale di un polinomio?

4. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}^+$, il flusso nella direzione positiva dell'asse z del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x, y^2, z)$ attraverso la parte $\mathcal{S}$ nel primo ottante della superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq y \leq b$.

5. Risolvere, con il metodo della separazione delle variabili, il problema misto
$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & x \in]0, \pi[, \ t > 0, \\ u(0,x) = g(x) & x \in]0, \pi[, \\ u_x(t,0) = 0 & t > 0, \\ u_x(t,\pi) + u(t,\pi) = 0 & t > 0, \end{cases}$$
con g regolare e periodica di periodo π.
Calcolare poi, se possibile, il limite per $t \to +\infty$ della soluzione.