Corso di Laurea in Matematica Prova di Analisi in più variabili 2

18 settembre 2015

1. Consideriamo la funzione di due variabili $u(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha$ e sia $B(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

- (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u \in L^2(B(0, 1))$;
- (b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u, \nabla u \in L^2(B(0, 1))$
- (c) Usando la disuguaglianza $\|v\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2}$ valida per tutti i $p < +\infty$ e per le funzioni regolari e nulle su $\partial B(0, 1)$ dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta valida la disuguaglianza: esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left| \int_B u v dx \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^2(B(0,1))}$$

per ogni funzione v regolare e nulla su $\partial B(0, 1)$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica misurabile e $f \in L^1(0, 2\pi)$ tale che $f \geq 0$ q.o. Dimostrare che

$$|a_n| \leq a_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando come f il nucleo di Fejér $\sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$ studiare se la stima è precisa.

3. Sia $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione regolare e a supporto compatto. Sia assegnato $\vec{f} = \text{rot } \vec{u}$ e sia $\text{div } \vec{u} = 0$. Determinare $\vec{u}$ in termini di $\vec{f}$

Sugg. Applicare ancora il rotore

4. Sia p un polinomio di grado m in due variabili e sia

$$P(x) = \int_S f(z) \frac{1 - |x|^2}{|x - z|^2} d\sigma(z)$$

la soluzione del problema di Poisson nella palla unitaria

$$\begin{cases} \Delta P = 0 & x \in B(0, 1) \\ P = p & x \in S := \partial B(0, 1) \end{cases}$$

Dimostrare che P si scrive come

$$P = (1 - |x|^2)q + p$$

con q polinomio di grado minore o uguale a $m - 2$.

Sugg.: Considerare prima i casi $m = 0, 1$ e poi ricordare che lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a m ha dimensione finita e l'operatore di Laplace è lineare

5. Trovare la soluzione, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, del problema al contorno e ai valori iniziali

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + a^2 u(t, x) = 0 & x \in]0, \pi[, t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & 0 \leq t, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in]0, \pi[, \\ u_t(0, x) = u_1(x) & x \in]0, \pi[, \end{array} \right. \quad (1)$$