

# Corso di Laurea in Matematica Prova di Analisi in più variabili 2

18 giugno 2015

1. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e tale che  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  e sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione limitata e  $2\pi$ -periodica. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(x)g(nx) dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) = \left( \int f(x) dx \right) \left( \int g(x) dx \right) \quad (1)$$

*Sugg.: Approssimare  $f$  con l'approssimante di Fejér, che nella forma complessa è  $\sigma_N[f](x) = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \widehat{f}_k e^{ikx} \dots$*

2. Sia  $g \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $\int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1$  e siano

$$\alpha := \int_{-\infty}^0 g(y) dy \quad \text{e} \quad \beta := \int_0^{+\infty} g(y) dy.$$

Sia  $f$  una funzione limitata e continua a tratti. Allora definendo per  $\epsilon > 0$  la funzione  $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$  si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f * g_\epsilon)(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-),$$

dove  $f(x^\pm) := \lim_{z \rightarrow x^\pm} f(z)$ .

3. Verificare che la funzione reale  $\|\cdot\|_1$  definita per un polinomio di grado  $n$  a coefficienti e indeterminata complessa  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  tramite

$$\|P(z)\|_1 := \sum_{k=0}^n |a_k|,$$

definisce una norma e verificare che dati  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  e  $Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$  allora

$$\|P(z)Q(z)\|_1 \leq \|P(z)\|_1 \|Q(z)\|_1.$$

4. Dimostrare che gli zeri di una funzione armonica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto, non sono mai isolati

*Sugg. Ricordare la proprietà della media su sfere per le funzioni armoniche*

Verificare poi che se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  la proposizione è falsa costruendo un controesempio. Trovare infatti la parte immaginaria di una funzione  $\phi$  la cui parte reale è

$$\Re(\phi) = (1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^n x_k^2,$$

in modo che  $\Delta\phi = 0$  e nell'origine ci sia uno zero isolato.

5. Sia  $u$  soluzione del problema ai valori finali

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & x \in ]0, \pi[, \ 0 < t < T, \\ u(T, x) = g(x) & x \in ]0, \pi[, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

- a Utilizzare il cambio di variabile  $t = T - s$  per far diventare il problema uno ai valori iniziali;
- b Risolvere (almeno formalmente) con la separazione delle variabili il problema ai valori finali e cercare ipotesi sulla  $g$  in modo che la formula trovata sia una soluzione;
- c Usare il dato finale  $g_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$  per mostrare che la dipendenza continua dai dati non vale.