

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

12 febbraio 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Dimostrare la seguente formula

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-int} dt \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

per il coefficiente di Fourier complesso n -esimo.

Usare la (1) per dimostrare il Lemma di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Se oltre alle ipotesi precedenti assumiamo $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, con $0 < \alpha \leq 1$, possiamo dedurre un andamento più preciso per $n \rightarrow +\infty$?

2. Sia $H = L^2(0, 1)$ e per $f \in H$ definiamo la funzione $\mathcal{T}[f](t) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ come segue:

$$\mathcal{T}[f](t) := \int_0^1 (2t + f(s))^2 ds.$$

Dimostrare che $\mathcal{T}[f](t) \in H$ e che $\mathcal{T}$ è un operatore continuo da H in H . $\mathcal{T}$ è lineare? Mostrare inoltre che se $\|f\|_H \leq M$ allora

$$\exists C > 0 : \quad \|\mathcal{T}[f](t+h) - \mathcal{T}[f](t)\|_H^2 \leq Ch^2,$$

considerando $\mathcal{T}[f]$ come estesa a zero fuori da $(0, 1)$.

3. Sia $u(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare definita nel settore angolare

$$W := \{(r, \theta) : r > 0 \text{ e } 0 < \theta < \theta_0, \text{ con } 0 < \theta_0 < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La funzione u è detta *omogenea* se esiste una funzione regolare $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u(\alpha \mathbf{x}) = b(\alpha)u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in W, \forall \alpha > 0.$$

Dimostrare che esiste una costante γ tale che, se u è omogenea, in coordinate polari

$$u(r, \theta) = r^\gamma S(\theta).$$

Calcolare poi le funzioni omogenee e armoniche su W , che si annullano per $\theta = 0$ e per $\theta = \theta_0$.

4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

e sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro

$$C := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, z \geq 0 \right\}.$$

La superficie $S \cap C$ è regolare? Calcolare la sua area.

5. Risolvere, tramite l'uso delle soluzioni fondamentali, il problema al contorno nella semiretta

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & x \in]0, +\infty[, \ t > 0, \\ u(0, x) = g(x) & x \in]0, +\infty[, \\ u(t, 0) = 0 & t > 0, \end{array} \right.$$

con g regolare.

Considerare poi il caso $g(x) = g_0 \in \mathbb{R}^+$ e calcolare in questo caso $u_x(t, 0)$.