Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

9 luglio 2015

1. Sia $X = L^2_{uloc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni uniformemente localmente a quadrato sommabile, cioè
$$L^2_{uloc}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ misurabili e tali che } \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+1} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}$$
Dire se la funzione $|||\,.\,|||$ definita da
$$|||f|||^2 = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx$$
definisce una norma sullo spazio X.

   Sugg. Poterebbe essere utila considerare preliminarmente il caso in cui il limite superiore sia in realtà un limite

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica misurabile e tale che $\|f\|_{L^\infty} \le M$. Dare una stima della quantità
$$|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_0| \tag{1}$$
in termini di M e discutere se la stima trovata sia ottimale.

   Trovare cioè una diseguaglianza e dire se esiste almeno una funzione per cui diventa una uguaglianza

3. Dimostrare che esistono polinomi di grado esattamente n (con coefficiente del termine di grado massimo 1 se $n = 0$ e 2^{n-1} negli altri casi) tali che
$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Mostrare poi che i polinomi $2^{-1/2}T_0,\, T_1,\, T_2\ldots$ sono ortonormali su $[-1, 1]$ rispetto al prodotto scalare (prodotto scalare in $L^2(-1, 1)$ con peso)
$$\langle f,\, g\rangle := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, g(x)\, dx.$$

   Sugg. Usare induzione e scrivere T_m in funzione dei due precedenti usando le identità trigonometriche

4. Risolvere il problema al contorno
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = y^2 & \text{su } \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

5. Sia u soluzione del problema
$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \sin(t)\sin(x) & x \in]0,\pi[,\ 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

a) Determinare α in modo che se $u(0,x) = \alpha \sin(x)$ la soluzione sia 2π-periodica in t, cioè

$$u(0,x) = u(2k\pi, x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

b) Sotto le stesse condizioni risolvere il problema con $\sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kt) \sin(x)$ al posto di $\sin(t)\sin(x)$ al lato destro dell'equazione

c) Cosa si può dire se $N = +\infty$?