Una funzione continua la cui serie di Fourier non converge (almeno) in un punto

24 novembre 2017

Viene data una costruzione esplicita di una funzione $f \in C(\mathbb{T})$, dove $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, tale che la sua serie di Fourier non converge in $x_0 = 0$. Questo non è l'esempio originale di duBois Reymond, in quanto sfrutta idee che sono emerse venti anni dopo della scoperta originale.

Intenderemo con $\mathcal{O}(\cdot)$ è la usuale notazione di "O grande". Inoltre, diciamo che una serie di funzioni continue $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{L^\infty} < +\infty$: in tal caso, la serie converge ad una funzione continua.

Cominciamo a fissare la notazione e a richiamare alcuni fatti noti: con

$$D_N(x) := \sum_{|k|\leq N} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, \qquad x \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N},$$

si denota il nucleo N-esimo di Dirichlet e con calcolo esplicito si verifica che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(z)|\, dz \geq C \log N \qquad \text{per } N \to +\infty.$$

Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, allora la serie di Fourier troncata all'ordine $N \in \mathbb{N}$ si scrive come segue:

$$S_N(f)(x) = \sum_{|k|\leq N} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y)\, \mathrm{d}y,$$

Pertanto, definendo

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

se

$$f_N(x) := \operatorname{sgn}(D_N)(x) \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

si ha che $|f_N(x)| \leq 1$ e, dato che $D_N(-x) = D_N(x)$, si ha anche

$$\begin{aligned} S_N(f_N)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(D_N)(y) D_N(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, \mathrm{d}x = \mathcal{O}(\log N). \end{aligned}$$

Osserviamo che la successione $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ non fornisce un controesempio valido: il primo motivo è che la successione $\{f_N\}$ non è una funzione singola; il secondo che le f_N non sono continue, in particolare f_N risulta discontinua in nei $2N$ punti $x_j \in [-\pi, \pi]$ che risolvono

$$(N + \frac{1}{2})x_j = k\pi \qquad k \in \mathbb{N};$$

il terzo è che $|S_N(f_N)(0)| < +\infty$ per ogni fissato $N \in \mathbb{N}$.

Le proprietà fondamentali della successione $\{f_N\}$ sono

$$|f_N(x)| \leq 1 \qquad S_N(f_N)(0) \geq C \log N.$$

Cominciamo a costruire intanto una successione di funzioni continue che rispetti le stesse proprietà, cioè vogliamo una successione $\{h_N\}$ tale che

$$h_N \in C(\mathbb{T}), \qquad |h_N(x)| \leq 1, \qquad S_N(h_N)(0) = \mathcal{O}(\log N).$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}$ possiamo rendere la funzione f_N continua raccordando linearmente il grafico in un intorno dei punti x_j, con $j = 1, \dots, 2N$.

Fissato N, definisco $\delta_N := \frac{1}{(2N+1)^2}$ e posso trovare una funzione g_N continua tale che

$$g_N(x) = \begin{cases} f_N(x) \qquad x \in [-\pi, \pi] \setminus \cup\, (x_j - \delta_N, x_j + \delta_N) \\ \\ \text{lineare che unisce i punti del grafico} \\ (x_j - \delta_N, f_N(x_j - \delta_N)) \;e\; (x_j + \delta_N, f_N(x_j + \delta_N)) \\ \text{per } x \in (x_j - \delta_N, x_j + \delta_N). \end{cases}$$

Con tale definizione si ha che che $\|f_N - g_N\|_{L^1} \leq \frac{1}{2N+1}$ e $\|g_N\|_{L^\infty} \leq 1$. Pertanto chiamati $\widehat{f}_N(k)$, $\widehat{g}_N(k)$ i coefficienti di Fourier di f_N e g_N vale

$$|\widehat{g}_N(k) - \widehat{f}_N(k)| \leq \frac{1}{2N+1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Calcolando la serie troncata N-esima di g_N si ha che

$$\begin{aligned} |S_N(g_N)(0)| &= \left| \sum_{|k|\leq N} \widehat{g}_N(k) \right| = \left| \sum_{|k|\leq N} \widehat{g}_N(k) - \widehat{f}_N(k) + \widehat{f}_N(k) \right| \\ &\geq \left| \sum_{|k|\leq N} |\widehat{f}_N(k)| - \sum_{|k|\leq N} |\widehat{g}_N(k) - \widehat{f}_N(k)| \right| \\ &\geq \sum_{|k|\leq N} |\widehat{f}_N(k)| - 1 \\ &\geq S_N(f)(0) - 1, \end{aligned}$$

e quindi,

$$S_N(g_N)(0) = \mathcal{O}(\log N) \qquad \text{per } N \to +\infty.$$

Per i calcoli che seguono sarà utile, invece che lavorare sulle g_N, avere per ogni $N \in \mathbb{N}$ un polinomio trigonometrico h_N, che approssimi le g_N e tale che valga ancora

$$|h_N(x)| \leq 1, \qquad S_N(h_N)(0) = \mathcal{O}(N) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dato che le g_N sono contine è naturale provare a usare le approssimanti di Fejér. Definiamo quindi

$$\begin{aligned} \overline{h}_N(x) :&= \sigma_{N+1}(g_N)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_N(x-y)F_{N+1}(y)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{|k|\leq N} \big(1 - \frac{|k|}{N+1}\big)\widehat{g}_N(k)\mathrm{e}^{ikx}, \end{aligned}$$

e si ha

$$|\overline{h}_N(x)| \leq \|g_N\|_{L^\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_{N+1}(x)\,\mathrm{d}x = \|g_N\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Dato che $\overline{h}_N$ è una somma di esponenziali complessi di frequenza minore o uguale a N ne segue che $S_N(\overline{h}_N)(x) = \overline{h}_N(x)$ e quindi scrivendo come prima

$$S_N(\overline{h}_N)(0) = S_N(g_N)(0) + S_N(\overline{h}_N - g_N)(0),$$

basta controllare se il termine $S_N(\overline{h}_N - g_N)(0)$ rimane limitato. Calcolandolo esplicitamente si ottiene

$$\begin{aligned} S_N(\overline{h}_N)(0) - S_N(g_N)(0) &= \sum_{|k|\leq N} \left[1 - \frac{|k|}{N+1}\right] \widehat{g}_N(k) - \sum_{|k|\leq N} \widehat{g}_N(k) \\ &= \sum_{|k|\leq N} -\frac{|k|}{N+1}\widehat{g}_N(k). \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $|g_N| \leq 1$ implica $|\widehat{g}_N(k)| \leq 1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} |S_N(\overline{h}_N - g_N)(0)| &\leq \sum_{|k|\leq N} \frac{|k|}{N+1}|\widehat{g_N}(k)| \leq \sum_{|k|\leq N} \frac{|k|}{N+1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N+1} = 2\frac{N(N+1)}{2(N+1)} = N. \end{aligned}$$

Non possiamo quindi concludere nulla dato che le stime non implicano che $S_N(\overline{h}_N)(0) = \mathcal{O}(\log N)$.

Una maniera per risolvere questo problema è quella di sommare un numero maggiore di termini. Definiamo quindi

$$h_N(x) := \sigma_{N^2+1}(g_N)(x) = \sum_{|k|\leq N^2} \left[1 - \frac{|k|}{N^2+1}\right] \widehat{g_N}(k)\mathrm{e}^{ikx},$$

Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ il polinomio trigonometrico h_N è di grado al piú N^2, e, con la stessa dimostrazione di prima, $|h_N(x)| \leq 1$, ma adesso

$$S_N(h_N)(x) = \sum_{|k|\leq N} \left[1 - \frac{|k|}{N^2+1}\right] \widehat{g_N}(k)\mathrm{e}^{ikx},$$

e pertanto
$$S_N(h_N - g_N)(0) = \sum_{|k|\le N} -\frac{|k|}{N^2+1}\widehat{g_N}(k),$$
per cui, per ogni $N \in \mathbb{N}$
$$|S_N(h_N - g_N)(0)| \le \sum_{|k|\le N} \frac{|k|}{N^2+1}|\widehat{g_N}(k)| \le 2\sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N^2+1} = 2\frac{N(N+1)}{2(N^2+1)} \le 2,$$

Dunque, abbiamo risolto il secondo problema: abbiamo ora una successione $\{h_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ di funzioni continue (in realtà, regolari) e limitate uniformemente sul toro, tali che per $x_0 = 0$ il modulo della somma parziale di Fourier N-esima si comporta come $\log N$.

Vediamo ora di risolvere il primo problema. Nessuna delle h_N ha serie divergente in 0, perchè essa risulta finita, anche se dell'ordine di $\log N$. Vediamo come costruire una unica funzione che sia continua e che abbia per $x_0 = 0$ la serie di Fourier non limitata.

Dato che le h_N sono limitate uniformemente la prima idea è quella di definire
$$\phi(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j(x)}{j^2} \qquad x \in \mathbb{R},$$
dato che $\sum_{j=1}^{+\infty} \|\frac{h_j(x)}{j^2}\|_{L^\infty} \le \sum_{j=1} \frac{1}{j^2} < +\infty$, implica che si ha convergenza totale. Dunque $\phi \in C^0(\mathbb{T})$ ed è 2π-periodica, perché ogni h_j è 2π-periodico. Inoltre, si ottiene
$$\begin{aligned} S_N(\phi)(0) &= S_N(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_k}{j^2})(0) + S_N(\frac{h_N}{N^2})(0) + S_N(\sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{h_k}{j^2})(0) \\ &=: A_\phi^N + B_\phi^N + C_\phi^N \end{aligned}$$
e il termine sui cui ho informazione è il secondo ma
$$B_\phi^N = S_N(\frac{h_N}{N^2})(0) = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N^2}) \qquad \text{che non diverge}$$
per $N \to +\infty$. Ma allora non riesco a far scoppiare la serie in 0.

Cerco di definire una funzione simile usando una sotto-successione $\{\lambda_j\}$ che cresca abbastanza in fretta. Definisco pertanto
$$\varphi(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_{\lambda_j}(x)}{j^2}$$
si ha ancora $\sum_{j=1}^{+\infty} \|\frac{h_{\lambda_j}(t)}{j^2}\|_{L^\infty} \le \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty$, dunque, $\varphi \in C^0(\mathbb{T})$. Troncando la serie come prima al livello $\lambda_N \in \mathbb{N}$ si ha
$$\begin{aligned} S_{\lambda_N}(\varphi)(0) &= S_{\lambda_N}(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(0) + S_{\lambda_N}(\frac{h_{\lambda_N}}{N^2})(0) + S_{\lambda_N}(\sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(0) \\ &= A_\varphi^N + B_\varphi^N + C_\varphi^N, \end{aligned}$$

e ora dato che
$$S_{\lambda_N}(\frac{h_{\lambda_N}}{N^2})(0) = \frac{\mathcal{O}(\log \lambda_N)}{N^2},$$
fissando per esempio
$$\lambda_j := 3^{3^j} \qquad j \in \mathbb{N},$$
essa risulta strettamente crescente e inoltre
$$B_\varphi^N = S_{\lambda_N}(\frac{h_{\lambda_N}}{N^2})(0) = \frac{\mathcal{O}(\log 3^{3^N})}{N^2} = \frac{\mathcal{O}(3^N \log 3)}{N^2},$$
che diverge per $N \to +\infty$.

La strategia della costruzione sarà quella di far vedere che A_φ^N e C_φ^N restano limitati.

Cominciamo dal primo termine A_φ^N che contiene solo un numero finito di termini. Intanto osserviamo che $\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}(x)}{j^2}$ è un polinomio trigonometrico di grado minore o uguale a λ_{N-1}^2, essendo somma di polinomi di grado minore o uguale a λ_j^2 per $1 \leq j \leq N-1$. Dato che
$$\begin{aligned} &\lambda_j \leq \lambda_{N-1} \qquad \forall\, j \leq N-1 \\ &\lambda_{m-1}^2 = 3^{2\cdot 3^{m-1}} < 3^{3\cdot 3^{m-1}} = 3^m = \lambda_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1}$$
si ha (essendo la serie troncata di Fourier S_{λ_N} la proiezione sui polinomi trigonometrici al più di grado λ_{N-1}) che
$$S_{\lambda_N}(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(x) = \sum_{j=1}^{N-1} S_{\lambda_N}(\frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2}(x),$$
per cui, per ogni $N \in \mathbb{N}$
$$|A_\varphi^N| = |S_{\lambda_N}(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(0)| = |\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}(0)}{j^2}| \leq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\|h_{\lambda_j}\|_{L^\infty}}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty.$$
Dunque, manca da controllare il terzo termine B_φ^N. In realtà, non si riesce facilmente a mostrare che è limitato essendo una somma di infiniti termini. Un modo in cui si potrebbe stimare facilmente sarebbe *se fosse vero che*
$$S_{\lambda_N}(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{h_{\lambda_j}}{j^2})(x) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{h_{\lambda_j}(x)}{j^2}.$$
Tale affermazione è in generale falsa, ma quello che possiamo ottenere è qualcosa di simile, almeno nel punto $x_0 = 0$. A tal fine consideriamo la funzione ottenuta moltiplicando per λ_j anche l'argomento della funzione $h_{\lambda_j}(x)$. Pertanto definiamo
$$\psi(t) := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2}. \tag{2}$$
Come prima, si ha che la serie converge totalmente e quindi $\psi \in C^0(\mathbb{T})$.

Come passaggio preliminare cerchiamo di capire se esiste un $m \in N$ tale che

$$S_m(h_{\lambda_j})(\lambda_j x))|_{x=0} = S_{\lambda_j}(h_{\lambda_j})(x)|_{x=0} = \frac{\mathcal{O}(3^j)}{j^2} \qquad j \in \mathbb{N}.$$

In termini di sviluppo di Fourier, dato che $h_{\lambda_j}(x) = \sum_{|k|\leq\lambda_j^2} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ikx}$, allora

$$h_{\lambda_j}(\lambda_j x) = \sum_{k\,:\,|k|\,\leq\,\lambda_j^2} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x},$$

e quindi

$$S_m(h_{\lambda_j}(\lambda_j x)) = \sum_{\substack{k\,:\,|k|\lambda_j\,\leq\,m\\ |k|\,\leq\,\lambda_j^2}} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x}$$

da cui

$$S_{\lambda_j}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x)) = \sum_{k:\ |k|\lambda_j\leq\lambda_j} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x} \neq S_{\lambda_j}(h_{\lambda_j})(x)$$

quindi la scelta di $m = \lambda_j$ non va bene. Se scegliamo $m = \lambda_j^2$ si ha

$$S_{\lambda_j^2}(h_{\lambda_j})(\lambda_j x) = \sum_{\substack{k\,:\,|k|\lambda_j\,\leq\,\lambda_j^2\\ |k|\,\leq\,\lambda_j^2}} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x}$$

e se teniamo conto che $\lambda_j \leq \lambda_j^2$ ne segue che

$$\{k \in \mathbb{Z} :\ |k|\lambda_j \leq \lambda_j^2\} \cap \{k \in \mathbb{Z} :\ |k| \leq \lambda_j^2\} = \{k \in \mathbb{Z} :\ |k| \leq \lambda_j\},$$

e quindi

$$S_{\lambda_j^2}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x))|_{x=0} = \sum_{|k|\leq\lambda_j} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x}{}_{|x=0} = \sum_{|k|\leq\lambda_j} \widehat{h_{\lambda_j}} = S_{\lambda_j}(h_{\lambda_j})(0),$$

nonostante per gli altri x si abbia in generale $S_{\lambda_j^2}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x)) \neq S_{\lambda_j}(h_{\lambda_j})(x)$.

Scriviamo quindi la nuova decomposizione

$$\begin{aligned}
&S_{\lambda_N^2}(\psi)(0)\\
&= S_{\lambda_N^2}(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2})(0) + S_{\lambda_N^2}(\frac{h_{\lambda_N}(\lambda_N x)}{N^2})(0) + S_{\lambda_N^2}(\sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2})(0).\\
&= A_\psi^N + B_\psi^N + C_\psi^N
\end{aligned}$$

e pertanto

$$B_\psi^N = S_{\lambda_N^2}(\frac{h_{\lambda_N}(\lambda_N x)}{N^2})(0) = \frac{\mathcal{O}(\log N)}{N^2}.$$

Per quanto riguarda il termine A_ψ^N che è una somma finita osserviamo che per $j \geq 1$ si ha che

$$h_{\lambda_j}(\lambda_j x) = \sum_{|k|\leq\lambda_j^2} \widehat{h_{\lambda_j}}(k)\mathrm{e}^{ik\lambda_j x},$$

Pertanto $h_{\lambda_j}(\lambda_j x)$ risulta essere un polinomio trigonometrico di grado al più $\lambda_j^2 \cdot \lambda_j = \lambda_j^3 \leq \lambda_{N-1}^3$. Ma dato che

$$\lambda_{m-1}^3 = 3^{3 \cdot 3^{m-1}} = 3^{3^m} = \lambda_m \leq \lambda_m^2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

ne segue che

$$S_{\lambda_N^2}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x)) = h_{\lambda_j}(\lambda_j x) \qquad \forall\, j < N,$$

e quindi come prima

$$\left| S_{\lambda_N^2}(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2}) \right| = \left| \sum_{j=1}^{N-1} \frac{S_{\lambda_N^2}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x))}{j^2} \right| = \left| \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2} \right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty,$$

dato che $\|h_{\lambda_j}\|_\infty \leq 1$. Il termine A_ψ^N risulta limitato.

Per il termine C_ψ^N osserviamo che che

$$h_{\lambda_j}(\lambda_j x) = \sum_{|k| \leq \lambda_j^2} \widehat{h_{\lambda_j}}(k) \mathrm{e}^{ik\lambda_j x} = \widehat{h_{\lambda_j}}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq \lambda_j^2} \widehat{h_{\lambda_j}}(k) \mathrm{e}^{ik\lambda_j x}, \quad \text{con } j \geq N+1,$$

quindi i termini non costanti hanno grado maggiore o uguale di λ_{N+1}. Ricordando la (1) si ha $\lambda_j^2 \leq \lambda_{j+1}$ e quindi

$$S_{\lambda_N^2}(h_{\lambda_j}(\lambda_j x)) = \widehat{h_{\lambda_j}}(0) \qquad \forall\, j \geq N+1,$$

da cui segue che

$$|C_\psi^N| = \left| S_{\lambda_N^2}(\sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{h_{\lambda_j}(\lambda_j x)}{j^2})(0) \right| = \left| \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{\widehat{h_{\lambda_j}}(0)}{j^2} \right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2},$$

che risulta finito.

Ma allora $S_{\lambda_{N^2}}(\psi)(0)$ è somma di due termini limitati, e di uno che é divergente in modulo, quindi anch'essa é divergente in modulo, e quindi

$$\limsup_{N \to +\infty} |S_N(\psi)(0)| = +\infty,$$

concludendo la verifica della costruzione.