Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi in più variabili 2

12 novembre 2014

1. Sia $f :]-\pi,\pi[^2 \to \mathbb{R}$ una funzione regolare a quadrato integrabile e periodica di periodo 2π-rispetto sia a x_1 che a x_2. Dare delle condizioni sufficienti (sulla sommabilità al quadrato di opportune derivate di f) affinchè

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

sia una serie convergente nella norma L^∞.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier delle funzioni definite su $[-\pi,\pi[$ e prolungate poi per 2π-periodicità,

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & |t| < \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \dfrac{1}{2} \le |t| \le \pi, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1, \\ 0 & 1 \le |t| \le \pi, \end{cases}$$

C'è qualche legame tra $f(t)$ e $\Delta(t)$?

3. a) Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{txx} - u_{xx} = 0 & x \in]-\pi,\pi[\times]0,T[, \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & t \in]0,T[, \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

dove $T > 0$, $0 < \alpha \le 1$ e il dato iniziale $u_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\,kx}$ è tale che i suoi coefficienti di Fourier soddisfano $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 |c_k|^2 < +\infty$.

   b) Cosa si può dire sulla regolarità di $u(t,x)$ per $0 < t < T$. Il problema è risolubile per $t < 0$? (L'equazione è legata ad alcuni fenomeni di viscoelasticità)

   c) Studiare, nel caso di soluzioni che sono in aggiunta a media nulla, se la soluzione decade esponenzialmente a zero nella norma "naturale" e trovare l'eventuale velocità di azzeramento.

4. Sia $\mathcal{D}$ definito da

$$\mathcal{D} := \left\{ \mathbf{v} :]-\pi,\pi[^3 \to \mathbb{R}^3, \text{di classe } C^\infty, 2\pi - \text{periodiche in ogni direzione} \right\}$$

e $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ il sottospazio

$$\mathcal{V} := \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{D} : \int_{]-\pi,\pi[^3} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \right\}$$

a) Mostrare che $\mathcal{V} \neq \{0\}$;

b) Dimostrare che $\dim \mathcal{V} = +\infty$;

c) Caratterizzare $\mathcal{V}$ tramite lo sviluppo in serie di Fourier;

d) Rispetto al prodotto scalare di $\left(L^2(]-\pi,\pi[^3)\right)^3$ scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione ortogonale $P : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$;

e) Dimostrare che P può essere esteso un operatore lineare e limitato da $\left(L^2(]-\pi,\pi[^3)\right)^3$ a un suo sottospazio chiuso H.

5. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g(x)$ e $h(x)$ di classe $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e nulle fuori dall'intervallo limitato $[a,b]$. Dimostrare che esiste un tempo $\mathcal{T} > 0$ abbastanza grande tale che

$$E_{cin}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_t(t,x)|^2\, dx \equiv E_{pot}(t) = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x(t,x)|^2\, dx, \qquad \forall\, t > \mathcal{T}.$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi in più variabili 2

18 dicembre 2014

1. Sia $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e periodica di periodo 2π. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi\, k\, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e definiamo

$$\phi(t) = 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi j), \qquad t \in]-\pi, \pi[.$$

Mostrare che è periodica di periodo 2π, definita quasi ovunque su tutto $\mathbb{R}$ e che $\phi \in L^1(-\pi, \pi)$. Calcolare $\widehat{\phi}_n$, il coefficiente di Fourier (complesso) associato alla funzione ϕ in termini di $\mathcal{F}(f)(\xi)$, la trasformata di Fourier di f. Supponendo inoltre che f sia continua e

$$|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \le \frac{C}{(1+|\xi|)^2}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R},$$

calcolare $\phi(0)$ tramite il suo sviluppo in serie di Fourier, esprimendo il risultato in termini di $\mathcal{F}(f)$.

3. Risolvere (con trasformata di Fourier parziale rispetto a x) il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Mostrare poi che la soluzione $u(x,y)$ ha gradiente in $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ se è soddisfatta la condizione

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|\, |\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty.$$

Inoltre se $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (non necessariamente in $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$) allora la soluzione u è classica e $u(x_0, y) \to g(x_0)$ quando $y \to 0^+$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty([0, +\infty[) \cap L^1(0, +\infty)$. La funzione definita con prolungamento pari (riflessione del grafico rispetto alla retta $\{x = 0\}$) risulta continua, ma non derivabile in $x = 0$, a meno che $f'_+(0) = 0$.

Sia quindi definita la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \ge 0, \\ \alpha_1 f(-x) + \alpha_2 f(-x/2) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Scegliere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $F \in C^1(\mathbb{R})$. Dare una stima per la velocità con cui $\widehat{F}(\xi)$ tende a zero per $|\xi| \to +\infty$.

È possibile in analogia definire una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $F_{|x\geq 0} = f(x)$ e $F \in C^k(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$ assegnato?

5. Determinare il momento di inerzia rispetto alla retta generata da e_3 della (porzione di) superficie regolare parametrica (con densità di massa costante e unitaria)

$$\phi : T \to (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^3$$

con $T := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \; u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

19 gennaio 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Per $m \in \mathbb{N}$ definiamo
$$f_{(m)}(t) = f(mt)$$
Calcolare i coefficienti di Fourier complessi
$$\widehat{f_{(m)}}(k)$$
in termini dei coefficienti $\widehat{f}(k)$ della funzione $f(t)$.

2. Sia $Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ e sia $H = L^2(Q)$. Consideriamo
$$V := \big\{u \in H : \ u(x, y) = v(x) \text{ q.o., con } v \in L^2(-\pi, \pi)\big\}$$
Verificare che V è un sottospazio chiuso di H e determinare $V^\perp$ tale che $H = V \oplus V^\perp$. Chiamato P_V il proiettore su V, calcolare
$$P_V(x\,y).$$

3. Determinare l'espressione dei polinomi armonici omogenei di grado n nella variabile $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Calcolare poi il polinomio (giustificare se ne esiste uno solo) armonico omogeneo u di grado 3 con coefficienti unitari per x_1^3 e x_2^3.

   Dimostrare poi che se u è un polinomio armonico omogeneo di grado 2 e M è una matrice 2×2 ortogonale, allora $v(\mathbf{x}) := u(M\mathbf{x})$ è ancora una funzione armonica. La proprietà è vera anche per una funzione armonica u più generale di un polinomio?

4. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}^+$, il flusso nella direzione positiva dell'asse z del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x, y^2, z)$ attraverso la parte $\mathcal{S}$ nel primo ottante della superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \le y \le b$.

5. Risolvere, con il metodo della separazione delle variabili, il problema misto
$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & x \in]0,\pi[, \ t > 0, \\ u(0,x) = g(x) & x \in]0,\pi[, \\ u_x(t,0) = 0 & t > 0, \\ u_x(t,\pi) + u(t,\pi) = 0 & t > 0, \end{cases}$$
con g regolare e periodica di periodo π.
Calcolare poi, se possibile, il limite per $t \to +\infty$ della soluzione.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

12 febbraio 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Dimostrare la seguente formula
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(t) - f(t - \frac{\pi}{n}) \Big] \, \mathrm{e}^{-int} \, dt \qquad 0 \neq n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
per il coefficiente di Fourier complesso n-esimo.

   Usare la (1) per dimostrare il Lemma di Riemann-Lebesgue
$$\lim_{n \to \pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$
   Se oltre alle ipotesi precedenti assumiamo $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, con $0 < \alpha \leq 1$, possiamo dedurre un andamento più preciso per $n \to +\infty$?

2. Sia $H = L^2(0,1)$ e per $f \in H$ definiamo la funzione $\mathcal{T}[f](t) : (0,1) \to \mathbb{R}$ come segue:
$$\mathcal{T}[f](t) := \int_0^1 (2t + f(s))^2 \, ds.$$
   Dimostrare che $\mathcal{T}[f](t) \in H$ e che $\mathcal{T}$ è un operatore continuo da H in H. $\mathcal{T}$ è lineare? Mostrare inoltre che se $\|f\|_H \leq M$ allora
$$\exists\, C > 0 : \qquad \|\mathcal{T}[f](t+h) - \mathcal{T}[f](t)\|_H^2 \leq C h^2,$$
   considerando $\mathcal{T}[f]$ come estesa a zero fuori da $(0,1)$.

3. Sia $u(\mathbf{x}) : W \to \mathbb{R}$ una funzione regolare definita nel settore angolare
$$W := \{(r,\theta) : \ r > 0 \text{ e } 0 < \theta < \theta_0, \text{ con } 0 < \theta_0 < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$
   La funzione u è detta *omogenea* se esiste una funzione regolare $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tale che
$$u(\alpha\mathbf{x}) = b(\alpha) u(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in W, \ \forall\, \alpha > 0.$$
   Dimostrare che esiste una costante γ tale che, se u è omogenea, in coordinate polari
$$u(r,\theta) = r^\gamma \, S(\theta).$$
   Calcolare poi le funzioni omogenee e armoniche su W, che si annullanno per $\theta = 0$ e per $\theta = \theta_0$.

4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera
$$S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$
   e sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro
$$C := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \big(x - \frac{1}{2}\big)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \ z \geq 0 \right\}.$$
   La superficie $S \cap C$ è regolare? Calcolare la sua area.

5. Risolvere, tramite l'uso delle soluzioni fondamentali, il problema al contorno nella semiretta

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & x \in]0,+\infty[,\ t > 0, \\ u(0,x) = g(x) & x \in]0,+\infty[, \\ u(t,0) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

con g regolare.
Considerare poi il caso $g(x) = g_0 \in \mathbb{R}^+$ e calcolare in questo caso $u_x(t,0)$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

18 giugno 2015

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e tale che $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione limitata e continua. Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) = \left(⨏ f(x)\,dx\right)\left(⨏ g(x)\,dx\right) \tag{2}$$
Sugg.: Approssimare f con l'approssimante di Fejér, che nella forma complessa è $\sigma_N[f](x) = \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\widehat{f}_k\, \mathrm{e}^{ikx}\ldots$

2. Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy = 1$ e siano
$$\alpha := \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy \qquad \text{e} \qquad \beta := \int_{0}^{+\infty} g(y)\,dy.$$
Sia f una funzione limitata e continua a tratti. Allora definendo per $\epsilon > 0$ la funzione $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}g(\frac{x}{\epsilon})$ si ha
$$\lim_{\epsilon\to0^+}(f * g_\epsilon)(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-),$$
dove $f(x^\pm) := \lim_{z\to x^\pm} f(z)$.

3. Verificare che la funzione reale $\|\,.\|_1$ definita per un polinomio di grado n a coefficienti e indeterminata complessa $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ tramite
$$\|P(z)\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
definisce una norma e verificare che dati $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ e $Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ allora
$$\|P(z)Q(z)\|_1 \le \|P(z)\|_1\,\|Q(z)\|_1.$$

4. Dimostrare che gli zeri di una funzione armonica $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, non sono mai isolati
Sugg. Ricordare la proprietà della media su sfere per le funzioni armoniche

   Verificare poi che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la proposizione è falsa construendo un controesempio. Trovare infatti la parte immaginaria di una funzione ϕ la cui parte reale è
$$\Re(\phi) = (1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2,$$
in modo che $\Delta\phi = 0$ e nell'origine ci sia uno zero isolato.

5. Sia u soluzione del problema *ai valori finali*
$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & x \in]0,\pi[,\ 0 < t < T, \\ u(T,x) = g(x) & x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(\pi,0) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{3}$$

a Utlizzare il cambio di variabile $t = T - s$ per far diventare il problema uno ai valori iniziali;

b Risolvere (almeno formalmente) con la separazione delle variabili il problema ai valori iniziali e cercare ipotesi sulla g in modo che la formula trovata sia una soluzione;

c Usare il dato iniziale $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ per mostrare che la dipendenza continua dai dati iniziali non vale.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

9 luglio 2015

1. Sia $X = L^2_{uloc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni uniformemente localmente a quadrato sommabile, cioè

$$L^2_{uloc}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ misurabili e tali che } \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_s^{s+1} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}$$

Dire se la funzione $|||\,.\,|||$ definita da

$$|||f|||^2 = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx$$

definisce una norma sullo spazio X.

Sugg. Poterebbe essere utila considerare preliminarmente il caso in cui il limite superiore sia in realtà un limite

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica misurabile e tale che $\|f\|_{L^\infty} \leq M$. Dare una stima della quantità

$$|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_0| \tag{4}$$

in termini di M e discutere se la stima trovata sia ottimale.

Trovare cioè una diseguaglianza e dire se esiste almeno una funzione per cui diventa una uguaglianza

3. Dimostrare che esistono polinomi di grado esattamente n (con coefficiente del termine di grado massimo 1 se $n = 0$ e 2^{n-1} negli altri casi) tali che

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mostrare poi che i polinomi $2^{-1/2}T_0$, T_1, $T_2 \dots$ sono ortonormali su $[-1, 1]$ rispetto al prodotto scalare (prodotto scalare in $L^2(-1, 1)$ con peso)

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, g(x) \, dx.$$

Sugg. Usare induzione e scrivere T_m in funzione dei due precedenti usando le identità trigonometriche

4. Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = y^2 & \text{su } \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

5. Sia u soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \sin(t)\sin(x) & x \in]0,\pi[,\ 0 < t < T, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{5}$$

a) Determinare α in modo che se $u(0,x) = \alpha \sin(x)$ la soluzione sia 2π-periodica in t, cioè

$$u(0,x) = u(2k\pi, x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

b) Sotto le stesse condizioni risolvere il problema con $\sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kt)\sin(x)$ al posto di $\sin(t)\sin(x)$ al lato destro dell'equazione

c) Cosa si può dire se $N = +\infty$?

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi in più variabili 2

18 settembre 2015

1. Consideriamo la funzione di due variabili $u(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2})^\alpha$ e sia $B(0,1) = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.
   (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u \in L^2(B(0,1))$;
   (b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $u, \nabla u \in L^2(B(0,1))$
   (c) Usando la diseguaglianza $\|v\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2}$ valida per tutti i $p < +\infty$ e per le funzioni regolari e nulle su $\partial B(0,1)$ dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta valida la diseguaglianza: esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che
   $$\left| \int_B u\, v\, dx \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^2(B(0,1))}$$
   per ogni funzione v regolare e nulla su $\partial B(0,1)$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica misurabile e $f \in L^1(0,2\pi)$ tale che $f \geq 0$ q.o. Dimostrare che
   $$|a_n| \leq a_0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
   Usando come f il nucleo di Fejér $\sum_{k=-N}^{N} \big(1 - \frac{|k|}{N+1}\big) e^{ikx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$ studiare se la stima è precisa.

3. Sia $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione regolare e a supporto compatto. Sia assegnato $\vec{f} = \text{rot}\, \vec{u}$ e sia div $\vec{u} = 0$. Determinare $\vec{u}$ in termini di $\vec{f}$
   Sugg. Applicare ancora il rotore

4. Sia p un polinomio di grado m in due variabili e sia
   $$P(x) = \int_S f(z) \frac{1-|x|^2}{|x-z|^2}\, d\sigma(z)$$
   la soluzione del problema di Poisson nella palla unitaria
   $$\begin{cases} \Delta P = 0 & x \in B(0,1) \\ P = p & x \in S := \partial B(0,1) \end{cases}$$
   Dimostrare che P si scrive come
   $$P = (1-|x|^2)q + p$$
   con q polinomio di grado minore o uguale a $m-2$.
   Sugg.: Considerare prima i casi $m = 0,1$ e poi ricordare the lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a m ha dimensione finita e l'operatore di Laplace è lineare

5. Trovare la soluzione, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, del problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) + a^2 u(t,x) = 0 & x \in]0,\pi[,\ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & 0 \leq t, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in]0,\pi[, \\ u_t(0,x) = u_1(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases} \tag{6}$$

Corso di Laurea in Matematica
I prova in itinere di Analisi Matematica 3

12 novembre 2015

1. Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ una funzione decrescente e regolare (C^1 a tratti), prolungata poi per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Dimostrare che
$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. Sia, per $\alpha \notin \mathbb{Z}$, definita la funzione $f(x) = \cos(\alpha x)$, per $x \in [-\pi, \pi]$
   a) Calcolare lo sviluppo (reale) di f in serie di Fourier;
   b) Usare la formula ottenuta per scrivere lo sviluppo della cotangente di x per $x = \alpha\pi$;
   c) Integrando termine a termine rispetto ad α arrivare al prodotto (infinito) di Eulero
   $$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$
   d) Uguagliare i coefficienti di x^2 nello sviluppo di Taylor di $\frac{\sin(x)}{x}$ e del prodotto e verificare la formula per la somma della serie armonica generalizzata.

3. Sia $\mathbb{K}$ un convesso chiuso nello spazio di Hilbert $(X, \|\,.\,\|_X)$. Verificare che la proiezione $P_{\mathbb{K}}$ è una funzione uniformemente continua e in particolare
$$\|P_{\mathbb{K}} f - P_{\mathbb{K}} g\|_X \leq \|f - g\|_X \qquad \forall\, f, g \in X.$$
Definiamo poi come caso particolare
$$\mathbb{K} = \left\{ f : (-1, 1) \to \mathbb{R} : \; f \in L^2(-1, 1) \text{ e } f(x) \geq -x^2 + \frac{1}{2} \text{ q.o. } x \in (-1, 1) \right\} \subset L^2(-1, 1)$$
Stabilire se il teorema della proiezione di può applicare e calcolare $P_{\mathbb{K}} f$ se $f(x) = x + \frac{2}{3}$.

4. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno (con condizioni miste) per l'equazione delle onde ($T > 0$, $c \neq 0$)
$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & (t, x) \in (0, \pi) \times (0, T) \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0, x) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = g(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$
Si può immaginare una corda elastica con estremo fissato e uno libero, oppure una colonna di aria posta in vibrazione con una estremità aperta e una chiusa (clarinetto, organo...)

   Risolvere il problema con la separazione delle variabili, descrivendo le ipotesi da fare su f, g. Paragonare gli autovalori e le autofunzioni con quelli del problema di Neumann per le onde (entrambi estremi liberi)

5. Sia $(X, \|\,.\,\|)$ uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(X, X)$ con
$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1$$

Mostrare che $(\mathrm{I} - A)$ è lineare e invertibile e che

$$\|(\mathrm{I} - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$

Sugg. Ricordare la formula per la somma di una progressione geometrica e cominciare dal caso dim $X < \infty$.

Corso di Laurea in Matematica
II prova in itinere di Analisi Matematica 3

17 dicembre 2015

1. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Decomponendola come $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ mostrare che la trasformata di Fourier di f può essere estesa anche a $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Può essere utile considerare l'insieme misurabile A delle $x \in \mathbb{R}$ dove f è maggiore di una assegnata costante positiva.

   Tramite interpolazione si puó mostrare che la trasformata risulta ben definita come mappa lineare da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^{p'}(\mathbb{R})$, con $p' = \frac{p}{p-1}$. Usando le funzioni Gaussiane dare una stima della norma di tale mappa.

2. Siano $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, \ldots, N$ e $N \in \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\left| \sum_{m,n=1, m\neq n}^{N} \frac{a_m b_n}{m-n} \right| \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{N} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2} .$$

   Sugg. Considerare la funzione $f(x) = i\,(\pi - x)$ definita per $x \in]0, 2\pi[$, e prolungata per periodicità e la quantità

$$\int_0^{2\pi} f(x) A(-x) B(x)\, dx$$

   con $A(x) = \sum_{m=1}^{N} a_m \mathrm{e}^{imx}$ e $B(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \mathrm{e}^{inx}$.

3. Sia $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica e non negativa nella palla $B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ di centro zero e raggio $R > 0$. Dimostrare che

$$\frac{R - |x|}{R + |x|}\, u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{R - |x|}\, u(0) \qquad \forall\, x \in B(0, R).$$

   Dedurne che

$$\max_{B(0,R/2)} u \leq 9 \min_{B(0,R/2)} u.$$

4. Trovare una formula esplicita per la soluzione del seguente problema (con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{cases} w_t - \varepsilon w_{xx} + \dfrac{1}{2} w_x^2 = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   cercandola della forma $W = \phi(w)$ per una opportuna $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare, che riconduca il problema a quello del calore.

   Applicarlo poi alla soluzione dell'equazione di Burgers

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} + u u_x = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   ponendo $w(t, x) = \int_{-\infty}^{x} u(t, s)\, ds$ e $h(x) = \int_{-\infty}^{x} u_0(s)$.

5. Sia $\Omega = \{(t,x) : \ 0 < t < T, \ -\infty < x_1 < x < x_2 < +\infty\}$ per qualche $T > 0$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che: a) $u \in C(\overline{\Omega})$; b) $u \in C^2(\Omega)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ in tutti i punti di Ω.

   1) Dimostrare che esiste $(t_0, x_0) \in \partial\Omega$ tale che $u(t_0, x_0) \geq u(t,x)$ per ogni $(t,x) \in \overline{\Omega}$.

   2) Dimostrare poi che se oltre alle ipotesi precedenti $u \in C^2(\Omega_1)$ e $u_t - u_{xx} < 0$ per tutti i punti di Ω_1 per qualche aperto $\Omega_1 \supset \Omega$, allora esiste almeno un punto di massimo assoluto (t_0, x_0) non appartenente al segmento $L = \{(T,x) : \ x_1 < x < x_2\}$.

   3) In analogia col caso del problema di Poisson, dimostrare che la stesso risultato del punto 2) vale, sotto le stesse ipotesi, anche se si ha solamente $u_t - u_{xx} \leq 0$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

20 gennaio 2016

1. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ usando le proprietà della trasformata di Fourier e controllare il risultato ottenuto studiando la funzione $F(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)^2 dx$ in termini del parametro non-negativo t.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e consideriamo la successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho[n(t-x)]\, n\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}}\, dt,$$

dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, è pari e tale che $0 \le \rho(s)$, $\rho(s) = 0$ se $|s| > 1$ e $\int_{\mathbb{R}} \rho(s)\, ds = 1$. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $M \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f_n^{(k)}(x)| \le C_M |x|^{-M} \quad \text{per } |x| \to +\infty.$$

Dimostrare poi che se F è una funzione "regolare" allora

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)F(x)\, dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)F(x)\, dx.$$

3. Risolvere nel rettangolo $Q = \{(x,y):\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ il problema misto

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x) & \text{in } 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = 0,\ u_x(a,y) = 0 & \text{in } 0 \le y \le b, \end{cases}$$

dove $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = g'(a) = 0$.

4. Studiare il problema non omogeneo per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

In particolare, fissato il parametro $s \in \mathbb{R}$ definiamo $v(t,x,s)$ come soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x;s) - \Delta v(t,x;s) = 0 & \text{in } (s,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v(t,x;s) = 0 & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n, \\ v_t(t,x;s) = f(s,x) & \text{in } \{t = s\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Mostrare allora che la soluzione u è data

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x;s)\, ds.$$

Applicarlo poi al caso uni-dimensionale, scrivendo la soluzione in forma esplicita usando la formula di D'Alembert.

5. Siano p e $\mathcal{P}$ due polinomi in una variabile reale. Mostrare che le due seguenti affermazioni sono equivalenti

   i) $\mathcal{P}(x) = p(x) - p^{(2)}(x) + p^{(4)}(x) - p^{(6)}(x) + \dots \qquad \forall\, x \in \mathbb{R};$

   ii) $p(x) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}''(x);$

   dove $p^{(k)}(x) = \frac{d^k p(x)}{dx^k}$.

   Siano p e $\mathcal{P}$ come sopra. Mostrare poi che

$$\int p(x)\sin(x)\,dx = \mathcal{P}'(x)\sin(x) - \mathcal{P}(x)\cos(x) + C.$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

10 febbraio 2016

1. Si determini lo sviluppo in serie (di seni e coseni) di Fourier della funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad x \in [-\pi, \pi[.$$
Si usi il risultato ottenuto per calcolare
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-1/(16x)} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
studiando
$$H(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x-a/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad a > 0$$
tramite derivazione sotto il segno di integrale e la sostituzione $x = a/t$.

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Dimostrare che
$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{f(s)}{s} \right|^2 ds \le 4 \int_0^{+\infty} |f'(s)|^2 \, ds,$$
ricordando che $\frac{f(s)}{s} = \frac{1}{s} \int_0^s f'(t)\,dt$ e usando i cambi di variabile $s = \mathrm{e}^\sigma$, $t = \mathrm{e}^\tau$ per ricondursi ai teoremi sulla convoluzione.

4. Si consideri il problema ai valori iniziali e al contorno
$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = g(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u_t(t,x) = h(x) & (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\} \end{cases}$$
e lo si risolva con tramite la formula di D'Alembert (dopo aver definito un problema opportuno per $x \in \mathbb{R}$). Si interpreti il risultato ottenuto nel caso $h = 0$.

5. Sia
$$B^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0 \right\}$$
e sia $u \in C^2(B^+) \cap C(\overline{B^+})$ armonica e tale che $u(x,0) = 0$. Dimostrare che la funzione $\tilde{u}$ ottenuta estendendo per riflessione dispari rispetto all'asse delle x è ancora armonica in tutta la palla unitaria B.

   Applicare poi tale risultato per risolvere il problema
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^+ \\ u = y & \text{su } \partial B^+ \end{cases}$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

22 giugno 2016

1. Sia
$$X = \{f \in C([0,1]) :\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$$
e consideriamo la applicazione T definita da
$$[Tf](x) = \begin{cases} f(3x)/2 & 0 \le 3x \le 1 \\ 1/2 & 1 < 3x < 2 \\ 1/2 + f(3x-2)/2 & 2 \le 3x \le 3 \end{cases}$$
Mostrare che a) $T : X \to X$; b) T è una contrazione (in realtà è Lipschitziana); c) esiste un unico punto fisso di T.

   Chiamata $d(x)$ la funzione tale che $d(x) = [Td](x)$ per ogni $x \in [0,1]$ calcolare, se esistono, i punti dove $g'(x) = 0$.

2. Sia per $0 < \epsilon < \pi/2$ la funzione $g_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π tale che
$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon} & \text{se } x \in [-\epsilon, \epsilon], \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \backslash [-\epsilon, \epsilon], \end{cases}$$
Calcolare la serie di Fourier complessa di g_ϵ e calcolare $\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{g_\epsilon}(m)$. Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(x - a) f(x)\, dx$ per f funzione continua e discutere il limite $\epsilon \to 0^+$, anche in relazione con i coefficienti di Fourier.

3. Sia $\psi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue
$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
consideriamo le funzioni
$$\psi_{m,n} := 2^{-m/2} \psi(2^{-m} x - n) \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$
Dimostrare che
$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{m,n}(x) \psi_{m',n'}(x)\, dx = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \qquad \forall\, m, m', n, n' \in \mathbb{N}.$$

4. Risolvere, per $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
$$\Delta u = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \alpha > 1$$

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,1)$ una successione tale che esiste una costante C in modo che $\|f_n\| \leq C$. Dimostrare che esiste una sotto-successione estratta $\{f_{n_k}\}$ e esiste $f \in L^2(0,1)$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_{n_k}(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad \forall\, g \in L^2(0,1).$$

Per la dimostrazione seguire la seguente traccia: fissare un insieme denso $\{\phi_j\} \subset L^2(0,1)$ e considerare $\int_0^1 f_n\phi_j\,dx$ in modo da identificare (tramite procedimento diagonale) un limite. Usare poi la densità dei ϕ_j e il teorema di rappresentazione di Riesz per concludere determinando f e la convergenza quando si moltiplica scalarmente per ogni $g \in L^2(0,1)$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 luglio 2016

1. Siano $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, dove $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione continua e che $\|f * g\|_\infty \leq C\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

2. Calcolare per $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(x) = f(|x|)$ quanto vale (per $x \neq 0$) il bi-Laplaciano $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$. Trovare poi le soluzioni di
$$\Delta^2 f(|x|) = 0 \qquad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3.$$

3. Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, con $n \geq 3$. Dimostrare che
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\, dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{n-2} \|\nabla f\|_{L^2}$$
Sugg. Si consideri la quantità $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$ applicata alla funzione $|x|^{-2}$ e si integri per parti $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2}\, dx$.

4. Sia dato $1 \leq p \leq \infty$ e $C > 0$. Sia $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\, dy \leq C \qquad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\, dx \leq C.$$
Dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione Tf
$$Tf(x) := \int_{R^n} K(x,y)\, f(y)\, dy$$
risulta ben definita quasi ovunque e $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

5. Sia $u \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Per $x \in \Omega$ dimostrare che
$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{4}{r^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} u(x + ry)\, dS_y - u(x) \right]$$
Sugg. Considerare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di u e usare argomenti di simmetria per verificare che $\int_{\partial B(0,1)} y_j\, dS_y = 0$ e $\int_{\partial B(0,1)} y_j y_k\, dS_y = \pi\delta_{jk}$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 settembre 2016

1. Sia data l'equazione
$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0 \quad (x,y) \in R := (0,\pi) \times (0,1),$$
e sia $u \in C(\overline{R}) \cap C^2(R)$ soluzione tale che $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ per $0 \leq y \leq 1$. Mostrare che per certi valori dei dati su $\{y = 0\}$ non esistono soluzioni.

2. Sia X uno spazio di Hilbert reale e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione ortonormale. Dimostrare che $\{e_n\}$ converge debolmente a zero, cioè che
$$\lim_{n\to+\infty} \langle x, e_n \rangle = 0 \qquad \forall x \in X.$$

3. Trovare le soluzioni dell'equazione del calore $u_t - \nu u_{xx} = 0$ della forma $u(t,x) = v(x/\sqrt{t})$

4. Consideriamo l'operatore Δ_h *differenza finita* definito, per $h \neq 0$, da
$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$
Dimostrare che
$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k\,h) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Dimostrare poi che, se f è regolare, allora
$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n}.$$

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Costruire $f \in C_c^\infty(\Omega)$ che vale 1 su $K \subset \Omega$ compatto e tale che $0 \leq f \leq 1$.

Corso di Laurea in Matematica
(preappello) Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2016

1. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, e tale che $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty$. Mostrare che, fissati $0 < a < b < 2\pi$ si ha
$$f * \chi_{[a,b]} \in L^\infty(\mathbb{R}).$$
Mostrare inoltre che $f * \chi_{[a,b]} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R})$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo 1. Sia $y_n(t)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_n(t) = f(n\, t)\, y_n(t) \\ \\ y_n(0) = 1. \end{cases}$$
Calcolare, se esiste,
$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

3. Si consideri per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la successione di funzioni $\{f_n\}$ definite come
$$f_n(x) := \mathrm{sgn}[\sin(2^n \pi x)], \qquad \text{for } x \in [0, 1].$$
Mostrare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0, 1)$.
Discutere se $\{f_n\}$ è un sistema completo.
Sugg.: Può essere utile considerare la funzione
$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1] \\ \\ -1 & x \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

4. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Dimostrare che se $u > 0$, allora u è costante.
Sugg.: Usare la proprietà della media sui volumi
Il risultato è vero se u è armonica e positiva con $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$?

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali
$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{txx} - \beta^2 u_{xx} = 0 & (t, x) \in]0, T[\times]0, \pi[, \\ \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in]0, T[, \\ \\ u(0, x) = \sin^3(x) & x \in]0, \pi[, \end{cases}$$
dove $T \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$. Si può caratterizzare il comportamento per $t \to +\infty$ della soluzione?

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

25 gennaio 2017

1. a) La funzione $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ è periodica?
   b) La funzione di classe C^1 definita come $g(x) := \cos(x^2)$ è periodica?
   c) Sia data una funzione h, non necessariamente derivabile, periodica di periodo 2π. La funzione $h(x^2)$ risulta periodica?

2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{8}{(1+x^2)(9+x^2)}.$$

Sugg. Calcolare preliminarmente la trasformata di $e^{-|y|}$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|^{2/3}} & |x| > 1 \end{cases}$$

Si discuta, usando il decadimento all'infinito di f e in particolare se $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * f \in L^2(\mathbb{R})$ e se $f * f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sugg. "Spezzare" l'integrale che definisce la convoluzione usando $-x/2$, $x/2$, *e* $3x/2$

4. Sia $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione armonica (dove il Laplaciano di un vettore è definito come il Laplaciano componente per componente). Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto (x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)$$

è armonica.

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & x \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = \sin(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

Caratterizzare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione.

1. a) La funzione $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ è periodica?

   b) La funzione di classe C^1 definita come $g(x) := \cos(x^2)$ è periodica?

   c) Sia data una funzione h, non necessariamente derivabile, periodica di periodo 2π. La funzione $h(x^2)$ risulta periodica?

2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{8}{(1+x^2)(9+x^2)}.$$

   Sugg. Calcolare preliminarmente la trasformata di $\mathrm{e}^{-|x|}$

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|^{2/3}} & |x| > 1 \end{cases}$$

   Si discuta, tenendo conto del decadimento all'infinito di f e in particolare se $f \in L^p$, se $f * f \in L^2(\mathbb{R})$ e se $f * f \in L^1(\mathbb{R})$.

   Sugg. "Spezzare" l'integrale che definisce la convoluzione usando $-x/2$, $x/2$, *e* $3x/2$

4. Sia $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione armonica (dove il Laplaciano di un vettore è definito come il Laplaciano componente per componente). Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto (x \cdot \nabla)\, \mathbf{u}(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)$$

   è armonica.

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x(\pi - x) & x \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ u(t,0) = u(t,0) & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = \sin(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

   Caratterizzare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

15 febbraio 2017

1. Studiare la convergenza della serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

e calcolarne poi la somma per $x = \pi/3$.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx$$

Sugg. Iniziare con la sostituzione $y = x^{-1}$

3. Si consideri l'equazione delle onde con condizioni di Neumann omogenee e dove tutti i dati sono a media nulla su $[0, \pi]$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times (0, \pi) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = u_1(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

e si scriva la soluzione in termini di u_0 e u_1 tali che

$$\int_0^{\pi} |u_0'(x)|^2\, dx = \|u_0\|_V^2 < \infty \qquad \int_0^{\pi} |u_1(x)|^2\, dx = \|u_1\|_H^2 < \infty.$$

Definita $E_0 := \frac{1}{2}\Big(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi} \|u_x(0, x)\|^2 + \int_0^{\pi} \|u_t(0, x)\|^2\Big)$ si mostri che se $T \geq 2\pi$ esistono c_1, $c_2 > 0$ tali che

$$c_1 E_0 \leq \int_0^T |u_t(s, 0)|^2\, ds \leq c_2 E_0.$$

4. Si trovino, se esistono, condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione f regolare, affinchè si possa trovare una funzione armonica $u :]0, L[^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u_x(0, y) = u_x(L, y) = u_y(x, 0) = 0 \qquad u_y(x, L) = f(x).$$

5. Sia per $\alpha > 0$ dato l'operatore $A = I - \alpha^2 \Delta$ con dominio le funzioni regolari $u :] - \pi, \pi[^3 \to \mathbb{C}$ che sono 2π-periodiche rispetto alle direzioni coordinate e sono a media nulla. Sia poi $G = A^{-1}$ e si definisca, per $N \in \mathbb{N}$

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} (I - G)^n$$

Scrivere in termini delle variabili di Fourier sia A che D_N e dimostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$, l'operatore D_N è lineare e continuo da $L^2(] - \pi, \pi[^3)$ in se stesso.

Calcolare la norma operatoriale $\|D_N\|$ e caratterizzare, se possibile, il limite di D_N per $N \to +\infty$

1. Studiare la convergenza della serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

e calcolarne poi la somma per $x = \pi/3$.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx$$

3. Si consideri l'equazione delle onde con condizioni di Neumann omogenee

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,\pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,\pi) \\ u_t(0,x) = u_1(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

e si scriva la soluzione in termini di u_0 e u_1 tali che

$$\int_0^{\pi} |u_0(x)|^2\, dx = \|u_0\|_H^2 < \infty \qquad \int_0^{\pi} |u_1'(x)|^2\, dx = \|u_1\|_V^2 < \infty.$$

Definita $E_0 := \frac{1}{2}\Big(\|u_0\|_H^2 + \|u_1\|_V^2\Big)$ si mostri che se $T \geq 2\pi$ esistono c_1 e c_2 tali che

$$c_1 E_0 \leq \int_0^T |u_t(s,0)|^2\, ds \leq c_2 E_0.$$

4. Si trovino, se esistono, condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione f regolare, affinchè si possa trovare una funzione armonica $u :]0,L[^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u_x(0,y) = u_x(L,y) = u_y(x,0) = 0 \qquad u_y(x,L) = f(x).$$

5. Sia dato l'operatore $A = I - \alpha^2\Delta$ con dominio le funzioni $u :]-\pi,\pi[^3 \to \mathbb{C}$ che sono 2π-periodiche rispetto alle direzioni coordinate e sono a media nulla. Sia poi $G = A^{-1}$ e si definisca, per $N \in \mathbb{N}$

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} (I - G)^n$$

Scrivere in termini delle variabili di Fourier sia A che D_N e dimostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$, l'operatore D_N è lineare e continuo da $L^2(]-\pi,\pi[^3)$ in se stesso.

Calcolare la norma operatoriale $\|D_N\|$ e caratterizzare, se possibile, il limite di D_N per $N \to +\infty$

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

21 giugno 2017

1. Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale convergente a $s \in \mathbb{R}$. Dimostrare che
$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n s_n = s. \tag{7}$$
Trovare una successione tale che $\lim_n s_n$ non esiste, ma il limite in (7) esiste.

   Data una funzione f periodica di periodo 2π e sia $S_n(f)(\theta)$ la sua serie parziale di Fourier; dimostrare che
$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} \mathrm{e}^{in\theta} \qquad 0 \le r < 1.$$

2. Sia $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ per qualche $R > 0$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che per ogni $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che $\mathrm{rot}\Phi = 0$ la formula
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \Phi(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}\, dt$$
definisce una funzione di classe $C^{k+1}(\Omega)$ che risolve $\Phi = \nabla\psi$.

   Data una $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che div $\Phi = 0$ trovare una formula analoga che definisce una Ψ regolare che risolve
$$\Phi = \mathrm{rot}\ \Psi.$$

3. Dimostrare che per $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema al contorno
$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda < \delta, u > & x \in]0,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$
ammette sempre una soluzione. Inoltre esiste uno e uno solo $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che ne ammette due distinte. (Con il simbolo δ si denota la delta di Dirac centrata in $x_0 = 0$).

4. Sia $(H, \|\,.\,\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{u_n\} \subset H$ un sistema ortonormale completo. Sia $\{v_n\} \subset H$ un sistema ortonormale tale che
$$\|u_n - v_n\|_H \le \frac{1}{2^{n+2}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Dimostrare che anche $\{v_n\}$ è completo.

5. Sia dato $r_0 \in (0,1)$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'anello
$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ r_0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}.$$
Si risolva il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{se } x^2+y^2 = r_0^2 \\ u = f(\theta) & \text{se } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$
con $f(\theta)$ regolare e 2π-periodica.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 luglio 2017

1. Sia $\{a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ una matrice infinita di numeri reali tali che

   i) $\lim_{m\to+\infty} a_{mn} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

   ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$;

   iii) $\exists\, C \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \le C \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.

   Mostrare che

   (a) l'applicazione A
   $$\{x_k\} \mapsto \{A_k\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n$$
   è lineare e continua nello spazio l^∞ delle successione limitate.

   (b) Se $\lim x_n = x$ allora $\lim_{m\to+\infty} A_m = x$.

   (c) Il punto b) vale anche se la condizione $ii)$ viene sostituita da $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log(x))^2} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
   Si dimostri che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si consideri poi $f_\epsilon(x) = (\rho_\epsilon * f)(x)$ la mollificata con un nucleo di Friederichs a supporto compatto. e si definisca
   $$F(x) := \sup_{0<\epsilon<1} f_\epsilon(x).$$
   Si dimostri che $F(x) \notin L^1(\mathbb{R})$.
   Sugg. Si usi la diseguaglianza $F(x) := \sup_{0<\epsilon<1}(\rho_\epsilon * f)(x) \ge (\rho_{2x} * f)(x)$

3. È ben noto che le soluzioni non banali di $y'' + y = 0$ hanno al più un numero finito di zeri in qualsiasi intervallo finito. Dimostrare che se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e
   $$q(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
   allora per ogni intervallo finito $[a, b]$, ogni soluzione non banale di
   $$z''(x) + q(x)\, z(x) = 0$$
   ha al più un numero finito di zeri in $[a, b]$.

4. Sia $(H, \|\,.\,\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} subset H$ un sistema ortonormale. Dimostrare che $x_n \rightharpoonup 0$, cioè che
   $$\lim_{n\to+\infty} (x_n, h) = 0 \qquad \forall\, h \in H.$$
   Sia poi dato $x \in H$ tale the $\|x\|_H = \frac{1}{2}$. Costruire una successione di elementi $y_n \in H$ tali che
   $$\|y_n\| = 1 \qquad \text{e} \qquad y_n \rightharpoonup x \quad (\text{ cioè } \lim_{n\to+\infty}(y_n, h) = (x, h) \qquad \forall\, h \in H).$$

5. Risolvere, per $U \in \mathbb{R}$, con la separazione delle variabili, il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{in } 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0, \\ u_x(\pi,t) = U & t > 0. \end{cases}$$

Discutere poi se per $U \neq 0$ può esistere una soluzione stazionaria $u_\infty = u_\infty(x)$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

20 settembre 2017

1. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori unitari e linearmente indipententi in uno spazio di Hilbert H. Si consideri il vettore
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$
   i) Assumendo che i vettori u_n siano anche ortonormali si dimostri che l'insieme $S = \{y, u_1, u_2, u_3, ...\}$ è linearmente indipendente.
   ii) Si mostri che se i vettori u_n non sono mutualmente ortogonali l'insieme S può essere linearmente dipendente.

2. Siano $f, g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Dimostrare che
$$|f\, g|_{\alpha} \leq (|f|_{\infty}|g_{\alpha} + |f|_{\alpha}|g|_{\infty}),$$
$$\|f\, g\|_{\alpha} \leq c\|f\|_{\alpha}\|g\|_{\alpha},$$
dove $|\,.\,|_{\infty}$ è il sup, $|\,.\,|_{\alpha}$ la semi-norma di Hölder, mentre $\|\,.\,\|_{\alpha} = |\,.\,|_{\infty} + |\,.\,|_{\alpha}$ è la norma di Hölder.
Cosa si può dire di $g \circ f$?

3. Sia $f \in L^1(-\pi, \pi)$, si dimostri che per ogni coppia (a, b) tale che$-\pi < a < b < \pi$ si ha
$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^b S_N f(x)\, dx = 0,$$
dove $S_N f$ è la somma parziale di Fourier.

4. Sia $(H, <\ .\,,\,.\ >)$ uno spazio di Hilbert e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una successione tale che
$$< x_n, x_n > \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \forall\, y \in H : \lim_{n\to+\infty} < y, x_n >= 0.$$
Si dimostri che è possibile trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che le medie di Cesàro convergono fortemente a zero, cioè
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n_i} = 0$$
Sugg. Considerare la quantità $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} = s_{k-1} + x_{n_k}$ e applicare induzione.

5. Dato il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 & \text{in } 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{in } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 0 & t > 0, \\ u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$
   a) Determinarne la soluzione stazionaria $u^S = u^S(x)$ che soddisfa le condizioni al bordo.
   b) Mostrare che $u(x,t) \leq u^S(x)$ per $t > 0$ (possibilmente senza risolvere esplicitamente il problema).
   e) risolvendo il problema con il metodo di separazione delle variabili dedurre che $u(x,t)$ tende a $u^S(x)$ per $t \to +\infty$, uniformemente su $[0, 1]$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2017

1. Verificare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale l'identità
$$z\overline{w} = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 + i|z+iw|^2 - |z-w|^2 - i|z-iw|^2\right) \tag{8}$$
e usarla per dimostrare che per $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ vale
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\,\overline{\widehat{g}_k},$$
dove $\widehat{f}_k\,\widehat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier della f e della g, rispettivamente.
Dedurre la stessa uguaglianza studiando le proprietè della convoluzione tra f e $\overline{g(-x)}$.

2. Sia $J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}$ con $p \geq 0$ soluzione dell'equazione del secondo ordine
$$J_p''(x) + \frac{1}{x}J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J_p(x) = 0$$
e siano $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i suoi zeri che sono distinti e positivi. Verificare che
$$\int_0^1 x\,J_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2}[J_{p+1}(\lambda_n)]^2 & \text{se } m = n \end{cases}$$
Sugg. Per l'ortogonalità osservare che se $u(x) = J_p(ax)$ con $a > 0$ allora
$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0$$
Per calcolare il secondo integrale ricordare l'identità $J_p'(x) - \frac{p}{x}J_p(x) = J_{p+1}(x)$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e con supporto contenuto in $(-1, 1)$. La funzione $F(x_1, x_2) = x_2 f(x_1)$ è tale che
$$F(x_1, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, 0) = f(x_1)$$
e pertanto la funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \to R^2$
$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial F}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$
risulta formalmente tale che $\mathrm{div}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0$ per $x_2 > 0$ e $\phi_1(x_1, 0) = f(x_1)$.
Spiegare perchè risulta vero solo formalmente e studiare cosa accade con l'estensione ottenuta, per $x_2 > 0$, tramite
$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2\,(f * \rho_{x_2})(x_1) = x_2\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{x_2}\rho\left(\frac{x_1 - y}{x_2}\right)\,dy,$$
dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ è l'usuale funzione usate per costruire i mollificatori e $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\rho(x\epsilon^{-1})$.

4. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcolare la norma $L^2(\mathbb{R})$ di $f * f$.

5. Risolvere il problema al contorno in due dimensioni

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } x^2 + y^2 = 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 8\cos^3(\theta) & \text{in } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

la soluzione è unica? Cosa si può dire se il dato di Neumann sulla circonferenza interna viene cambiato in $\frac{\partial u}{\partial n}(1, \theta) = \cos^2(\theta)$?

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

22 gennaio 2018

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Si può verificare che la successione $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge, se non quando $z = 1$. Studiare però il limite
$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{z^M + z^{M+1} + \cdots + z^{N-1}}{N-M}.$$
Sia poi $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice unitaria. Mostrare che
$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} U^n f = Pf \qquad \forall\, f \in \mathbb{C}^n,$$
dove P è il proiettore sul sottospazio invariante $H \subseteq \mathbb{C}^n$ dei vettori tali che $Uf = f$.
Sugg. Dimostrare che se $\mathbb{C}^n = H \oplus Y$*, dove* Y *è lo span dei vettori della forma* $Ug - g$.

2. Sia $0 < p < 1$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e si consideri
$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{misurabile e t.c.} \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < \infty \right\}.$$
Mostrare che la quantità $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ non è una norma quando $0 < p < 1$.
Mostrare che però vale la diseguaglianza
$$\forall\, p \in (0,1) \qquad \|f+g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \qquad \forall\, f, g \in L^p(\Omega)$$

3. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ (non-negativa tale che $\mu(\mathbb{R}) = 1$) e si definisca la funzione $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come
$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} d\mu(x).$$
a) Mostrare che $\widehat{\mu} \in C_b(\mathbb{R})$. Si ha che $\widehat{\mu} \to 0$ per $\xi \to +\infty$?
La funzione continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice definita positiva se la matrice $A_{jk} := F(x_j - x_k)$ è definita positiva per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni scelta dei punti $x_n \in \mathbb{R}$ (con $n = 1, \ldots, N$) si ha
$$\sum_j \sum_k F(x_j - x_k)\overline{u}_j u_k \ge 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{C}^N.$$
b) Mostrare che $\widehat{\mu}$ è definita positiva.

4. Si consideri lo spazio di Hilbert $X = L^2(0, +\infty)$ e sia $A : X \to X$ definito da
$$(Au)(x) = 2u(x+1).$$
   a) Si dimostri che A è lineare e limitato e se ne calcoli la norma;
   b) Si determinino $Ker(A)$ e $Im(A)$;
   c) Si determini A^*, l'aggiunto di A.

5. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger in n-dimensioni ($n \geq 1$) e con condizioni periodiche rispetto a tutte le variabili

$$\begin{cases} i\, u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n, \\ \\ \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{in } \mathbb{T}^n. \end{cases}$$

Sia $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, si scriva la soluzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ e si studi poi l'equazione di bilancio della norma $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Si consideri poi il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} i\, u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \\ \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si trovi una soluzione tramite la trasformata di Fourier.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 febbraio 2018

1. Sia l^1 lo spazio delle successioni complesse con la norma $\|x\|_{l^1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Data una successione di numeri complessi $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si consideri l'operatore lineare da l^1 in se stesso
$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$$
Se ne calcoli la norma.
Si consideri poi l'operatore esponenziale
$$\mathrm{e}^{tA}x = (\mathrm{e}^{t\lambda_1}x_1, \mathrm{e}^{t\lambda_2}x_2, \dots)$$
e se ne calcoli la norma.
Può la norma $\|A\|$ essere infinita, ma al tempo stesso essere finita la norma $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ per ogni $t \geq 0$?

2. Sia
$$V := \Big\{ v \in L^2(-1,1) : \ (1-x^2)^{1/2} v' \in L^2(-1,1) \Big\}$$
Verificare che
$$\langle u, v\rangle_V = \int_{-1}^{1} u\, v + (1-x^2) u'\, v'\, dx$$
definisce un prodotto scalare. Studiare, per $f \in L^2(-1,1)$ il problema variazionale
$$\langle u, v\rangle_V = \int_{-1}^{1} f\, v\, dx$$
e interpretarlo in senso forte.

3. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno
$$\begin{cases} y u_{xx} + u_y = 0 \\ u(0,y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$
e discutere quando la soluzione sia una soluzione regolare del problema.

4. Mostrare, con la separazione delle variabili che il problema al contorno
$$\begin{cases} g(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + h(x)u \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \end{cases}$$
porta a un systema di Sturm-Liouville, se i coefficienti sono regolari e con segni determinati. Si determini la soluzione formale del problema.

5. Calolare per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ il valore dell'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$$
Sarà utile considerare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica di un intervallo.

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

6 giugno 2018

1. Data la serie non convergente $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$, si calcoli
$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{-ak}.$$
In maniera analoga si provi a dare senso a $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$ tramite
$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx.$$
Più in generale si studi per $\phi\in C^\infty([0,\infty))$, con $\phi,\phi'\in L^1(\mathbb{R}^+)$ il limite
$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \sin(x)\phi(ax)\,dx.$$

2. Si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier della funzione
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\log|x|)^2} & \text{per } 0<|x|<\mathrm{e}^{-3},\\[2ex] 0 & \text{per } x=0 \text{ e per } \mathrm{e}^{-3}<|x|<\pi.\end{cases}$$

3. Si consideri il problema ai valori iniziali con condizioni periodiche in $x\in(-\pi,\pi)$
$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+u_{xxxx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\,\mathrm{e}^{ikx} & (x,t)\in(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}^+,\\[2ex] u(x,0)=0,\end{cases}$$
e discutere, al variare di g_k, quando la soluzione risulta limitata per $t>0$.

4. Si consideri l'operatore $L=-u_{xx}-4u$ per $x\in(0,\pi)$. Si mostri che la corrispondente forma bilineare
$$B(u,v)=\int_0^\pi u_xv_x-4uv\,dx,$$
non è definita positiva nello spazio delle funzioni nulle al bordo e a quadrato sommabile assieme alle derivate prime.

   Mostrare inoltre che il problema al contorno
$$\begin{cases} -u_{xx}-4u=\sin(2x) & x\in]0,\pi[,\\[2ex] u(0)=u(\pi)=0,\end{cases}$$
non ha soluzione (debole). In particolare usare una opportuna v per mostrare che $B(u,v)\neq\int_0^\pi uv\,dx$.

5. Determinare $a,b\in\mathbb{R}$ in modo che chiamata $f(x)=(a+bx^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ si abbia
$$\widehat{f}(x)=\sqrt{2\pi}f(x)\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

11 luglio 2018

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Mostrare che in generale la convoluzione con una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e anche continua non produce una funzione continua.

   Sugg. considerare $f * f$

2. Sia per $0 < \alpha \leq 1$ data $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, e sia ρ un mollificatore. Mostrare che per $\epsilon \to 0$
$$\|u^2 * \rho_\epsilon - (u * \rho_\epsilon)^2\|_{L^\infty} \to 0$$
   stimandone, se possibile, l'ordine di convergenza in funzione in ϵ in termini di α.

3. a) Si consideri l^∞ lo spazio di Banach delle successioni reali limitate. Si consideri la funzione $S : l^\infty \to \mathbb{R}$ definita da
$$Sx = \limsup_{n\to\infty} x_n$$
   risulta lineare?

   b) Si consideri poi la funzione T definita da
$$Tx = \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} x_n + \frac{1}{2} \limsup_{n\to+\infty} x_n,$$
   e si determini se è lineare.

   Per il punto b) può essere utile utilizzare la successione $x_n = (n \bmod 3)$.

4. Usando l'identità
$$a_N b_N - a_M b_M = \sum_{i=M+1}^{N} a_i(b_i - b_{i-1}) + \sum_{i=M+1}^{N} b_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \qquad M < N,$$
   studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n\geq 2} \frac{e^{inx}}{\log(n)}$$

5. Chiamato G nucleo Gaussiano
$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$
   (con $G = 0$ per $t < 0$) uni-dimensionale, allora $G(0, t-s)$ rappresenta la concentrazione in $x = 0$, al tempo $t > s$ di una sorgente di intensità unitaria situata in $x = 0$ all'istante $t = s$.

   Determinare, se è presente una sorgente (tipo inquinante) in $x = 0$ di intensità
$$q(t) = \begin{cases} Q \in \mathbb{R}^+ & 0 < t < T \\ 0 & t > T, \end{cases}$$
   la concentrazione nel punto $x = 0$ al tempo t e il comportamento asintotico per $t \to +\infty$.