CORSO: **Analisi Matematica 1**
ANNO ACCADEMICO: **2024-25**
DOCENTI: **Giovanni Alberti, Alessandra Pluda**
CODICE ESAME: **561AA**
NUMERO DI CREDITI: **15**
NUMERO DI ORE: **120**
CORSO DI STUDIO: **Matematica triennale (MAT-L)**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile e delle equazioni differenziali lineari.

Struttura del corso. Il corso è diviso in due parti: "Calcolo" e "Analisi". Lo scopo della prima parte è familiarizzare lo studente con l'uso di derivate ed integrali per funzioni di una variabile; particolare attenzione viene dedicata alle applicazioni di questi strumenti, quali lo studio qualitativo dei grafici di funzioni, il calcolo di aree e volumi, e la risoluzione di alcune classi di equazioni differenziali. La seconda parte del corso è dedicata invece alle basi teoriche dell'Analisi Matematica, dalla completezza dei numeri reali e teoremi collegati, all'integrazione secondo Riemann e alla teoria delle serie.

Programma del corso [versione: 4 agosto 2024].
Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI BASE
   - Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
   - Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ
   - Funzioni continue; definizione, proprietà di base e continuità delle funzioni elementari (le dimostrazioni sono rimandate alla seconda parte del corso).
   - Limiti di funzioni: definizione, significato, proprietà di base.

3. DERIVATE
   - Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate (dimostrazioni parziali, cf. seconda parte del corso).
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital (dimostrato nella seconda parte del corso). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
   - Sviluppo di Taylor di una funzione; rappresentazione del resto di Taylor come "o piccolo" e "o grande" (formule del resto di Peano). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
   - Massimo e minimo di un insieme di numeri reali; valore massimo e valore minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme dato da un'unione finita di intervalli; estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione.

- Nei punti di massimo e minimo locali interni al dominio la derivata (se esiste) vale zero. Procedura per la determinazione del valore massimo e minimo (oppure dell'estremo superiore ed inferiore dei valori) di una funzione continua definita su un'unione finita di intervalli (la giustificazione completa è rimandata al secondo semestre).
- Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata; funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda (dimostrazioni parziali, cf. seconda parte del corso). Disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (dimostrazione parziale, cf. seconda parte del corso).
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali. Primitive delle funzioni razionali.
   - Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
   - La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
   - Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: esempi e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque: teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione); struttura dell'insieme delle soluzioni; risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annichilatori; variazione delle costanti.

Seconda parte: Analisi.

6. Basi di teoria degli insiemi.
   - Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \to B$ intese come grafici. L'insieme B^A delle funzioni da A ad B; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un insieme A.
   - Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
   - Insiemi finiti e infiniti, numerabili e più che numerabili.
   - L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili; i numeri reali sono più che numerabili. Insiemi con uguale cardinalità.

7. Completezza dei numeri reali
   - I numeri reali estesi. Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
   - *Insiemi ordinati (parzialmente o totalmente); definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato; definizione di estremo superiore ed inferiore; assioma di completezza ed equivalenza con l'esistenza dell'estremo superiore/inferiore; definizione di insieme ordinato completo. Definizione di campo ordinato; caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. Successioni di numeri reali
   - Limite di una successione di numeri reali; possibili comportamenti di una successione.
   - Le successioni monotone hanno limite.
   - Caratterizzazione delle successioni convergenti (con limite finito) come successioni di Cauchy.

- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.
- Limite inferiore (liminf) e limite superiore (limsup) di una successione.
- Successioni definite per ricorrenza; formula esplicite per successioni definite da ricorrenze lineari. *Successione di Fibonacci.*

9. Funzioni continue
   - Rivisitazione della definizione di continuità e di limite di una funzione in termini di intorni.
   - Caratterizzazione della continuità di una funzione in termini di limiti.
   - Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
   - Teorema di esistenza degli zeri (e dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
   - Teorema di Weierstrass: esistenza dei punti di massimo e minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso. Giustificazione della procedura per la ricerca dei massimi e dei minimi vista nella prima parte del corso.
   - Le funzioni continue e strettamente monotone su un intervallo hanno inversa continua.

10. Derivate
    - Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta, della funzione inversa.
    - Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
    - Uso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati nella prima parte del corso: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata; teorema di de L'Hôpital.
    - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. Integrale secondo Riemann
    - Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor: una funzioni continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.
    - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
    - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni dettagliate). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
    - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.
    - *Rappresentazione del fattoriale come integrale improprio e formula di Stirling (con cenno di dimostrazione).*

13. Serie numeriche
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
    - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
    - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.

14. Serie di potenze

- Serie di potenze: definizione, raggio di convergenza, comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).
- Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di* $\pi/4$ *come serie.*

Prerequisiti. Una solida conoscenza delle parti *essenziali* del programma di matematica comune alla maggior parte delle scuole superiori. All'inizio del corso è previsto un veloce ripasso di alcuni argomenti fondamentali. Per la teoria delle equazioni differenziali lineari è necessaria la conoscenza di alcune nozioni di base di Algebra Lineare.

Testi di riferimento. Il corso non segue esattamente alcun testo particolare e si raccomanda quindi di frequentare le lezioni. Gli argomenti svolti nel corso sono comunque presenti in tutti i libri di testo universitari per i corsi di base Analisi Matematica. Tra i vari testi in circolazione si segnalano:

- E. Acerbi, G. Buttazzo: *Primo corso di analisi matematica.* Pitagora, Bologna, 1997.
- E. Giusti: *Analisi Matematica 1* (terza edizione). Bollati Boringhieri, Torino, 2002.
- C. Pagani, S. Salsa: *Analisi Matematica 1* (seconda edizione). Zanichelli, Bologna, 2015.
- M. Ghisi, M. Gobbino: *Schede di analisi matematica* Esculapio, Bologna, 2010.
  Questo testo contiene molti esercizi ed un buon compendio delle nozioni fondamentali, ma non sostituisce un libro di testo per quanto riguarda la parte teorica del corso.

Comunicazioni e materiale didattico. Per tutte le comunicazioni riguardanti il corso viene utilizzato un team sulla piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa (link al team). Il team viene anche usato per mettere a disposizione il materiale didattico del corso, i testi e gli scritti d'esame, e per eventuali ricevimenti online.
Sulla pagina web di Giovanni Alberti (link) sono disponibili i testi e le soluzioni delle prove d'esame di corsi analoghi tenuti dal docente negli anni precedenti.

Struttura dell'esame. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale.

La prova scritta è a sua volta suddivisa in due parti: la prima consiste di 9 domande elementari a cui rispondere senza dare giustificazioni, mentre la seconda consiste di 3 o più esercizi a cui dare una soluzione articolata e motivata.
Per la sufficienza nella prima parte sono richieste almeno sei risposte corrette. Per la piena sufficienza nella seconda parte è richiesto lo svolgimento completo di almeno due esercizi.
Il tempo a disposizione per la prima parte è un'ora o poco più, mentre per la seconda è due ore.
Per l'ammissione alla seconda parte è necessaria la sufficienza nella prima.
Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri di testo, appunti o calcolatrici grafiche.

L'orale ha lo scopo di verificare la conoscenza della parte teorica del corso (e la capacità di risolvere esercizi, qualora questa non sia stata sufficientemente dimostrata nella prova scritta).
Per l'ammissione all'orale è richiesta la sufficienza nella seconda parte dello scritto.

La prova orale va sostenuta nello stesso appello dello scritto.[1]

Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).
In linea di massima il voto finale viene definito dall'orale all'interno della fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS $\to$ 18–21, S $\to$ 18–24, D $\to$ 20–27, B $\to$ 23–30, MB $\to$ 26–30 e lode.

Appelli. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame così distribuiti: due a giugno e luglio, uno a settembre, due a gennaio, febbraio.

[1] Per gli studenti delle cosidette categorie protette (cioè studenti lavoratori, fuoricorso, oppure in maternità) vale quanto segue: se hanno passato lo scritto nell'appello di settembre possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di novembre; se invece hanno passato lo scritto nell'appello di febbraio possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di aprile. Attenzione: gli appelli straordinari in questione sono riservati alle categorie protette e non prevedono la prova scritta, che deve quindi venir passata nell'appello regolare subito prima.

Sono inoltre previste due prove in itinere (compitini), una a metà corso e una alla fine. Chi ottiene la sufficienza in entrambe le prove è ammesso direttamente all'orale, che può sostenere dopo la seconda prova oppure in uno degli appelli di giugno e luglio.

Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami (link).
Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.