

CORSO: **Analisi Matematica 1**  
ANNO ACCADEMICO: **2022-23**  
DOCENTI: **Giovanni Alberti, Alessandra Pluda**  
CODICE ESAME: **561AA**  
NUMERO DI CREDITI: **15**  
NUMERO DI ORE: **120**  
CORSO DI STUDIO: **Matematica triennale (MAT-L)**

**Obiettivi formativi.** Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile e delle equazioni differenziali lineari.

**Struttura del corso.** Il corso è diviso in due parti: “Calcolo” e “Analisi”. Lo scopo della prima parte è familiarizzare lo studente con l'uso di derivate ed integrali per funzioni di una variabile; particolare attenzione viene dedicata alle applicazioni di questi strumenti, quali lo studio qualitativo dei grafici di funzioni, il calcolo di aree e volumi, e la risoluzione di alcune equazioni differenziali. La seconda parte del corso è dedicata invece alle basi teoriche dell'Analisi Matematica, dalla completezza dei numeri reali e teoremi collegati, all'integrazione secondo Riemann, alla teoria delle serie.

**Programma del corso [versione: 1 giugno 2023].**

Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

**Prima parte: Calcolo.**

1. RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI BASE

- Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
- Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base  $e$ ), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
- Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
- Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione “grafica” di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

- Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.
- Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari (senza dimostrazione).

3. DERIVATE

- Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
- Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
- Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un'altra; notazione di Landau (“o piccolo” e “o grande”). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teorema di de l'Hôpital (senza dimostrazione). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
- Sviluppo di Taylor di una funzione e Teorema di Taylor (rappresentazione del resto come “o piccolo” e “o grande”, con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
- Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (semplice) di numeri reali, Estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Individuazione del valore massimo e minimo (oppure degli estremi superiore ed inferiore dei valori) di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).

- Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Disegno del grafico di una funzione.

#### 4. INTEGRALI

- Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione parziale).
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
- La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza. Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

#### 5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali.
- Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
- Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Struttura dell'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari.
- Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine: soluzioni delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; ricerca della soluzione particolare di delle equazioni a coefficienti costanti e non omogenee per alcune classi di termini noti.
- *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

### Seconda parte: Analisi.

#### 6. BASI DI TEORIA DEGLI INSIEMI.

- Prodotto di due insiemi. Le funzioni  $f : A \rightarrow B$  intese come grafici; caratterizzazione dei sottoinsiemi di  $A \times B$  che sono grafici. L'insieme  $A^B$  delle funzioni da  $B$  ad  $A$ ; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un dato insieme.
- Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
- Insiemi finiti e insiemi infiniti; insiemi numerabili e più che numerabili; insiemi con uguale cardinalità.
- L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è un insieme numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è un insieme numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili. I numeri reali sono più che numerabili. *Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein (senza dimostrazione).*

#### 7. COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

- I numeri reali estesi.
- Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
- *Insiemi (totalmente) ordinati, definizione di massimo e minimo di un insieme, definizione di estremo superiore ed inferiore, definizione di completezza. Caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

#### 8. SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

- Definizione di successione di numeri reali e di sottosuccessione. Definizione di limite di una successione; possibili comportamenti di una successione.
- Le successioni monotone hanno limite.
- Una successione converge ad un limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.

- Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente).
  - Successioni definite per ricorrenza. Risoluzione esplicita nel caso di ricorrenze lineari.
9. FUNZIONI CONTINUE
- Rivisitazione della definizione di continuità e di limite in termini di intorno.
  - Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
  - Teorema di esistenza degli zeri (teorema dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
  - Teorema di Weierstrass (esistenza dei punti di massimo e minimo). Giustificazione dell'algoritmo per la ricerca di massimi e minimi visto nella prima parte del corso.
10. DERIVATE
- Rivisitazione della definizione di derivata. Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa.
  - La derivata si annulla nei punti di massimo/minimo locale interni al dominio. Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
  - Uso dei teoremi di Cauchy e Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati in precedenza: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini di segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata (e di segno della derivata seconda); teorema di de L'Hôpital.
  - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.
11. INTEGRALE SECONDO RIEMANN
- Funzioni uniformemente continue. Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono uniformemente continue.
  - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
  - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
  - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.
12. INTEGRALI IMPROPRI
- Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
  - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
  - Integrali impropri non semplici.
13. SERIE NUMERICHE
- Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
  - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
  - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
  - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.
  - *Formula di Stirling (con dimostrazione parziale).*
14. SERIE DI POTENZE
- Serie di potenze: raggio di convergenza e comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. *Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).*
  - Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari:  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $(1+x)^a$ ,  $\log(1+x)$ . Rappresentazione del numero  $e$  come serie. Definizione di  $e^z$  con  $z$  numero

complesso e dimostrazione della formula  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . *Rappresentazione di  $\pi/4$  come serie.*

## 15. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

- Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque. Teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione) e struttura dell'insieme delle soluzioni.
- Risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annihilatori.

**Prerequisiti.** Una solida conoscenza delle parti *essenziali* del programma di matematica comune alla maggior parte delle scuole superiori. All'inizio del corso è previsto un veloce ripasso di alcuni argomenti fondamentali. Per alcuni argomenti trattati alla fine del corso è necessaria la conoscenza delle nozioni di base di Algebra Lineare.

**Testi di riferimento.** Il corso non segue esattamente alcun testo particolare e si raccomanda quindi di frequentare le lezioni. Gli argomenti svolti nel corso sono comunque presenti in tutti i libri di testo universitari per i corsi di base Analisi Matematica. Tra i vari testi in circolazione si segnalano:

- E. Acerbi, G. Buttazzo: *Primo corso di analisi matematica*. Pitagora, Bologna, 1997.
- E. Giusti: *Analisi Matematica 1* (terza edizione). Bollati Boringhieri, Torino, 2002.
- C. Pagani, S. Salsa: *Analisi Matematica 1* (seconda edizione). Zanichelli, Bologna, 2015.
- M. Ghisi, M. Gobino: *Schede di analisi matematica* Esculapio, Bologna, 2010.

Questo testo contiene molti esercizi ed un buon compendio delle nozioni fondamentali, ma non sostituisce un libro di testo per quanto riguarda la parte teorica del corso.

**Comunicazioni e materiale didattico.** Per tutte le comunicazioni riguardanti il corso viene utilizzato un team sulla piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa ([link al team](#)). Il team viene anche usato per mettere a disposizione il materiale didattico del corso, i testi e gli scritti d'esame, e per eventuali ricevimenti online.

Sulla pagina web di Giovanni Alberti ([link](#)) sono disponibili i testi e le soluzioni delle prove d'esame di corsi analoghi tenuti dal docente negli anni precedenti.

**Struttura dell'esame.** L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale.

La prova scritta è a sua volta suddivisa in due parti: la prima consiste di 9 domande elementari a cui rispondere senza dare giustificazioni, mentre la seconda consiste di 3 o più esercizi a cui dare una soluzione articolata e motivata.

Il tempo a disposizione per la prima parte è un'ora o poco più, mentre per la seconda è due ore.

Per l'ammissione alla seconda parte è necessaria la sufficienza nella prima.

Durante lo scritto non è consentito l'uso di libri di testo, appunti o calcolatrici grafiche.

L'orale ha lo scopo di verificare la conoscenza della parte teorica del corso e la capacità di risolvere esercizi (qualora questa non sia stata sufficientemente dimostrata nella prova scritta).

Per l'ammissione all'orale è richiesta la sufficienza nella seconda parte dello scritto.

La prova orale va sostenuta nello stesso appello dello scritto.<sup>1</sup>

Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).

In linea di massima il voto finale viene definito dall'orale all'interno della fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS  $\rightarrow$  18–21, S  $\rightarrow$  18–24, D  $\rightarrow$  20–27, B  $\rightarrow$  23–30, MB  $\rightarrow$  26–30 e lode.

**Appelli.** In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame così distribuiti: due a giugno e luglio, uno a settembre, due a gennaio, febbraio.

---

<sup>1</sup> Per gli studenti delle cosiddette categorie protette (cioè studenti lavoratori, fuoricorso, oppure in maternità) vale quanto segue: se hanno passato lo scritto nell'appello di settembre possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di novembre; se invece hanno passato lo scritto nell'appello di febbraio possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di aprile. Attenzione: gli appelli straordinari in questione sono riservati alle categorie protette e non prevedono la prova scritta, che deve quindi venir passata nell'appello regolare subito prima.

Sono inoltre previste due prove in itinere (compitini), una a metà corso e una alla fine. Chi ottiene la sufficienza in entrambe le prove è ammesso direttamente all'orale, che può sostenere dopo la seconda prova oppure in uno degli appelli di giugno e luglio.

Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami ([link](#)).

Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.