

CORSO: **Analisi Matematica I**

ANNO ACCADEMICO: **2021-22**

DOCENTI: **Giovanni Alberti, Alessandra Pluda**

CODICE ESAME: **158AA**

NUMERO DI CREDITI: **12**

NUMERO DI ORE: **120**

CORSO DI STUDIO: **Ingegneria Gestionale triennale (IGE-L)**

**Obiettivi formativi.** Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile e delle equazioni differenziali lineari.

**Programma del corso [versione: 20 dicembre 2021].** Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. FUNZIONI E GRAFICI

- Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
- Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base  $e$ ), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
- Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
- Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione “grafica” di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

- Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
- Funzioni continue.

3. DERIVATE

- Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
- Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
- Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un'altra. Notazione di Landau (“o piccolo” e “o grande”). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
- Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza dei punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
- Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come “o grande” e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazioni (parziali) dei teoremi di de l'Hôpital e dello sviluppo di Taylor.
- Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. INTEGRALI

- Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

#### 5. INTEGRALI IMPROPRI

- Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
- Integrali impropri non semplici.

#### 6. SERIE NUMERICHE E SERIE DI POTENZE

- *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
- Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
- Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
- Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta.
- Serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Espressione del numero  $e$  come serie. *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .*
- Serie di potenze e raggio di convergenza, calcolo del raggio di convergenza con il criterio del rapporto e della radice.

#### 7. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
- Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee; ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.

**Prerequisiti.** Una solida conoscenza delle parti *essenziali* del programma di matematica comune alla maggior parte delle scuole superiori. All'inizio del corso è previsto un veloce ripasso di alcuni argomenti fondamentali (grafici di funzioni, nozioni elementari di trigonometria, etc.).

**Testi di riferimento.** Il corso non segue esattamente alcun testo particolare e si raccomanda quindi di frequentare le lezioni. Gli argomenti svolti nel corso sono comunque presentati, a diversi livelli di approfondimento, in tutti i libri di testo universitari per i corsi di base Analisi Matematica. Tra i vari testi in circolazione si segnalano:

- Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo: *Analisi matematica ABC. Volume 1: funzioni di una variabile* (Pitagora, Bologna, 2003).
- Alessandro Faedo, Luciano Modica: *Analisi I. Lezioni* (Unicopli, Milano, 1992);
- Marina Ghisi, Massimo Gobbino: *Schede di analisi matematica* (Esculapio, Bologna, 2010). Quest'ultimo è un buon compendio delle nozioni fondamentali, ma non sostituisce completamente un libro di testo per quanto riguarda la parte teorica del corso.

**Lezioni online, materiale didattico e comunicazioni.** Per lo streaming delle lezioni (per gli studenti collegati online) viene usata la piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa ([link al team del corso](#)). Il team viene anche usato per archiviare le registrazioni delle lezioni, per i ricevimenti, per tutte le comunicazioni, per pubblicare il materiale didattico del corso (appunti delle lezioni e raccolte di esercizi), e infine per pubblicare i testi e le soluzioni degli scritti d'esame. Sulla pagina web del titolare del corso ([link](#)) si trovano i testi e le soluzioni degli esami scritti degli anni passati, e gli appunti delle lezioni del corso tenuto nell'anno accademico 2020-21.

**Struttura dell'esame.** L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. La prova scritta è a sua volta suddivisa in due parti: la prima consiste di 8 domande elementari a cui rispondere in un'ora, senza giustificare le risposte (per la sufficienza sono richieste di solito 4 o 5

risposte corrette); la seconda consiste di 3 esercizi a cui dare una soluzione articolata e motivata in due ore (per la sufficienza è richiesta di solito la risoluzione completa di almeno un esercizio).

Per l'ammissione alla seconda parte è necessaria la sufficienza nella prima.

Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri di testo, appunti o calcolatrici grafiche.

La prova orale ha lo scopo di verificare le conoscenze della parte teorica del corso oltre che la capacità di risolvere esercizi (qualora questa non sia stata sufficientemente dimostrata nella prova scritta) e consiste quindi sia di domande teoriche che di esercizi elementari.

L'orale va sostenuto nello stesso appello dello scritto.

Per l'ammissione all'orale è richiesta la sufficienza in entrambe le parti dello scritto.

Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).

In linea di massima il voto finale viene definito durante l'orale all'interno di una fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS  $\rightarrow$  18 – 21, S  $\rightarrow$  18 – 24, D  $\rightarrow$  20 – 27, B  $\rightarrow$  23 – 30, MB  $\rightarrow$  26 – 30 e lode.

**Appelli.** In tutto l'anno accademico sono previsti sette appelli d'esame distribuiti tra gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre; ogni studente può tentare di dare l'esame al più quattro volte nei sette appelli a disposizione (un appello si considera tentato se viene consegnata la prima parte dello scritto).

Sono inoltre previste due prove in itinere (compitini), una a metà corso e una all'inizio di gennaio, che sostituiscono la prova scritta; chi è ammesso all'orale con i compitini può scegliere in quale dei primi tre appelli fare l'orale.

Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami (<https://esami.unipi.it/>).

Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.

Per via dell'epidemia ancora in corso alcuni appelli potrebbero svolgersi parzialmente online. Le istruzioni per gli esami online verranno messe a disposizione sulla pagina web del corso e richiamate in occasione di ciascun appello.