

CORSO: **Analisi Matematica I**

ANNO ACCADEMICO: **2020-21**

DOCENTI: **Giovanni Alberti, Alessandra Pluda**

CODICE ESAME: **158AA**

NUMERO DI CREDITI: **12**

NUMERO DI ORE: **120**

CORSO DI STUDIO: **Ingegneria Gestionale triennale (IGE-L)**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile e delle equazioni differenziali lineari.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. FUNZIONI E GRAFICI

- Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
- Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
- Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
- Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione “grafica” di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

- Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
- Funzioni continue.

3. DERIVATE

- Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
- Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
- Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un'altra. Notazione di Landau (“o piccolo” e “o grande”). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
- Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
- Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazione (parziale) del teorema di de L'Hôpital.
- Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come “o grande” e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
- Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. ELEMENTI DI ANALISI ASTRATTA

- *Numeri interi, razionali e reali.*
- *Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Esistenza dell'estremo inferiore e superiore (completezza dei numeri reali).*
- Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.

5. INTEGRALI

- Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. INTEGRALI IMPROPRI

- Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
- Integrali impropri non semplici.

7. SERIE NUMERICHE E SERIE DI POTENZE

- *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
- Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
- Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
- Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
- Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
- *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.*

8. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
- Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.
- *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

Prerequisiti. Una solida conoscenza delle parti *essenziali* del programma di matematica comune alla maggior parte delle scuole superiori. All'inizio del corso è previsto un veloce ripasso di alcuni argomenti fondamentali (grafici di funzioni, nozioni elementari di trigonometria, etc.).

Testi di riferimento. Il corso non segue esattamente alcun testo particolare e si raccomanda quindi di frequentare le lezioni. Gli argomenti svolti nel corso sono comunque presentati, a diversi livelli di approfondimento, in tutti i libri di testo universitari per i corsi di base Analisi Matematica. Tra i vari testi in circolazione si segnalano:

- Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo: *Analisi matematica ABC. Volume 1: funzioni di una variabile* (Pitagora, Bologna, 2003).
- Alessandro Faedo, Luciano Modica: *Analisi I. Lezioni* (Unicopli, Milano, 1992);
- Marina Ghisi, Massimo Gobbino: *Schede di analisi matematica* (Esculapio, Bologna, 2010). Quest'ultimo è un buon compendio delle nozioni fondamentali, ma non sostituisce completamente un libro di testo per quanto riguarda la parte teorica del corso.

Materiale didattico e comunicazioni. La pagina web del corso si trova sul portale e-learning della Scuola di Ingegneria: <https://elearn.ing.unipi.it>.

Tale pagine viene usata per tutte le comunicazioni riguardanti il corso e per rendere disponibile il materiale didattico (appunti, testi e soluzioni delle prove scritte).

Sulla pagina web del docente <http://pagine.dm.unipi.it/alberti> sono disponibili i testi e le soluzioni delle prove d'esame dei corsi degli anni precedenti.

Struttura dell'esame. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. La prova scritta è a sua volta suddivisa in due parti: la prima consiste di 8 domande elementari a cui rispondere in un'ora, senza giustificare le risposte (per la sufficienza sono richieste di solito 4 o 5 risposte corrette); la seconda consiste di 3 esercizi a cui dare una soluzione articolata e motivata in due ore (per la sufficienza è richiesta di solito la risoluzione completa di almeno un esercizio).

Per l'ammissione alla seconda parte è necessaria la sufficienza nella prima.

Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri di testo, appunti o calcolatrici grafiche.

La prova orale ha lo scopo di verificare le conoscenze della parte teorica del corso oltre che la capacità di risolvere esercizi (qualora questa non sia stata sufficientemente dimostrata nella prova scritta) e consiste quindi sia di domande teoriche che di esercizi elementari.

L'orale va sostenuto nello stesso appello dello scritto.

Per l'ammissione all'orale è richiesta la sufficienza in entrambe le parti dello scritto.

Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).

In linea di massima il voto finale viene definito durante l'orale all'interno di una fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS \rightarrow 18 – 21, S \rightarrow 18 – 24, D \rightarrow 20 – 27, B \rightarrow 23 – 30, MB \rightarrow 26 – 30 e lode.

Appelli. In tutto l'anno accademico sono previsti sette appelli d'esame distribuiti tra gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre; ogni studente può tentare di dare l'esame al più quattro volte nei sette appelli a disposizione (un appello si considera tentato se viene consegnata la prima parte dello scritto).

Sono inoltre previste due prove in itinere (compitini), una a metà corso e una all'inizio di gennaio, che sostituiscono la prova scritta; chi è ammesso all'orale con i compitini può scegliere in quale dei primi tre appelli fare l'orale.

Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami: <https://esami.unipi.it/>.

Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.

Per via dell'epidemia in corso alcuni appelli si svolgeranno completamente o parzialmente online.

Istruzioni per le prove scritte online. Gli scritti online si svolgono in aule virtuali sulla piattaforma Teams. Il link all'aula verrà comunicato con un messaggio di posta elettronica inviato all'indirizzo di posta istituzionale degli iscritti all'esame.

Per la prova scritta serve quanto segue:

- o carta e penna;
- o un computer (o altro strumento) per inquadrare lo studente durante la prova;
- o un cellulare (o un tablet) per fotografare lo scritto alla fine della prova e spedirlo;
- o un documento da usare in caso di problemi con l'identificazione online.

All'inizio della prima parte dello scritto:

- o viene verificata l'identità di ogni studente e l'inquadratura (vedere sotto): se questa non dovesse essere adeguata lo studente può non essere ammesso all'esame;
- o il testo della prova viene condiviso e/o dettato: lo studente deve copiare il testo di tutti gli esercizi su un foglio dove poi aggiungerà le risposte;
- o alla fine della dettatura lo studente si allontana dal computer e non lo guarda per tutta la durata della prova; in particolare il computer viene usato solo per la sorveglianza.

Durante la prima parte dello scritto:

- o la posizione del computer deve essere scelta in modo tale che lo studente sia inquadrato di lato (e non di fronte come durante le chiamate) e da lontano, cosicché si possa vedere anche il tavolo e lo spazio davanti allo studente; quando lo studente scrive non ha il computer in vista davanti a sé;
- o non è consentito usare né libri né appunti; sul tavolo devono esserci solo carta, penna e cellulare;
- o lo studente deve essere sempre visibile e non può allontanarsi;
- o nessun altro può essere presente nella stessa stanza.

Alla fine della prima parte dello scritto:

- o lo studente ha 5 minuti di tempo per fotografare il foglio con testi e risposte;

- lo studente carica la foto nel modulo Google per le consegne della prima parte, il cui link è stato inviato per posta insieme all'indirizzo dell'aula; una volta conclusa l'operazione viene inviata un'email di conferma;
- attenzione: per aprire il modulo Google è necessario autenticarsi con le credenziali di ateneo; il problema più frequente è che il cellulare imposta di default le credenziali dell'account Google privato e in tal caso l'accesso al modulo viene negato: per aggirare questo problema di solito basta aprire il link in una pagina anonima del browser.

Dopo la prima parte dello scritto diamo le soluzioni e le eventuali spiegazioni in una riunione pubblica sulla pagina Teams del corso, e comunichiamo i criteri di ammissione alla seconda parte. Gli ammessi alla seconda parte ricevono quindi un messaggio con il link all'aula virtuale.

All'inizio della seconda parte:

- viene di nuovo verificata l'identità di ogni studente e l'inquadratura;
- il testo della prova viene condiviso e/o dettato: lo studente deve copiare il testo di ogni esercizio su un foglio diverso dove poi aggiungerà lo svolgimento;
- alla fine della dettatura lo studente si allontana dal computer e non lo guarda per tutta la prova.

Durante la seconda parte valgono le stesse regole della prima parte.

Alla fine della seconda parte:

- lo studente ha 10 minuti di tempo per fotografare tutti i fogli dello scritto con il telefono (o il tablet) realizzando un unico file pdf (esistono diverse applicazioni che fanno questo, alcune già presenti di default nei sistemi operativi Android e iOS);
- lo studente carica il file nel modulo Google per le consegne, il cui link è stato inviato per posta insieme al link dell'aula;

Prima di ogni prova scritta verrà organizzato un incontro su Teams per verificare le inquadrature, fare una prova di consegna dello scritto, e chiarire eventuali dubbi pratici.

Istruzioni per le prove orali online. Gli orali online si svolgono in aule virtuali sulle piattaforme Teams o Meet. Il link all'aula verrà comunicato per posta elettronica insieme al calendario delle prove.

Per l'orale serve quanto segue:

- un computer per inquadrare lo studente durante la prova;
- un tablet su cui scrivere, oppure carta, penna e un cellulare per inquadrare dall'alto il foglio su cui si scrive;
- un documento da usare in caso di problemi con l'identificazione online.

Durante la prova:

- La posizione del computer deve essere scelta in modo tale che lo studente venga inquadrato di lato e da lontano, cosicché si possa vedere anche il tavolo e lo spazio davanti allo studente;
- in mancanza di un tablet lo studente scrive su un foglio e monta il cellulare su un supporto (per esempio una lampada da tavolo) in modo da inquadrare il foglio su cui scrive;
- lo studente deve essere sempre visibile e nessun altro può essere presente nella stessa stanza.