AM1 gest 20/21 lezione 27

4/11/2020

Funzioni crescenti e decrescenti

Considero $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$.

Dico che f è crescente (su X) se aumentando il valore di x aumenta quello di $f(x)$, cioè se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1).$$

Dico che f è strettamente crescente se per ogni x_0 e $x_1 \in X$

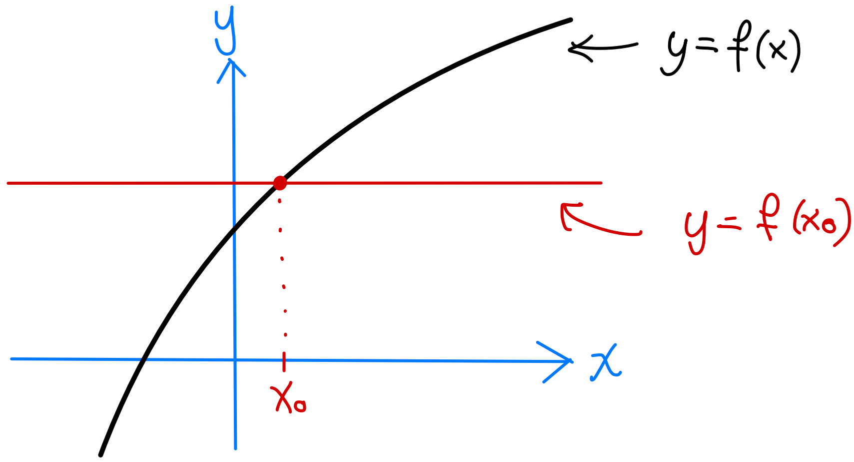
$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1).$$

Esempi: e^x è strett. crescente $(x_0 < x_1 \Rightarrow e^{x_0} < e^{x_1})$ e lo stesso vale per x^3, $\log x$.

Ma x^2 non è crescente (se $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ allora $x_0 < x_1$ ma $f(x_0) = 1 > f(x_1) = 0$)

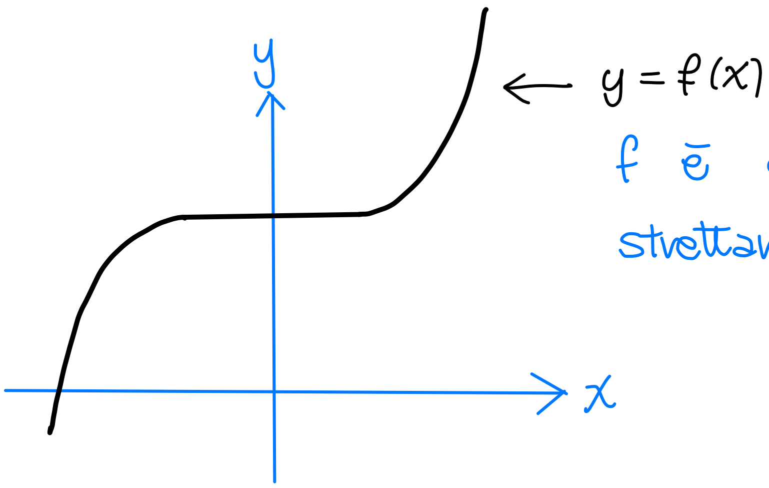
Tuttavia x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ $(0 \leq x_0 < x_1 \Rightarrow x_0^2 < x_1^2)$.

Interpretazione grafica:



(1) Un punto che si muove lungo il grafico spostandosi da sin. verso dx. sale (l'ordinata cresce)

(2) per ogni $x_0 \in X$, la parte del grafico a destra di x_0 sta sopra la retta $y = f(x_0)$ mentre la parte a sinistra di x_0 sta sto.

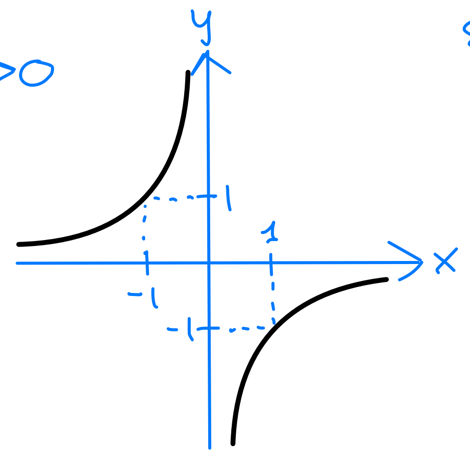


f è crescente ma NON strettamente crescente.

Esempio importante

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$f' = \frac{1}{x^2} > 0$



f è strett. crescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ ma NON è crescente sul dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Per verificare che f non è crescente sul dominio basta osservare che $-1 < 1$ ma

$f(-1) = 1 > f(1) = -1$

Def.

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, è decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \implies f(x_0) \geq f(x_1);$$

f è strettamente decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \implies f(x_0) > f(x_1).$$

Esempi

$-x$ è strett. decrescente; x^2 è strett. crescente su $[0, +\infty)$ e strett. decrescente su $(-\infty, 0]$.

Teorema 1

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo, f derivabile.
Allora

(a) $f' \geqslant 0$ su I $\Longleftrightarrow$ f è crescente su I;

(b) $f' > 0$ su I $\Longrightarrow$ f è strett. crescente su I;

(c) $f' \leqslant 0$ su I $\Longleftrightarrow$ f è decrescente su I;

(d) $f' < 0$ su I $\Longrightarrow$ f è strett. decresc. su I.

In (b) e (d) non vale $\Longleftarrow$. Per esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0.

Dim. di (a)

$\Longrightarrow$ Suppongo $f' \geqslant 0$, e dati $x_0 < x_1$ dimostro che $f(x_0) \leqslant f(x_1)$.

Per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x}$ con $x_0 < \tilde{x} < x_1$ tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\tilde{x})\ ;$$

per ipotesi $f'(\tilde{x}) \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \geqslant 0$ cioè $f(x_1) \geqslant f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Suppongo f crescente e dimostro che $f' \geq 0$.
Prendo $x \in X$ e $h > 0$. Allora $x+h > x$ e per ipotesi $f(x+h) \geq f(x)$. Quindi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

e passando al limite per $h \to 0$

$$f'(x) \geq 0 .$$

Dim. (b)

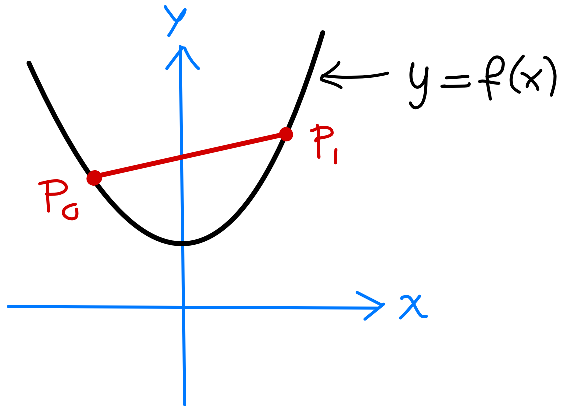
Basta modificare la dimostrazione di $\Rightarrow$ in (a).

Le dimostrazioni di (c) e (d) le lascio per esercizio. Usate che f è decrescente se e solo se $-f$ è crescente.

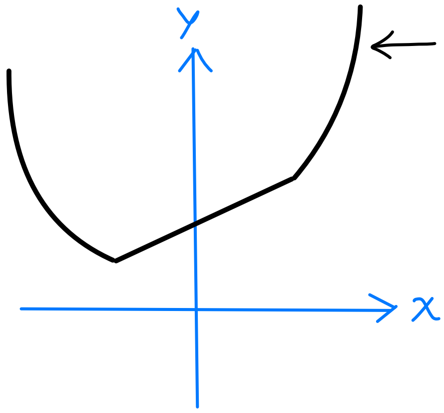
$\square$

Funzioni convesse e concave

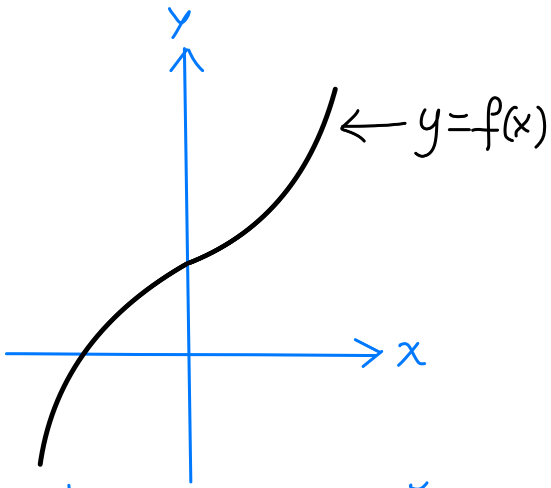
Data $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, dico che f è **convessa** se per ogni P_0, P_1 punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico.



Esempi



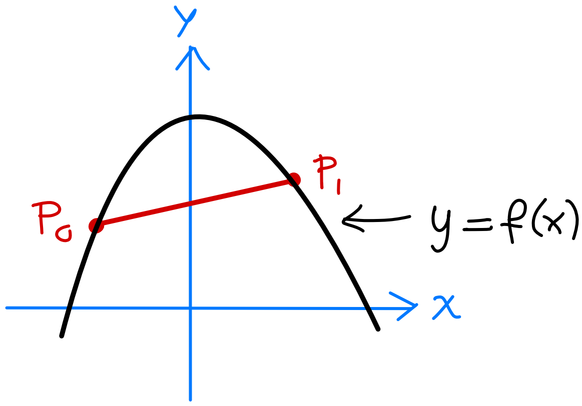
questa funzione è convessa



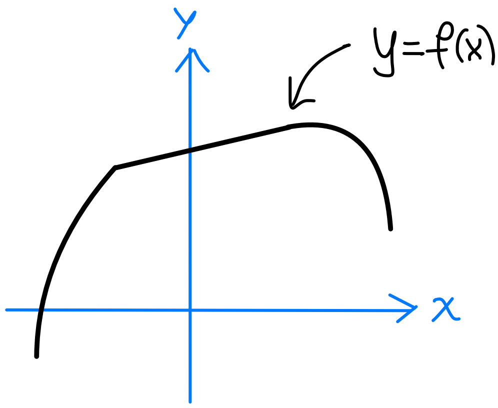
Questa funzione non è convessa

Def.

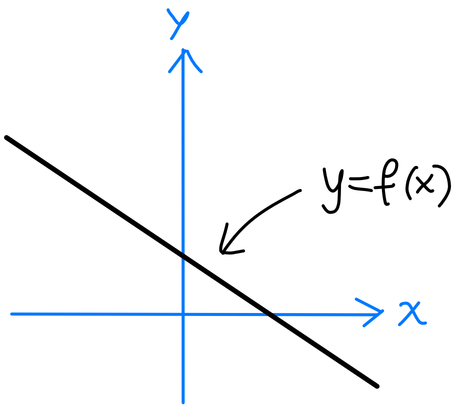
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo si dice **concava** se per ogni P_0 e P_1 sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico.



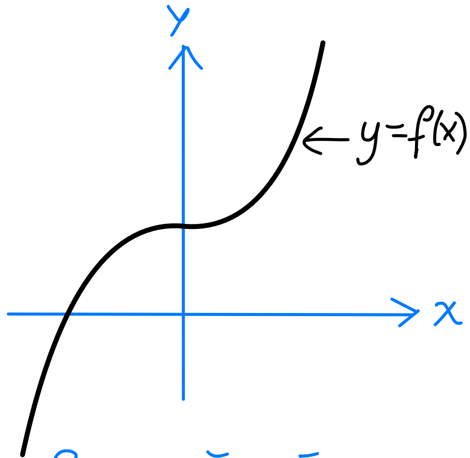
Esempi



f è concava



f è concava e convessa



f non è né concava né convessa però è concava su $(-\infty, 0]$ e convessa su $[0, +\infty)$

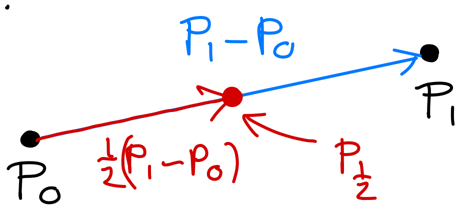
Osservazione

Dati $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ il segmento che li congiunge è formato dai punti

$$P_t = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

← notazione del corso di algebra lineare

con $0 \leq t \leq 1$.



Inoltre $$P_t = (x_0 + t(x_1 - x_0) ; y_0 + t(y_1 - y_0))$$
$$= (\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t} ; \underbrace{(1-t)y_0 + t y_1}_{y_t})$$

Se P_0 e P_1 sono punti del grafico di f, cioè $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$, allora

$$P_t = (\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t} ; \underbrace{(1-t)f(x_0) + t f(x_1)}_{y_t})$$

Ma allora f è convessa se per ogni $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$ vale $y_t \geq f(x_t)$ cioè

$$(1-t) f(x_0) + t f(x_1) \geq f((1-t)x_0 + t x_1) .$$

f è concava se per ogni $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$ vale $y_t \leq f(x_t)$ cioè

$$(1-t) f(x_0) + t f(x_1) \leq f((1-t)x_0 + t x_1) .$$

Concludiamo la teoria delle funzioni convesse e concave.

Teorema 2

Data $f : \underset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Allora

(a) f convessa $\Longleftrightarrow$ f' è crescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$;

(b) f concava $\Longleftrightarrow$ f' è decrescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \leq 0$.

Dim

So dal teorema 1 (della lezione prec.) che

f' crescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$, f' decrescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \leq 0$.

Passo 1: f' è crescente $\Rightarrow$ f è convessa.

Deve far vedere che $\forall x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$, $\forall t \in [0,1]$

vale

$$\underbrace{(1-t)f(x_0) + t f(x_1)}_{= y_t} \geq f(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{= x_t}).$$

Considero la differenza:

$$(1-t)f(x_0) + t f(x_1) - f(x_t)$$

$$= (1-t)(f(x_0) - f(x_t)) + t(f(x_1) - f(x_t))$$

$$= (1-t)\underbrace{(x_0 - x_t)}_{= -t(x_1 - x_0)} \frac{f(x_0) - f(x_t)}{x_0 - x_t} + t\underbrace{(x_1 - x_t)}_{= (1-t)(x_1 - x_0)} \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

Per il teorema di Lagrange esistono $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$ con $x_0 < \tilde{x}_0 < x_t < \tilde{x}_1 < x_1$ tali che

$$\frac{f(x_0)-f(x_t)}{x_0-x_t} = f'(\tilde{x}_0), \qquad \frac{f(x_1)-f(x_t)}{x_1-x_t} = f'(\tilde{x}_1).$$

Quindi

$$(1-t)f(x_0)+t f(x_1)-f(x_t) =$$

$$= -(1-t)\,t(x_1-x_0)f'(\tilde{x}_0)+t(1-t)(x_1-x_0)f'(\tilde{x}_1)$$

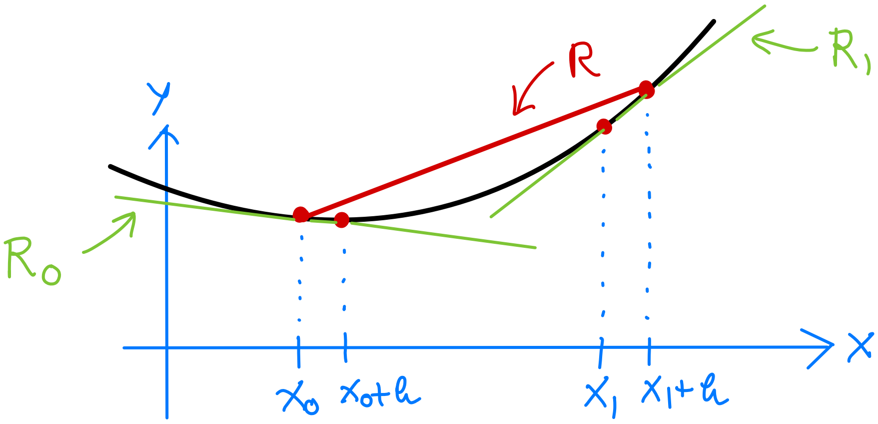
$$= t(1-t)(x_1-x_0)\left(f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0)\right).$$

Se f' è crescente allora $f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0) \geq 0$ e quindi $\underbrace{(1-t)f(x_0)+t f(x_1)}_{y_t}-f(x_t) \geq 0$ cioè $y_t \geq f(x_t)$ che è la tesi del passo 1.

Se invece f' è decrescente allora $f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0) \leq 0$ e quindi $y_t - f(x_t) \leq 0$, cioè $y_t \leq f(x_t)$, e quindi f è concava.

Passo 2 : f convessa $\Rightarrow$ f' crescente.

Devo far vedere che presi $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$ allora $f'(x_0) \leq f'(x_1)$.



R_0 := retta passante per i punti del grafico di asc. x_0, x_0+h

R_1 := " " " " " " x_1, x_1+h

R := " " " " " " x_0, x_1+h

Siccome i punti del grafico di ascissa x_0+h e x_1 stanno sotto R,

$$\underset{\displaystyle\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{\underset{\shortparallel}{\text{pendenza}(R_0)}} \leq \text{pendenza}(R) \leq \underset{\displaystyle\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}}{\underset{\shortparallel}{\text{pendenza}(R_1)}}$$

Quindi

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

e prendendo il limite per $h \to 0$ ottengo

$$f'(x_0) \leq f'(x_1)$$

che era la tesi del passo 2.

Allo stesso modo, se f è concava ottengo che f' è decrescente. $\square$

Esercizi

1. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{x^5 - 5x}$.

Insieme di definizione di f

sono gli x t.c. $x^5 - 5x \neq 0$ cioè $x(x^4-5) \neq 0$
cioè $x \neq 0$ e $x^4 - 5 \neq 0$ cioè $x \neq 0, \pm\sqrt[4]{5}$.

Segno di f

$$\mathrm{sgn}(f(x)) = \mathrm{sgn}(x^5 - 5x) = \mathrm{sgn}(x(x^4-5))$$

	$(-\infty, -\sqrt[4]{5})$	$(-\sqrt[4]{5}, 0)$	$(0, \sqrt[4]{5})$	$(\sqrt[4]{5}, +\infty)$
$\mathrm{sgn}(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}(x^4-5)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}(f(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$

limiti significativi

$$f(\pm\infty) = 0 \;; \quad f(0^+) = -\infty, \quad f(0^-) = +\infty$$
$$f((\sqrt[4]{5})^+) = +\infty \quad f((\sqrt[4]{5})^-) = -\infty$$
$$f((-\sqrt[4]{5})^+) = +\infty \quad f((-\sqrt[4]{5})^-) = -\infty$$

segno di f' e intervalli di monotonia

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^5-5x}\right)' = \frac{-(5x^4-5)}{(x^5-5x)^2} = \frac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}$$

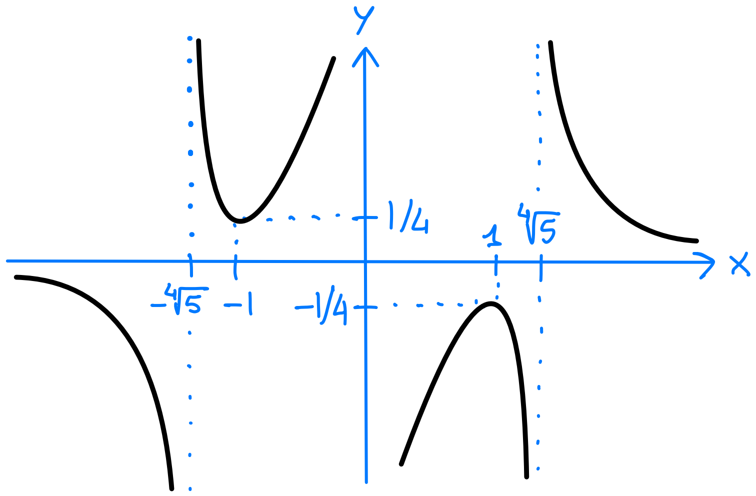
$$\mathrm{sgn}(f'(x)) = \mathrm{sgn}(1-x^4)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f è strett. crescente in $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ ed è strett. decresc. in $(-\infty, -\sqrt[4]{5})$, $(-\sqrt[4]{5}, -1]$, $[1, \sqrt[4]{5})$, $(\sqrt[4]{5}, +\infty)$

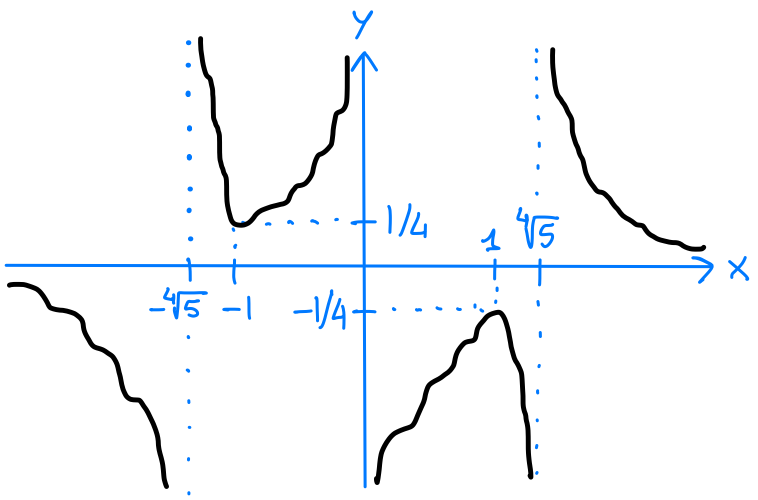
Inoltre -1 è un punto di minimo locale e $+1$ è un punto di massimo locale.

Primo disegno del grafico



Ho disegnato f concava o convessa in ciascun intervallo che compone il dominio, ma non so (ancora) se f è effettivamente così.

In effetti potrebbe essere fatta così:



Segno di f'' e intervalli di concavità e convessità

$$f''(x) = \left(\frac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}\right)' = 5\,\frac{(-4x^3)(x^5-5x)^{\cancel{2}\,1} - (1-x^4)\,2\,\cancel{(x^5-5x)}\,(5x^4-5)}{(x^5-5x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= 5\,\frac{-4x^8 + \cancel{20x^4} + 10 - \cancel{20x^4} + 10x^8}{(x^5-5x)^3}$$

$$= 5\,\frac{6x^8+10}{(x^5-5x)^3}$$

Siccome $6x^8+10>0 \ \forall x$, $\quad \text{sgn}(f''(x)) = \text{sgn}(x^5-5x)$

quindi

$$\text{sgn}(f''(x)) = \quad \overset{\frown}{-} \;\Big|_{-\sqrt[4]{5}}\; \overset{\smile}{+} \;\Big|_{0}\; \overset{\frown}{-} \;\Big|_{+\sqrt[4]{5}}\; \overset{\smile}{+}$$

Questo conferma il primo disegno.

Osservazione importante

$f(x) = \dfrac{1}{x^5-5x}$ è dispari e quindi il grafico

è simmetrico rispetto all'origine.

Basta allora disegnarlo per $x \geq 0$ ....

AM1 gest 20/21 lezione 30

7/11/2020

Esercizi

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $x^5 - 5x + 1 = a$

Pongo $f(x) := x^5 - 5x + 1$ e ne disegno il grafico.

dominio di f: tutto $\mathbb{R}$

segno di f: non determinabile

limiti significativi: $f(+\infty) = +\infty$; $f(-\infty) = -\infty$

(in particolare non c'è né massimo né minimo).

derivata: $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1)$

segno di f': $f'(x) \geq 0 \iff x^4 \geq 1 \iff x^2 \geq 1$

$\iff x \geq 1$ opp. $x \leq -1$

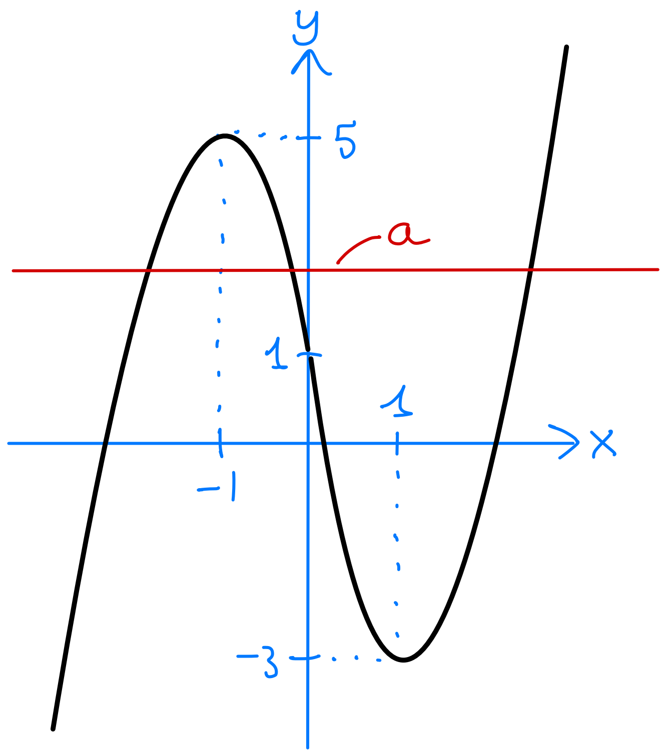
$\mathrm{sgn}(f'(x))$: $+$ $\quad -1 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$

-1 punto di max. loc., $+1$ punto di min. loc.

derivata seconda: $f''(x) = 5(x^4 - 1)' = 20x^3$

$\mathrm{sgn}(f''(x))$: $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

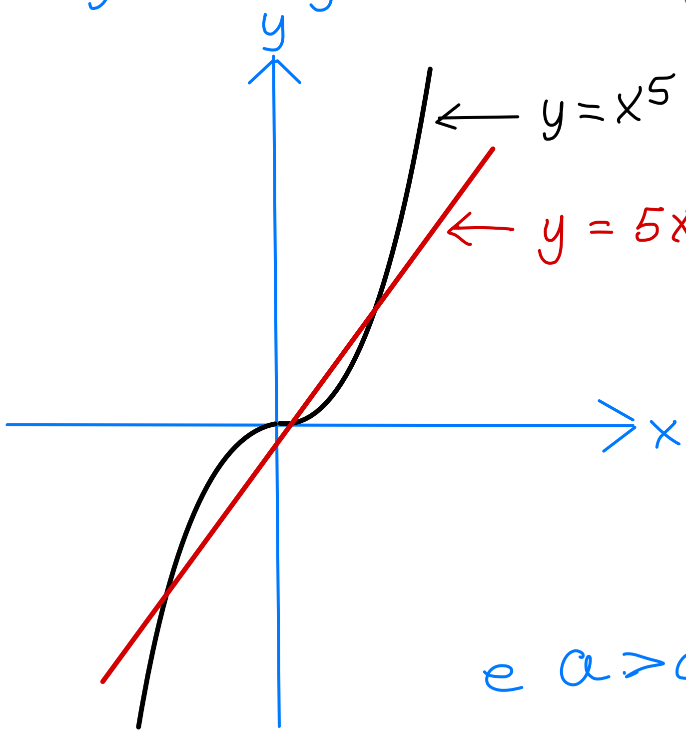
Disegno il grafico di $f(x)$:



Val. di a	# sol. di $f(x)=a$
$a>5$	1
$a=5$	2
$-3<a<5$	3
$a=-3$	2
$a<-3$	1

Sol. alternativa (funziona ma non è più semplice)

scrivo l'equaz. $x^5-5x+1=a$ come $x^5=5x+a-1$ e cerco le intersezioni tra il grafico $y=x^5$ e il grafico $y=5x+a-1$



Scopro che ci sono due valori $a_1<a_2$ t.c. per $a<a_1$ e $a>a_2$ ho 1 soluzione, per $a_1<a<a_2$ ho 3 soluzioni

Osservazione importante sulla prima soluzione

Gli elementi dello studio del grafico di f che ho veramente usato sono:

- $f(x)$ è strett. crescente in $[1,+\infty)$ e $f(1)=-3$, $f(+\infty)=+\infty$ $\Longrightarrow$ per $a \geq -3$ l'eq. $f(x)=a$ ha sempre un'unica soluzione in $[1,+\infty)$;

- $f(x)$ è strett. decresc. in $[-1,1]$ e $f(-1)=5$, $f(1)=-3$ $\Longrightarrow$ per $-3 \leq a \leq 5$, l'equaz. $f(x)=a$ ha un'unica soluz. in $[-1,1]$;

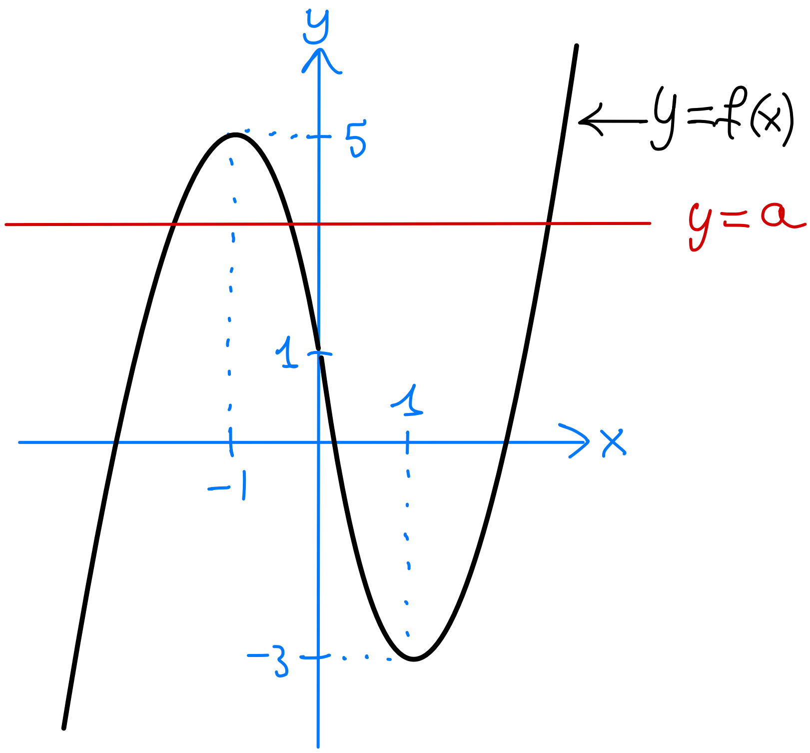
- $f(x)$ è strett. cresc. in $(-\infty,-1]$ e $f(-\infty)=-\infty$, $f(-1)=5$ $\Longrightarrow$ ....

Il punto chiave è aver trovato gli "intervalli di monotonia" di f (e i valori agli estremi). La convessità di f è irrilevante.

2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia x_a la soluzione più grande dell'equazione

$$\underbrace{x^5 - 5x + 1}_{f(x)} = a. \quad \text{(vedere ex. 1)}$$

Trovare il limite di x_a per $a \to +\infty$ e la parte principale.



Dal grafico ottengo che $x_a \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$.

Allora $f(x_a) = x_a^5 - x_a + 1 \sim x_a^5$

Quindi l'eq. $f(x_a) = a$ diventa

$$x_a^5 \sim a$$

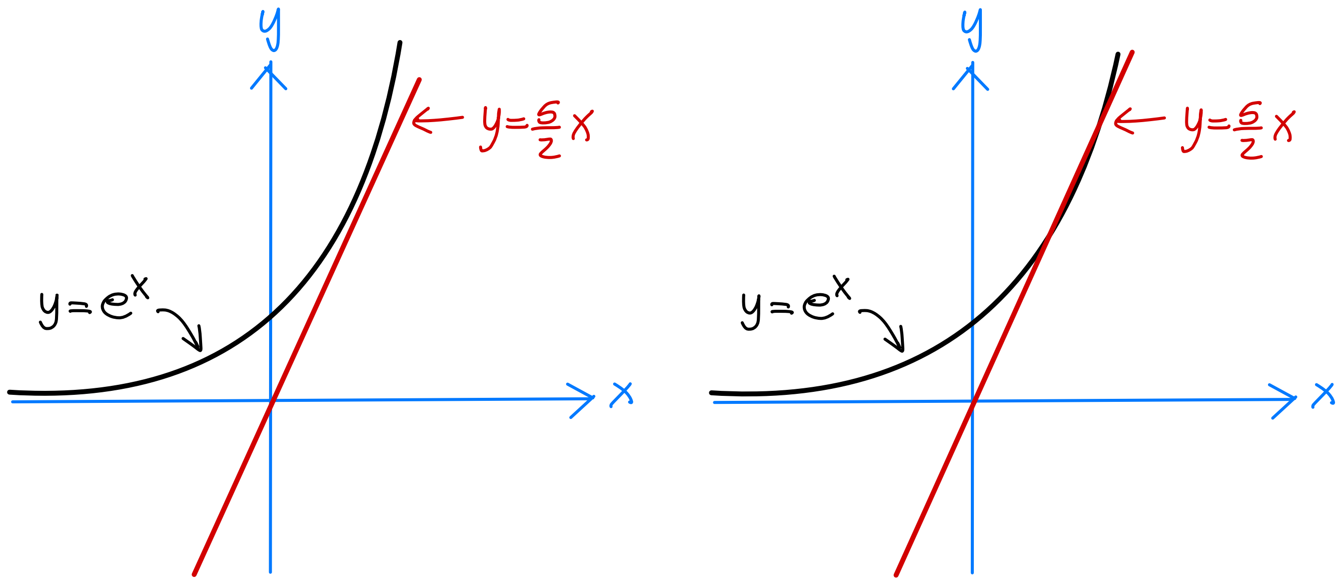
e allora

$$x_a \sim \sqrt[5]{a}.$$

3. Dire se è vero che

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Attenzione: disegnando i grafici (noti) $y=e^x$ e $y=\frac{5}{2}x$ non si ottiene una risposta chiara:



che le due curve si intersechino oppure no dipende dall'accuratezza del disegno!

Soluzione (che funziona)

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{e^x - \frac{5}{2}x}_{f(x)} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \geq 0$$

Calcolo il valore minimo di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$,
- $f'(x) = e^x - \frac{5}{2} = 0 \iff e^x = \frac{5}{2} \iff x = \log\left(\frac{5}{2}\right)$.
- Confronto i valori di f in $\log\left(\frac{5}{2}\right)$; $+\infty$; $-\infty$:

$f\left(\log\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}\left(1 - \log\left(\frac{5}{2}\right)\right) \longleftarrow$ valore minimo!

$f(+\infty) = +\infty$

$f(-\infty) = +\infty$

Verifico se $\min f = \frac{5}{2}\left(1 - \log\left(\frac{5}{2}\right)\right) \geq 0$ oppure no.

Osservo che $\frac{5}{2} = 2{,}5 < 2{,}71\ldots = e \Rightarrow \log\left(\frac{5}{2}\right) < \log e = 1$

$\Rightarrow \quad 1 - \log\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \Rightarrow \min f > 0$.

Concludo che $e^x \geq \frac{5}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che

(*) $\qquad e^x \geq ax$ per ogni $x \geq 0$.

Procedo come nell' ex. 3:

$$e^x \geq ax \quad \forall x \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{e^x - ax}_{f(x)} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$
$$\Updownarrow$$

$$\min\{f(x) : x \geq 0\} \geq 0.$$

Calcolo il minimo di $f(x)$ per $x \in [0,+\infty)$.

- $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$,
- $f'(x) = e^x - a = 0 \iff e^x = a \iff x = \log a$ se $a>0$
- confronto i valori di f in $0, +\infty$, $\log a$

va considerato solo se $\log a > 0$ cioè $a > 1$

$\boxed{\text{Caso } a \leq 1}$

$f(0) = 1 \leftarrow$ val. min.

$f(+\infty) = +\infty$

Siccome $\min\{f(x) : x \geq 0\} = 1 > 0$ la disug. $(*)$ è verificata.

$\boxed{\text{Caso } a > 1}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(\log a) = a(1-\log a) \end{array}\right\} \text{il val. min. è il più piccolo dei due}$$

$f(+\infty) = +\infty$

Se $a(1-\log a) < 0$ allora $\min\{f \ldots\} < 0$ e $(*)$ non vale.

Se $a(1-\log a) \geq 0$ allora $\min\{f \ldots\} \geq 0$ e $(*)$ vale.

Quindi $(*)$ vale se e solo se $a(1-\log a) \geq 0$, cioè $1-\log a \geq 0 \iff 1 \geq \log a \iff e \geq a$.

Conclusione: (*) vale se e solo se $a \leq e$.

Soluzione alternativa

$$e^x \geq ax \quad \forall x \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{g(x)} \geq a \quad \forall x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{g(x) : x > 0\} \geq a.$$

Basta calcolare il minimo di $g(x)$ per $x > 0$.

Vantaggio (?) : g non contiene a.