Calcolo degli integrali / delle primitive.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo.
Ricordiamo che $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in I$ F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Inoltre se $F, G : I \to \mathbb{R}$ sono primitive di f, allora $F - G = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Per comodità introduciamo la seguente notazione:
indichiamo con $\int f(x)dx$ una generica primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$.
Notiamo che $\int f(x)\,dx$ è una funzione, non è un integrale (che invece è un numero).

Elenco di primitive elementari

Sia $a, c \in \mathbb{R}$:

$$\int a \, dx = ax + c \qquad (\text{infatti } (ax+c)' = a)$$

$a \neq -1$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \left(\text{infatti } \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a\right)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

con questa scrittura si intende che sulla semiretta $x > 0$ si ha $\int \frac{1}{x} dx = \log(x) + c$ e sulla semiretta $x < 0$ si ha $\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + c$

Infatti se considero $f: \begin{cases} (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{cases}$ ho che

$\forall x \in (0,+\infty)$ $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$.

Inoltre se considero $f: \begin{cases} (-\infty,0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (-\infty,0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(-x) \end{cases}$ ho che

$-x > 0 \Rightarrow \log(-x)$ ben definito

$\forall x \in (-\infty, 0)$ $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} = f(x)$.

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$a > 0$, $a \neq 1$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int \log(x)\, dx = x\log(x) - x + c$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\log(|\cos(x)|) + c$$

(si intende che se $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(\cos(x)) + c$
e se $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(-\cos(x)) + c$)

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + c$$

Regole per il calcolo degli integrali / delle primitive.

I) Somma di due funzioni

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue e I un intervallo, allora
$$\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx .$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, allora
$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx .$$

Dimostrazione: Con la notazione $\int f(x)\,dx$ e $\int g(x)\,dx$ intendiamo due primitive di f e g, che possiamo chiamare F, G (con la proprietà che $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$). Il teorema dice che una primitiva di $(f+g)$ è data da $F+G$.

Verifichiamolo:

$$(F+G)'(x) \underset{\substack{\text{derivata della}\\ \text{somma è la}\\ \text{somma delle derivate}}}{=} F'(x) + G'(x) \overset{\substack{\text{definizione di}\\ \text{primitive}}}{=} f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall x \in I.$$

Prendendo $I = [a,b]$ abbiamo

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx \overset{\text{TFCI}}{=} (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(A) + G(A)$$
$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$
$$\underset{\text{TFCI}}{=} \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\, dx .$$

Esempio:

$$\int x + e^x\, dx = \int x\, dx + \int e^x\, dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

$$\int_0^\pi 2 + \sin(x)\, dx = \int_0^\pi 2\, dx + \int_0^\pi \sin(x)\, dx = 2x\Big|_0^\pi + (-\cos(x))\Big|_0^\pi = 2\pi + 1 + 1 = 2\pi + 2$$
$$= 2\pi$$

II) Prodotto di una funzione per una costante

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$
$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx .$$
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua
$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx .$$

Dimostrazione:

Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

Mostriamo che λF è una primitiva di λf:

$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda \cdot f$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

Esempio:
$$\int 2\cos(x)\, dx = 2\int \cos(x)\, dx = 2\sin(x) + c$$
$$\int_1^2 \frac{3}{x}\, dx = 3 \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = 3 \log(x)\Big|_1^2 = 3\log(2)$$

Possiamo riassumere le regole I) e II) in un'unica regola:
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b n f(x) + m g(x)\, dx = n \int_a^b f(x)\, dx + m \int_a^b g(x)\, dx.$$

Esempio: $\int_0^1 2x^2 - 3x\, dx = 2\int_0^1 x^2\, dx - 3\int_0^1 x\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-5}{6}$

III) Regola di integrazione per parti

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua, g derivabile, e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.
Allora
$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$
e
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) g(b) - F(a) g(a) - \int F(x) g'(x)\, dx$$

Dimostrazione: Possiamo riscrivere la prima formula come
$$\int f(x) g(x) + F(x) g'(x)\, dx = F(x) g(x).$$
Questa scrittura dice che Fg è una primitiva di $fg + Fg'$.
Verifichiamolo:
$$(Fg)'(x) = F'(x) g(x) + F(x) g'(x) = f(x) g(x) + F(x) g'(x).$$

Abbiamo $\int_a^b f(x) g(x) + F(x) g'(x) = F(x) g(x) \Big|_a^b$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) g(x) = F(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x).$$

Esempio: $\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + c$

$\int x e^x\, dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\, dx = \dots ?$ non utile

$\int \log x\, dx = \int \log x \cdot 1\, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x \log x - x + c$

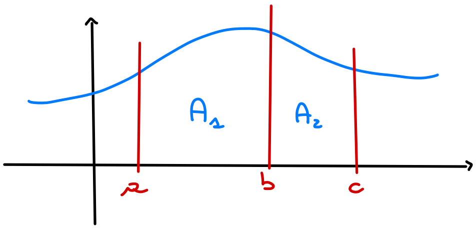
$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx = -x \cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\, dx = \pi + \sin(x)\Big|_0^\pi = \pi$

PROPRIETÀ:

Ricordiamo che $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

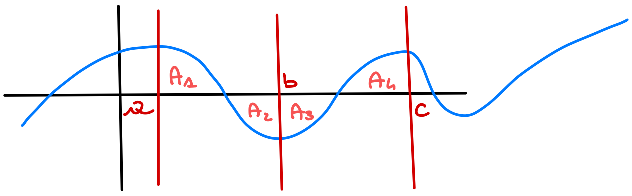
Supponiamo $a<b<c$, $f \geq 0$, allora



$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

$= \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2) = \text{Area}(A_1 \cup A_2) = \int_a^c f(x)\,dx$

Se $a<b<c$ e f ha segno qualsiasi



$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
$= \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) - \text{Area}(A_3) + \text{Area}(A_4) = \text{Area}(A_1 \cup A_4) - \text{Area}(A_2 \cup A_3)$
$= \int_a^c f(x)\,dx.$

Se $c<b<a$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se $b<a<c$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

e così via ....

Es. $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos^2(x)\,dx$

$= \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\,dx = x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi \quad \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\,dx\,dx = x\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Es: $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \left[-e^x \cos(x) - \int -e^x \cos(x)\,dx \right]$

$= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

$\int e^x \cos(x) = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

Lezione 38

Esercizio: Trovare la primitiva di $\int (1-4x)^a\, dx$ con $a \neq -1$.

Svolgimento: Sostituisco $t = 1-4x \Rightarrow dt = -4dx$

$$\Rightarrow \int (1-4x)^a\, dx = -\frac{1}{4}\int t^a\, dt = -\frac{1}{4(a+1)} t^{a+1} + c = -\frac{(1-4x)^{a+1}}{4(a+1)} + c$$

risostituisco $t = 1-4x$

Esercizio: Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\, dt$

Svolgimento:

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}\int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left(3^{3/2} - 1\right).$$

sostituisco $x = 1+2t^2$, $dx = 4t\, dt$

se $t=0$, allora $x=1$

se $t=1$, allora $x=3$

Esercizio: Trovare la primitiva di $\int x^a \cdot \log(x)\, dx$ con $a \neq -1$.

Svolgimento:

$$\int x^a \log x\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{1}{a+1}\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + c$$

Esercizio : Trovare la primitiva di $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ al variare di a, b, c.

Svolgimento: Dividiamo l'esercizio in 3 casi:

consideriamo ax^2+bx+c e $\Delta = b^2-4ac$.

CASO 1: $\Delta > 0$

CASO 2: $\Delta = 0$

CASO 3: $\Delta < 0$

CASO 1: Abbiamo due soluzioni $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Possiamo riscrivere ax^2+bx+c come $a(x-x_1)(x-x_2)$. Inoltre

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Cerco A, B affinché $\frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -B \\ B(x_2-x_1) = 1 \end{cases} \qquad B = \frac{1}{x_2-x_1} = \frac{1}{\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)-\left(\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)} = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

$$A = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

Dunque $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_2)}\,dx$

Chiamo $x - x_1 = t$

$\Rightarrow dx = dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|x-x_1| + c$

quindi $-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_2)}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_1| + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_2| + c$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{|x-x_2|}{|x-x_1|} + c$$

CASO 2: $\Delta = 0$, dunque la soluzione di $ax^2+bx+c=0$ è $x_0 = -\frac{b}{2a}$

quindi $(ax^2+bx+c) = a(x-x_0)^2 = \frac{(2ax+b)^2}{4a}$.

Abbiamo $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = 4a\int \frac{1}{(2ax+b)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\left(-\frac{1}{t} + c\right)$

chiamo $2ax-b = t$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{2a}$

$$= -\frac{2}{t} + c$$

$$= -\frac{1}{ax+\frac{b}{2}} + c$$

3) $ax^2+bx+c = ax^2+bx \pm \frac{b^2}{4a} + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\left[\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} + 1\right]$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \int \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} + 1}\, dx = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \int \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\right) dt$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right) + c$$

Esercizio Trovare la primitiva di $\dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ con a,b,c,d,e dati, $a \neq 0$, $d \neq 0$.

Svolgimento: $(ax^2+bx+c)' = 2ax + b$

$$dx+e = \frac{d}{2a}\left(\frac{2a}{d}(dx+e)\right) = \frac{d}{2a}\left[2ax + \frac{2ae}{d}\right] = \frac{d}{2a}\left[2ax+b-b+\frac{2ae}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2a}\left[2ax+b\right] - \frac{bd}{2a} + e$$

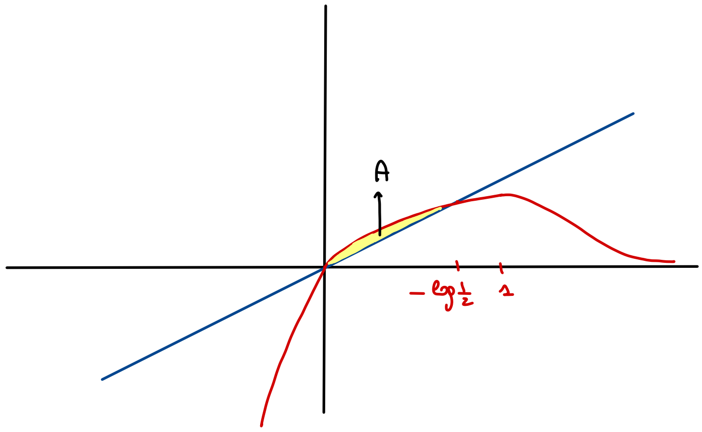
Quindi

$$\int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{d}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \underbrace{\left(e-\frac{bd}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{questa parte si tratta come nell'esercizio precedente}}$$

. Se chiamiamo $f(x) = ax^2+bx+c$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int f'(x)\cdot(f(x))^{-1}\,dx = \log|f(x)| + c = \log|ax^2+bx+c| + c$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{2} \le y \le xe^{-x}\} = A$ dopo averlo disegnato.



$f(x) = xe^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = 0$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) \ge 0 \qquad 1-x \ge 0 \qquad x \le 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$

$\frac{x}{2} = xe^{-x} \qquad x = 0$

$\frac{1}{2} = e^{-x} \Rightarrow \log\frac{1}{2} = -x \Rightarrow x = -\log\frac{1}{2} = \log 2$

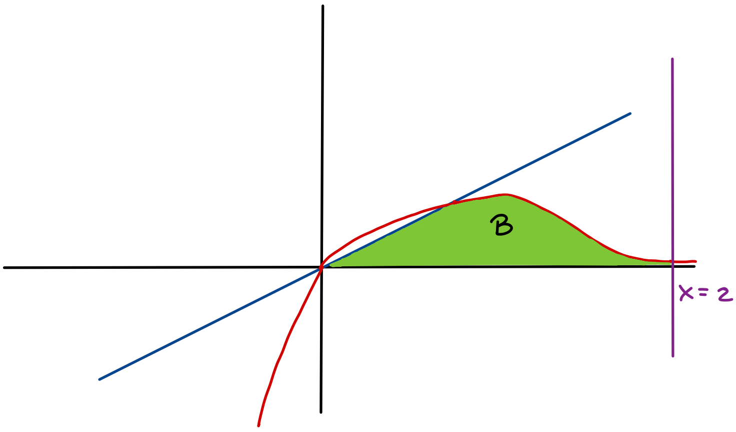
$$\text{Area}(A) = \int_0^{\log 2} xe^{-x} - \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} -e^{-x}\, dx - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\log 2}$$

$$= -\log 2\, e^{-\log 2} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\log 2} - \frac{(\log 2)^2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}(\log 2)^2$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y \ge 0 \text{ e } y \le \frac{x}{2} \text{ e } y \le xe^{-x} \text{ e } x \le 2\} = B$



$$\text{Area}(B) = \int_0^{\log 2} \frac{x}{2}\, dx + \int_{\log 2}^{2} xe^{-x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\log 2} + \left[-xe^{-x}\right]_{\log 2}^{2} + \left[-e^{-x}\right]_{\log 2}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 - 2e^{-2} + \frac{1}{2}\log 2 - e^{-2} + \frac{1}{2}$$

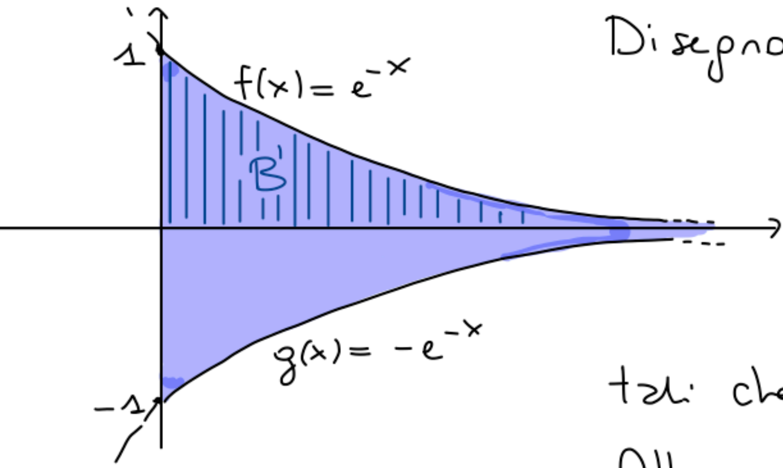
$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 + \log\sqrt{2} - 3e^{-2} + \frac{1}{2}$$

Lezione 42

Esercizio: Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ |y| \leq e^{-x}\}$

Calcolare l'area di B.

Svolgimento: $|y| \leq e^{-x} \iff -e^{-x} \leq y \leq e^{-x}$



Disegno $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = -e^{-x}$

L'insieme B è colorato in figura.

Chiamo $B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$

Allora $Area(B) = 2\, Area(B')$

$$Area(B') = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left(\left[-e^{-x} \right]_0^c \right)$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left(-e^{-c} + 1 \right) = 1$$

$$Area(B) = 2 \cdot Area(B') = 2 \cdot 1 = 2$$

Esercizio: Disegnare la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ e l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ \frac{1}{x^2} \leq y \leq f(x)\}$

Calcolare $Area(A)$.

Svolgimento. Consideriamo $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$Dom(f) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^2} = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \log x}{x^4}$$

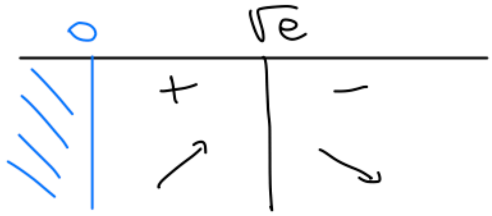
$f'(x) \geq 0 \qquad \dfrac{x - 2x\log(x)}{x^4} \geq 0$

$x(1 - 2\log(x)) \geq 0$

$x > 0$ nel $\mathrm{Dom}(f)$

$1 - 2\log(x) \geq 0$

$x \leq e^{1/2} = \sqrt{e}$



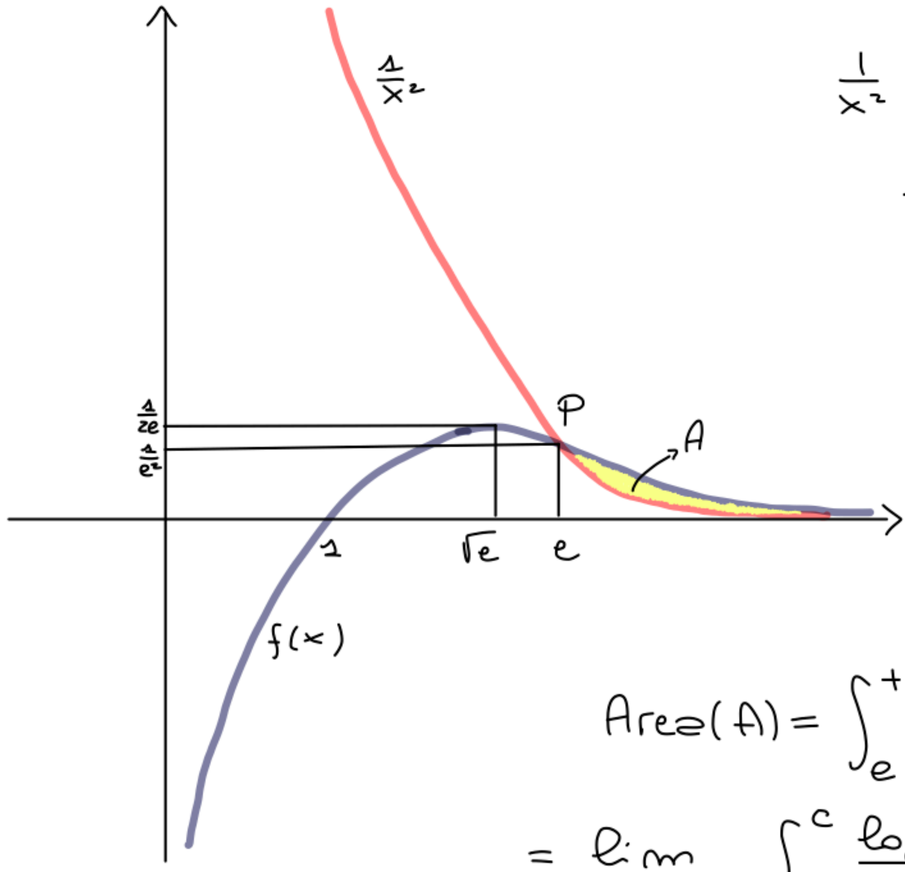
$f(\sqrt{e}) = \dfrac{\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \dfrac{1}{2e} \simeq 0{,}18$

Intersezione tra $\frac{1}{x^2}$ e $f(x)$

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\log(x)}{x^2}$

$\Rightarrow x = e$

$P(e\,;\,\frac{1}{e^2})$



$\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\log(x)}{x^2}$

$\Rightarrow x \geq e$

$\mathrm{Area}(A) = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \displaystyle\lim_{c \to +\infty} \int_e^c \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \displaystyle\lim_{c \to +\infty} \int_e^c \underbrace{\log(x)}_{g} \cdot \underbrace{x^{-2}}_{f}\,dx - \frac{1}{x^2}\,dx$

integro per parti

$= \displaystyle\lim_{c \to +\infty} \left(\left[\log(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_e^c - \cancel{\int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx} - \cancel{\int \frac{1}{x^2}\,dx} \right)$

$= \displaystyle\lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{\log(x)}{x}\right]_e^c = \lim_{c \to +\infty} \left(\frac{-\log(c)}{c} + \frac{1}{e} \right)$

$= \dfrac{1}{e} \Rightarrow \mathrm{Area}(A) = \dfrac{1}{e}$

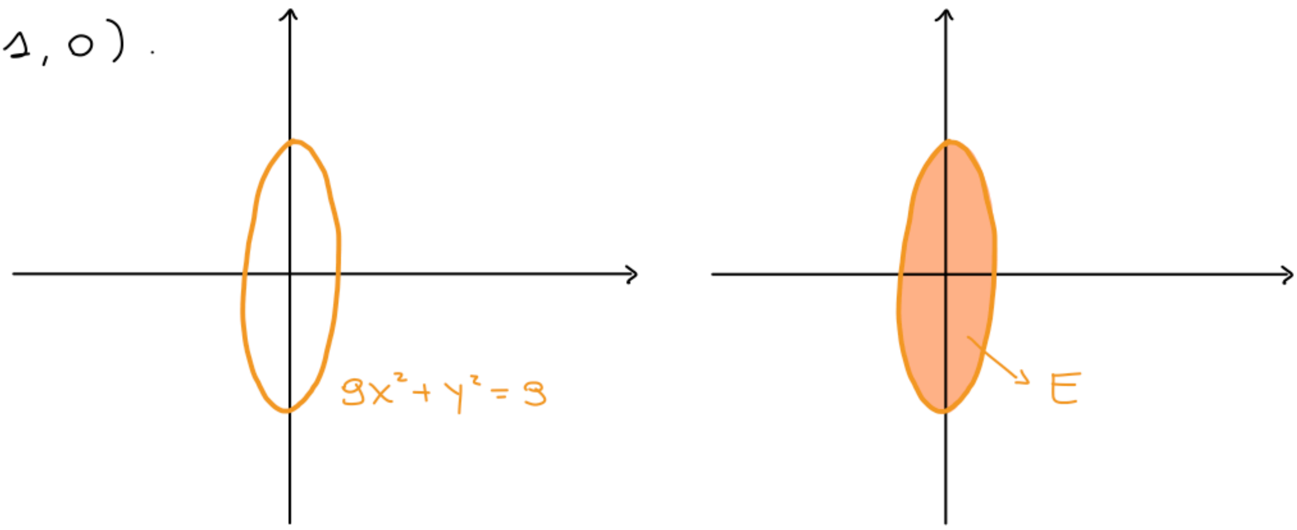
Esercizio: Disegnare l'insieme E dei punti (x,y) tali che $9x^2+y^2 \le 9$.

- Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare E (1) attorno all'asse x
  (2) attorno all'asse y.

Svolgimento: Come prima cosa disegnamo E.

Parto dal disegnare la curva $9x^2+y^2=9$

I° modo: La curva $9x^2+y^2=9$ è una ellisse di centro $(0,0)$, con assi paralleli agli assi cartesiani e vertici $V_{1,2}=(0,\pm 3)$ $V_{3,4}(\pm 1, 0)$.

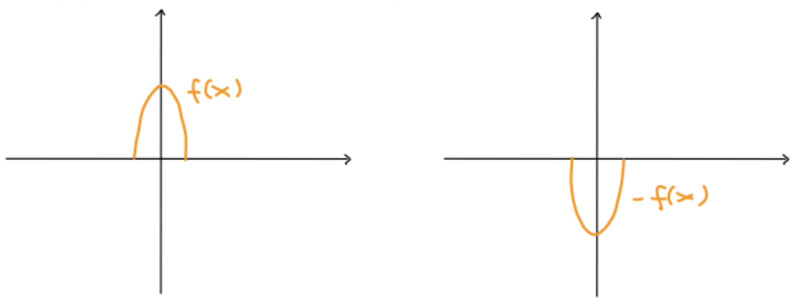


II° modo:

$$9x^2+y^2=9 \iff y^2=9-9x^2$$
$$\iff y=\pm 3\sqrt{1-x^2}$$

Chiamo $f(x)=3\sqrt{1-x^2}$, allora possiamo descrivere equivalentemente E come

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -f(x)\le y\le f(x)\}$$



(1) Chiamo A il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse x.

$$\text{Volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} 9 - 9x^2 \, dx = 2\pi \int_0^1 9 - 9x^2 \, dx$$

$$= 2\pi \left[9x - 3x^3 \right]_0^1 = 12\pi.$$

(2) Chiamo B il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y.

$$9x^2 + y^2 = 9 \iff x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2$$

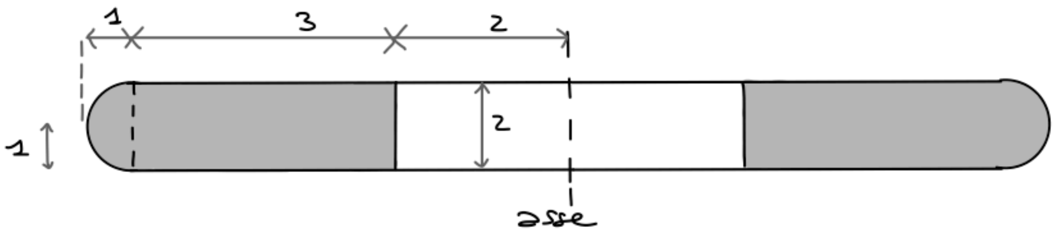
$$\iff x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}y^2}$$

Chiamo $g(y) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}y^2}$

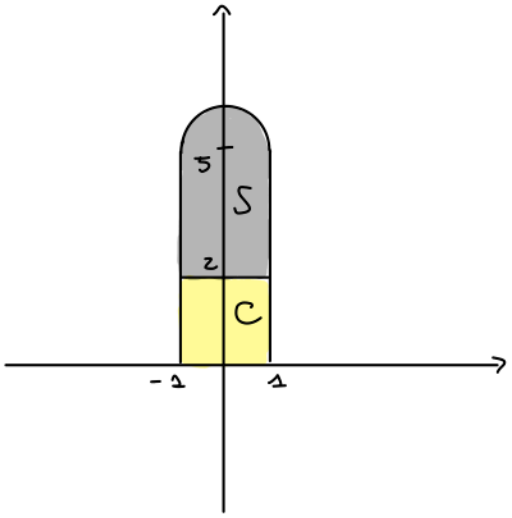
$$\text{Volume}(B) = \pi \int_{-3}^{3} (g(y))^2 \, dy = \pi \int_{-3}^{3} 1 - \frac{1}{9}y^2 \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^3 1 - \frac{1}{9}y^2 \, dy = 2\pi \left[y - \frac{1}{27}y^3 \right]_0^3 = 4\pi$$

Esercizio: Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sessione S è rappresentata in grigio nella figura:



Calcolare il volume della ruota.



Facciamo coincidere l'asse della ruota con l'asse delle x come nella figura. Chiamiamo C il quadrato giallo e S la parte in grigio.

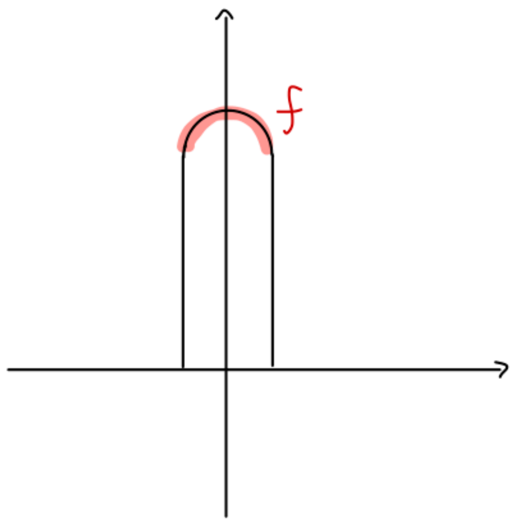
Il volume della ruota è dato da

$$\text{Volume (ruota)} = v_p - v_c$$

dove v_p è il volume della ruota piena ottenuta facendo ruotare attorno all'asse x la figura piena $S \cup C$ e v_c è il volume del cilindro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x il quadrato giallo.

Il cilindro ha raggio di base $r=2$ e altezza $h=2$

$$v_c = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$$



Abbiamo

$$v_p = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx$$

dove il grafico di f è colorato di rosso nella figura.

Il grafico di f è un pezzo di una curva: la metà superiore della circonferenza di centro $(0,5)$ e raggio 1.

Questo pezzo di curva può essere parametrizzato da $f(x) = 5 + \sqrt{1-x^2}$.

Infatti la circonferenza di centro $(0,5)$ e raggio 1 ha equazione $x^2+(y-5)^2=1$.

Esprimiamo y in funzione di x:

$$(y-5)^2 = 1-x^2$$

$$y-5 = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{1-x^2}$$

Abbiamo $f(x) = 5+\sqrt{1-x^2}$ (e $y = 5-\sqrt{1-x^2}$ è l'altra metà della circonferenza).

Quindi

$$V_p = \pi\int_{-1}^{1}\left(5+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} 25+1-x^2+10\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 26 - 2\pi\int_0^1 x^2 + 20\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\left[26x\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt$$

cambio di variabile $x=\sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$

$$= 52\pi - \frac{2}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

$$= \frac{154}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

Svolgiamo separatamente

$$\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos(t)}_{f}\,\underbrace{\cos(t)}_{g}\,dt \underset{\text{per parti}}{=} \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^2\,dt$$

$$= \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^2\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\cos(t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Dunque

$$v_p = \frac{154}{3}\pi + 20\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2$$

Concludendo

$$\text{Volume (ruota)} = v_p - v_c = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2 - 8\pi$$

$$= \frac{130}{3}\pi + 5\pi^2$$

Lezione 44 - seconda parte.

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\sin(e^{3t}), -\cos(e^{3t}))$.
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e $t=1$.

Svolgimento. In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Visto che

$$(\sin(e^{3t}))' = 3e^{3t}\cos(e^{3t}), \quad (-\cos(e^{3t}))' = 3e^{3t}\sin(e^{3t})$$

abbiamo $\underline{\vec{v}(t) = (3e^{3t}\cos(e^{3t}), 3e^{3t}\sin(e^{3t}))}$.

Per calcolare la distanza percorsa dobbiamo calcolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

si ha

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(3e^{3t}\cos(e^{3t}))^2 + (3e^{3t}\sin(e^{3t}))^2}$$
$$= \sqrt{9e^{6t}\cos^2(e^{3t}) + 9e^{6t}\sin^2(e^{3t})}$$
$$= \sqrt{9e^{6t}(\underbrace{\cos^2(e^{3t}) + \sin^2(e^{3t})}_{=1})}$$
$$= 3e^{3t}$$

La distanza percorsa tra $t=0$ e $t=1$ è data da

$$\int_0^1 |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^1 3e^{3t}\, dt = \left[e^{3t}\right]_0^1 = \underline{e^3 - 1}$$

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\cos(t); 2t^3 - 3\pi t^2)$.
Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla

Svolgimento. In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$

Per trovare i tempi in cui l'accelerazione è nulla devo imporre $\vec{a}(t) = (0, 0)$. Dunque devo risolvere $\boxed{\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \end{cases}}$

$x(t) = \cos(t)$, $x'(t) = -\sin(t)$, $x''(t) = -\cos(t)$;

$y(t) = 2t^3 - 3\pi t^2$, $y'(t) = 6t^2 - 6\pi t$, $y''(t) = 12t - 6\pi$

$$\begin{cases} -\cos(t) = 0 \\ 12t - 6\pi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'unico istante in cui l'accelerazione è nulla è $t = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = \left(2t^2 - \frac{5}{4}, t^3 - t\right)$.

a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.

b) Disegnare la traiettoria di P.

Svolgimento:

a) Scrivo la funzione che descrive come varia la distanza di $P(t)$ dall'origine al variare di t:

$$f(t) = d(P(t); 0) = |P(t)|$$
$$= \sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 - t)^2}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Cerco $\min(f)$.

$$\lim_{t\to\mp\infty} \sqrt{\left(2t^2-\frac{5}{4}\right)^2 + (t^3-t)^2} = +\infty$$

$$f'(t) = \frac{2\left(2t^2-\frac{5}{4}\right)(4t) + 2(t^3-t)\cdot(3t^2-1)}{2\sqrt{\left(2t^2-\frac{5}{4}\right)^2 + (t^3+t)^2}}$$

$$= \frac{8t^3 - 5t + 3t^5 - 3t^3 - t^3 + t}{\sqrt{\left(2t^2-\frac{5}{4}\right)^2 + (t^3+t)^2}}$$

$$= \frac{3t^5 + 4t^3 - 4t}{\sqrt{\left(2t^2-\frac{5}{4}\right)^2 + (t^3+t)^2}}$$

$$f'(t) = 0 \iff t(3t^4 + 4t^2 - 4) = 0$$

$x = t^2 \qquad 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{3} \begin{cases} = \frac{2}{3} \\ = -2 \end{cases}$$

$t = 0, \quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(0) = \frac{25}{16} \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{2}{27}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{35}}{\cancel{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3}} \simeq 0{,}28$$

$$\frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}} < \frac{25}{16} < +\infty$$

minimo.

La distanza minima è $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}}$

b) $P(t) = (x(t), y(t)) = \left(2t^2 - \frac{5}{4},\ t^3 - t\right)$.

Dunque $x = 2t^2 - \frac{5}{4}$

$2t^2 = x + \frac{5}{4}$

$$t^2 = \frac{x}{2} + \frac{5}{8} = \frac{4x+5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}} \qquad \text{con} \quad x \geq -\frac{5}{4}$$

$$y = t^3 - t = t(t^2-1) = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

Per disegnare la traiettoria dobbiamo disegnare

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

e $\quad g(x) = -f(x)$.

Inizio disegnando $f(x)$.

* $\mathrm{Dom}(f) = \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right) = +\infty$

  $f\left(-\frac{5}{4}\right) = 0$

* segno: $f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{3}{4}$

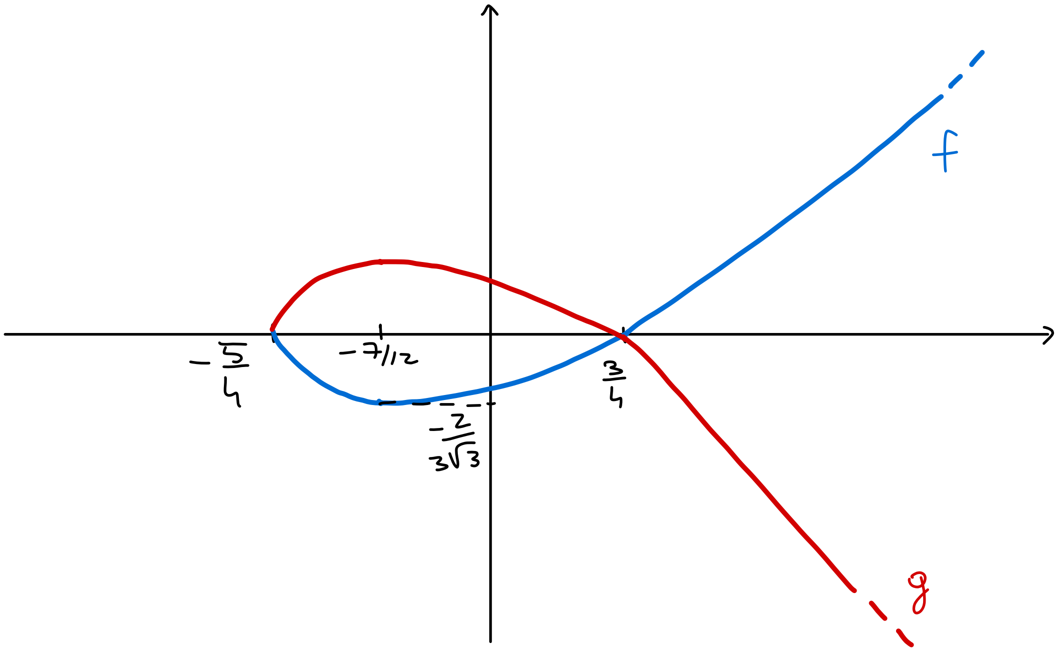
* $$f'(x) = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\frac{2(4x-3)}{\sqrt{4x+5}} + 4\sqrt{4x+5}\right]$$

$$= \frac{8x-6+16x+20}{16\sqrt{2}\sqrt{4x+5}} = \frac{24x+14}{16\sqrt{2}\sqrt{4x+5}} = \frac{12x+7}{8\sqrt{2}\sqrt{4x+5}}$$

$f'(x) \geq 0 \qquad x \geq -\frac{7}{12}$

	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{12}$	
	$-$		$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{-\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cancel{16}}{3}}{\cancel{16}\cancel{\sqrt{2}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$


f
g
$-\frac{5}{4}$
$-7/12$
$\frac{3}{4}$
$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$