Grafici delle funzioni elementari

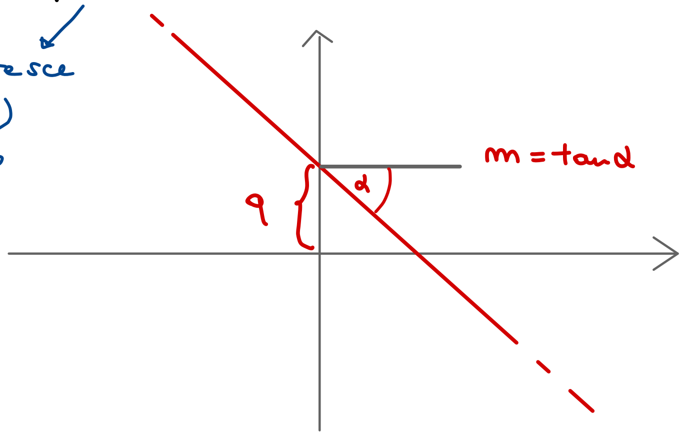
In questo corso considereremo quasi sempre funzioni $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

GRAFICO di una funzione $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\Gamma_f := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ con } x \in X \}$

RETTE

* Come disegnare una retta $y = mx + q$
q mi indica l'altezza con cui la retta interseca l'asse delle y ed
m mi indica la pendenza

di quanto sale/cresce (scende/decresce) la y aumentando la x di 1.



α è l'angolo acuto formato dalla retta e da una qualsiasi retta orizzontale

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

senso antiorario ↺ α positivo
senso orario ↻ α negativo

In questo modo disegno tutte le rette, tranne quelle verticali che NON sono funzioni

POTENZE

Ricordiamo che

se $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ è la radice quadrata positiva di a.

se $a \in \mathbb{R}$, b intero positivo non nullo allora $a^b = a \cdot \ldots \cdot a$ b volte

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b intero positivo non nullo $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $a^0 := 1$ (0^0 non viene definito)

se $a \geq 0$, $b > 0$, $b = \frac{p}{q}$ (con p, q interi positivi non nulli) $a^b = \sqrt[q]{a^p}$

se $a > 0$, $b < 0$, $b = -\frac{p}{q}$ $a^b = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Perché serve a positivo?
Supponiamo $b = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $a = -8$.

Allora avremmo $-8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8^1} = -2$

$-8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{-8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Si definisce a^b con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($a > 0$ se b neg) per approssimazione $\pi = 3{,}1416\ldots$
$2^\pi = 2^{3{,}1416\ldots} \Rightarrow$ limite $2^3, 2^{3{,}1}, 2^{3{,}14}\ldots$

* Funzioni potenza x^a

(per quali $x \in \mathbb{R}$, l'espressione x^a ha significato $\rightsquigarrow$ l'insieme di definizione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

$y = x^a$

insieme di definizione

se $a > 0$ con a intero, l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$

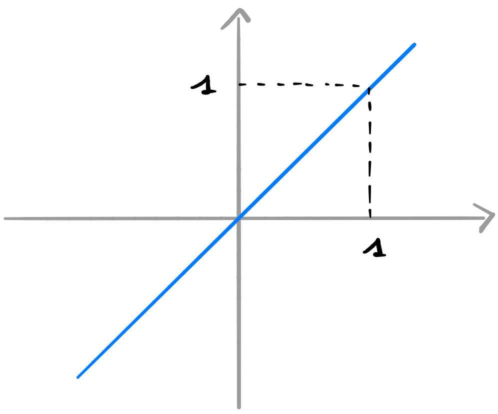
se $a \leq 0$ con a intero, $x \neq 0$, ossia l'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

se $a > 0$, con a non intero, $x \geq 0$, l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^+$

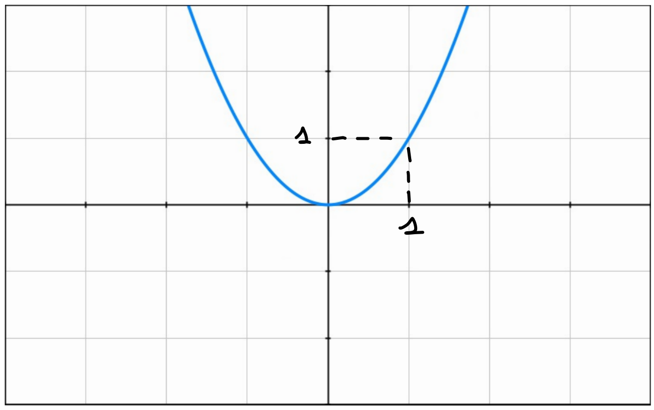
se $a < 0$, con a non intero, $x > 0$, l'insieme di definizione è $(0, +\infty)$.

GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a \geq 1$

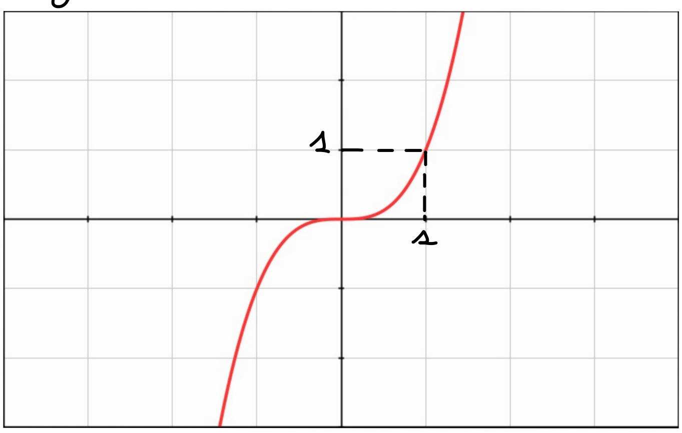
$y = x$



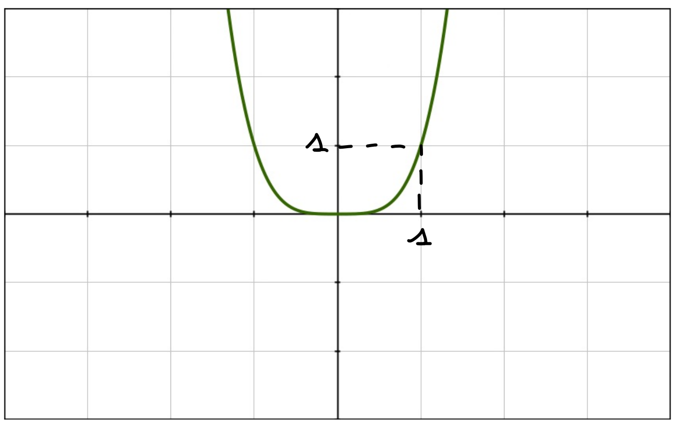
$y = x^2$



$y = x^3$



$y = x^4$



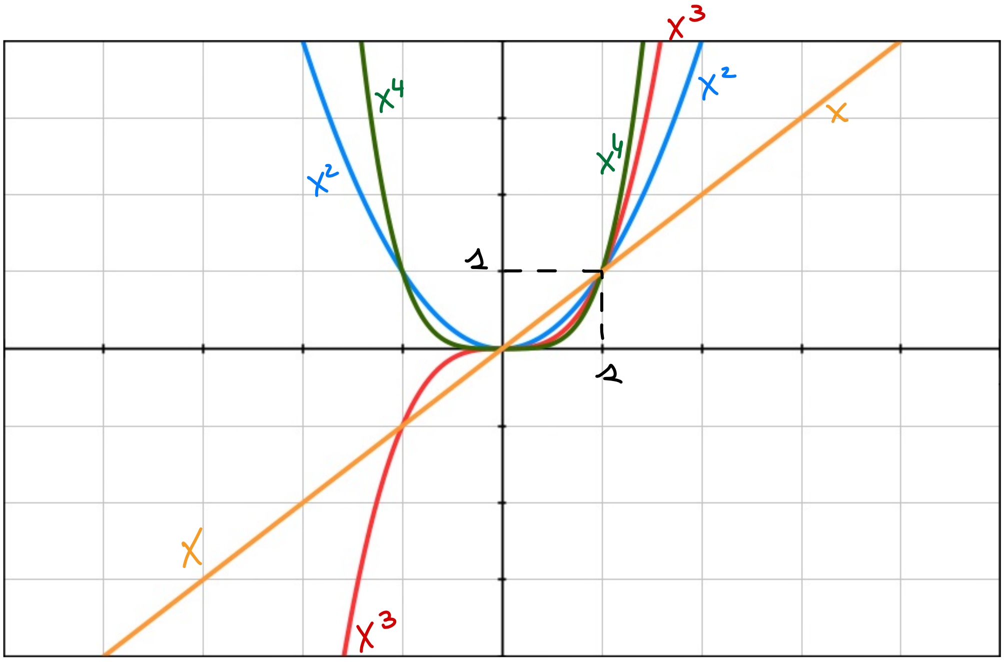
Notiamo che:

per a pari $\rightarrow$ funzione pari

per a dispari $\rightarrow$ funzione dispari

f PARI: $f(-x) = f(x)$
simmetria rispetto asse y

f DISPARI: $f(-x) = -f(x)$
simmetria centrale rispetto all'origine.

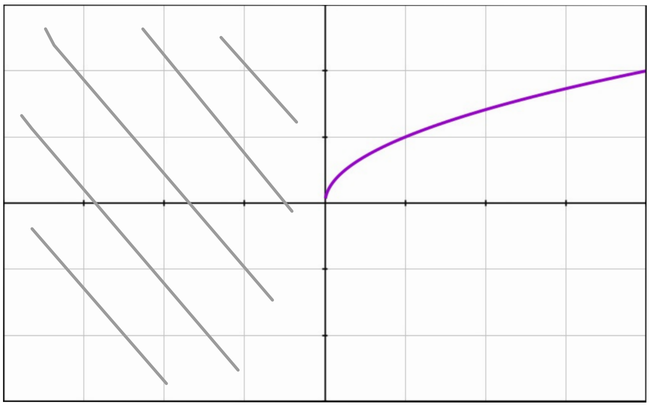


tutte passano per $(0,0)$ e per $(1,1)$

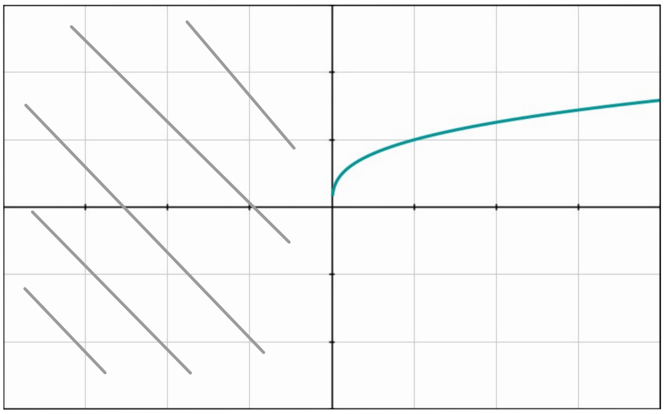
ATTENZIONE ALLA CRESCITA! (in che "ordine" sono le funzioni prima di 1 e dopo 1)

GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $0 \le a \le 1$

$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$



$y = x^{1/3}$

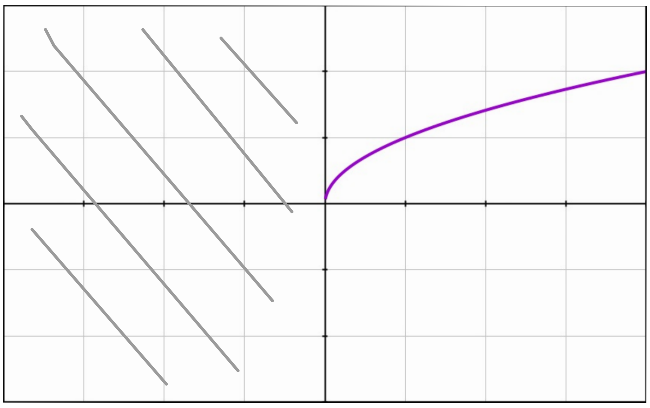


Attenzione: DIFFERENZA tra funzioni POTENZA e RADICI: abbiamo visto che se $0 < a < 1$, allora il dominio di $y = x^a$ è $x \geq 0$.

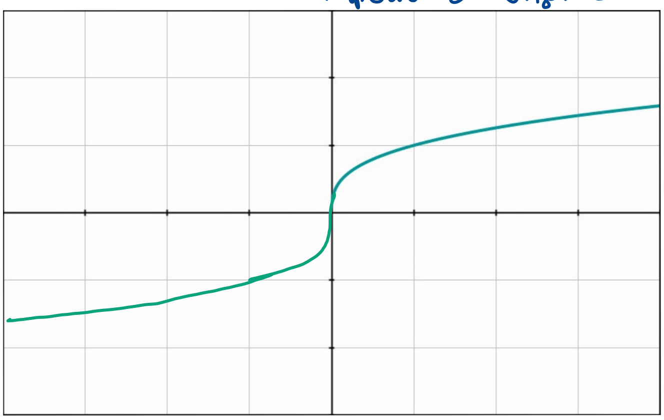
Se però parliamo della funzione $y = \sqrt[m]{x}$ con $m \in \mathbb{N}$ dispari allora l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

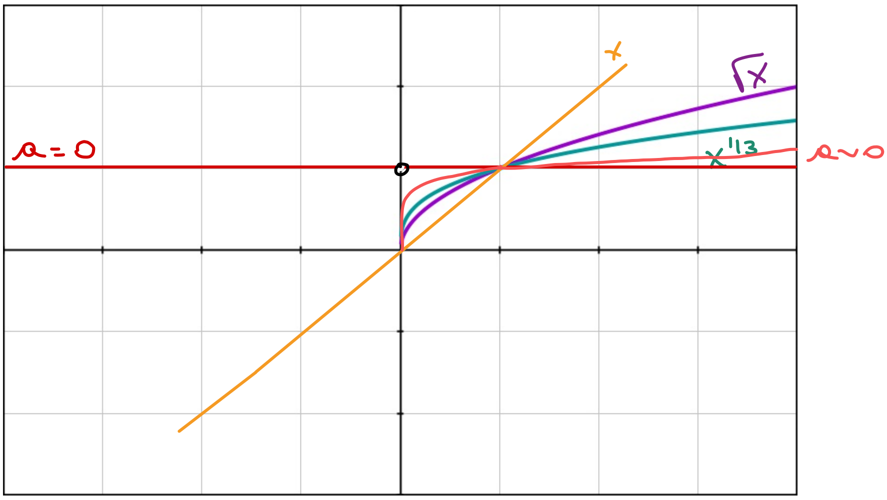
sono funzioni dispari, simmetriche rispetto all'origine

$y = \sqrt{x}$

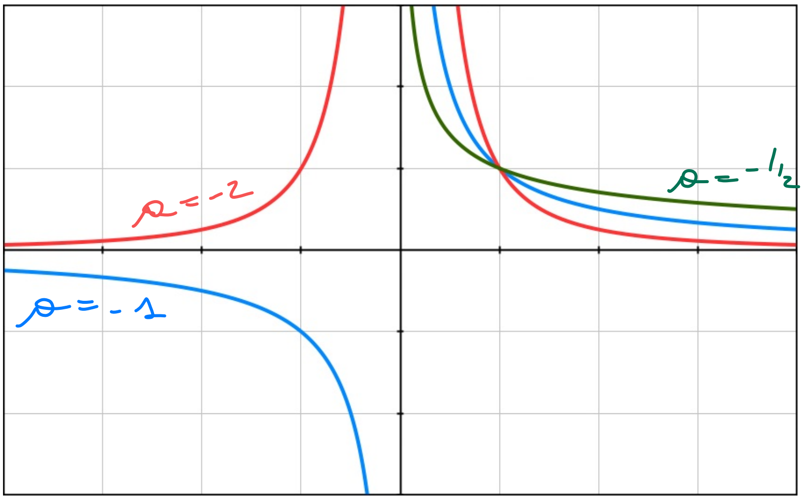


$y = \sqrt[3]{x}$





GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a < 0$

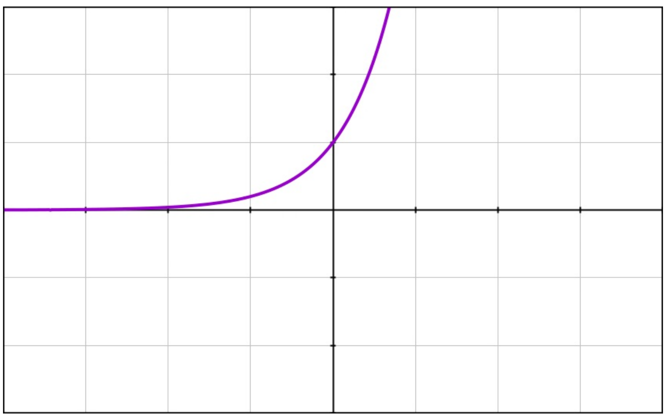


Se a è intero, sappiamo che la funzione ha come insieme di definizione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
E' dunque definita simmetricamente per gli x negativi.
Di nuovo se a pari la funzione è pari, per a dispari, la funzione è dispari.

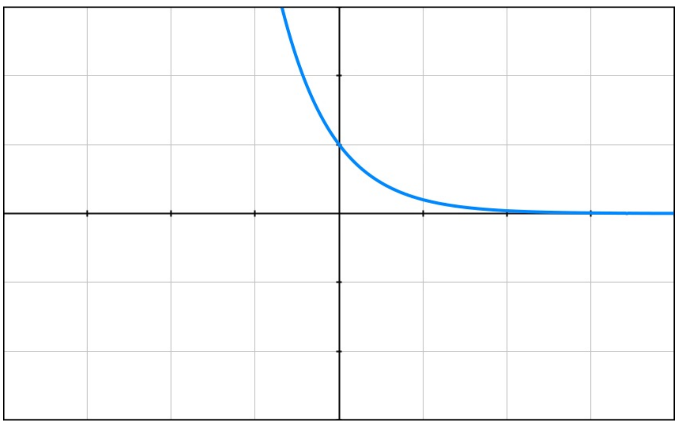
ESPONENZIALI

Sia $a > 0$, consideriamo $y = a^x$
Notiamo che qualsiasi sia a, $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Inoltre la funzione è sempre positiva.



$a > 1$



$a < 1$

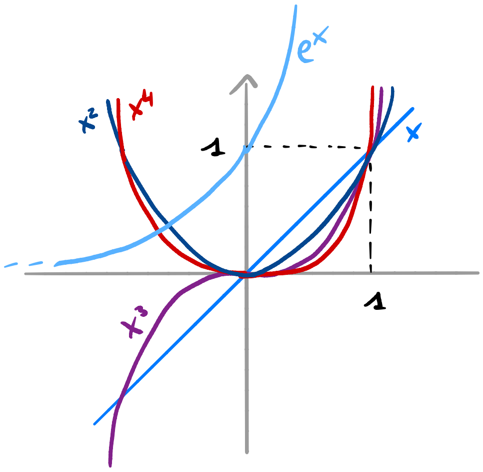
Tra tutti gli $a>0$ possibili come base dell'esponenziale privilegiamo il numero

$$e \simeq 2,718\ldots$$

"e" è il numero di Nepero

Notiamo che ogni potenza può essere scritta in base e

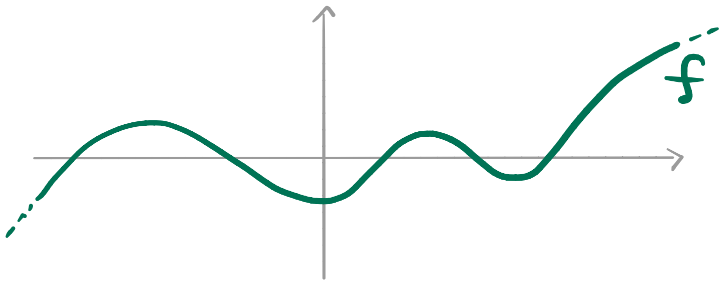
$$\boxed{a^b = e^{\log_e a^b} = e^{b \log_e a}}$$



Confronto con le funzioni potenza x^a con $a \in \mathbb{N}$
La funzione e^x va all'infinito PIÙ VELOCEMENTE di x^a, non importa quanto grande sia a.

Operazioni sui grafici

Dato il grafico di una funzione f e un numero reale a



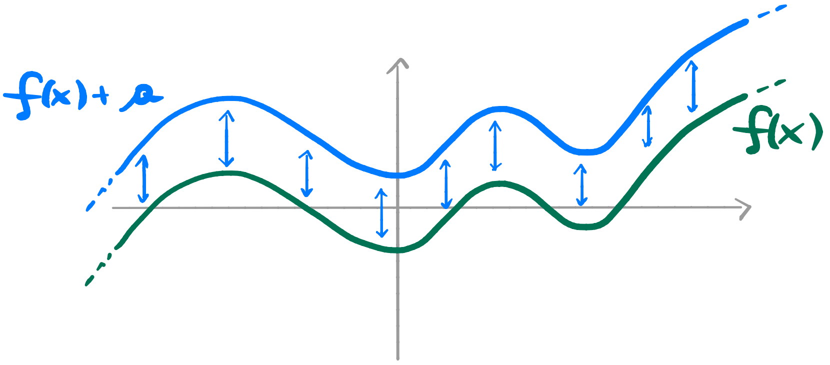
vogliamo disegnare:

i) il grafico di $f(x)+a$

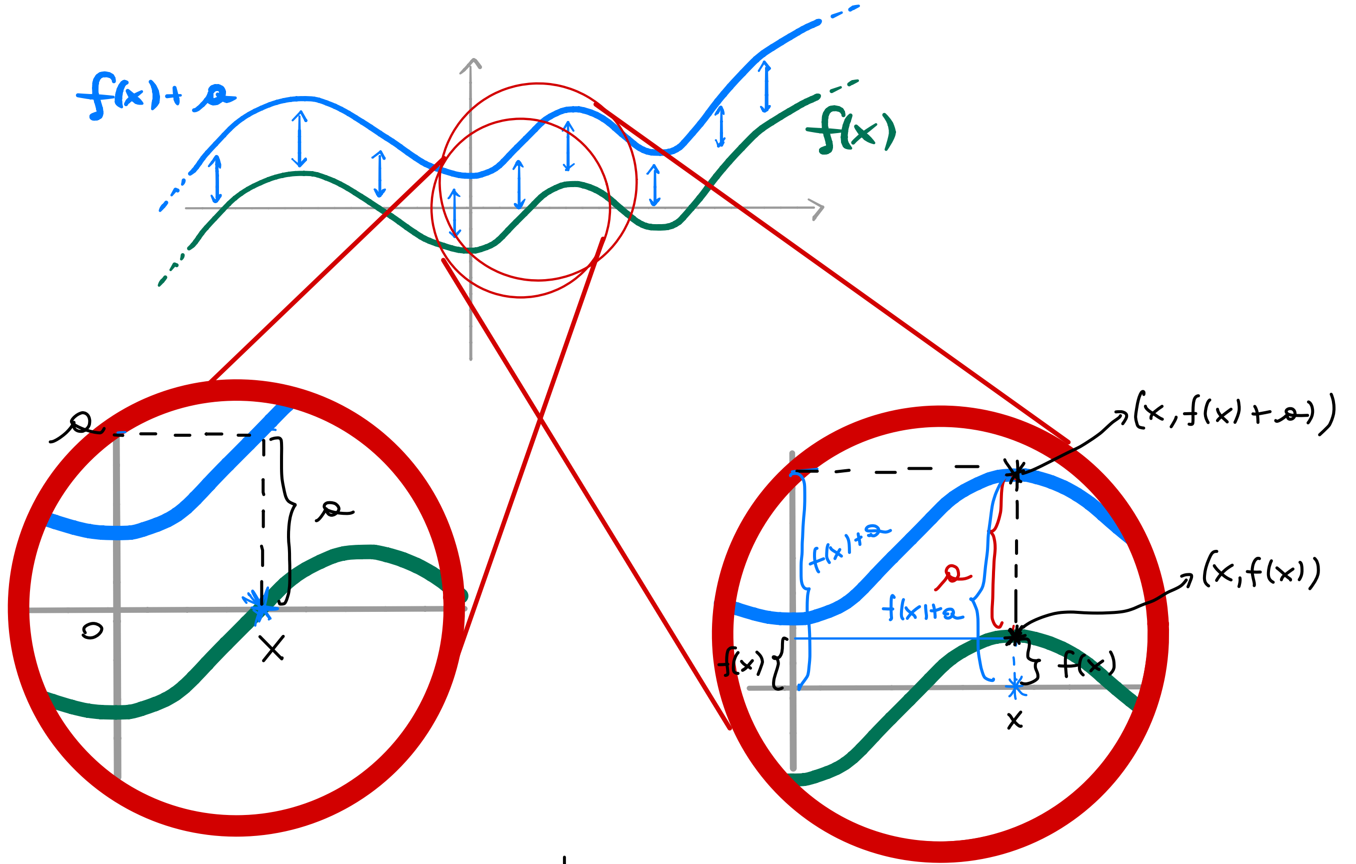
ii) il grafico di $f(x+a)$

Data $f(x)$ il grafico di $f(x)+a$ si ottiene per traslazione verticale $\updownarrow$

verso l'alto di $+a$, se a è positivo
verso il basso di $-a$, se a è negativo.



Consideriamo il caso $a>0$
(chiaramente se $a=0$ non succede niente)



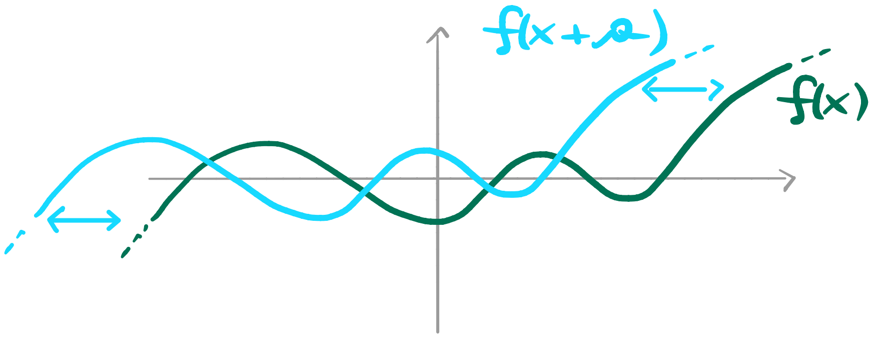
Prendiamo un punto in cui la funzione vale zero
(ossia un $x\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)=0$, $(x,0)\in\mathbb{R}^2$,
→ dove il grafico della funzione interseca l'asse delle x)
Allora $f(x)+a$ varrà a
($f(x)+a = 0+a = a$)

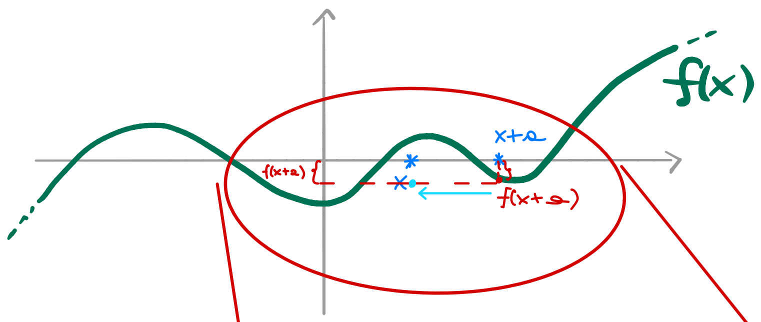
<u>Gli zeri della funzione</u> cambiano!
↳ $f: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
i punti $x\in X$ tali che $f(x)=0$

Prendiamo un punto qualsiasi del grafico $(x,f(x))$
Vogliamo disegnare il punto $(x, f(x)+a)$)

Data $f(x)$ il grafico di $f(x+a)$ si ottiene per traslazione orizzontale $\longleftrightarrow$

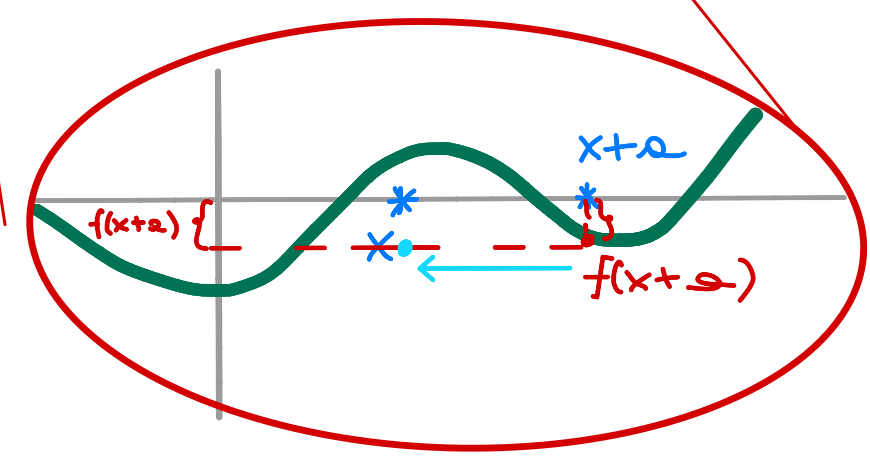
verso sinistra di $+a$, se a è positivo
verso destra di $-a$, se a è negativo.





Partiamo dal grafico di f, abbiamo l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x))$
Ora dobbiamo disegnare l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x+a))$
Supponiamo che $a>0$ (come prima, se $a=0$ non succede nulla), ad esempio $a=2$.

Prendiamo un punto x qualsiasi, ci segnamo sull'asse delle x il punto $x+a$
L'altezza sulle ascisse (valore della funzione) che dobbiamo ora associare a x per disegnare il punto $P=(x, f(x+a))$ è il valore della funzione in $x+a$.



Lezione 5 – II^a PARTE

* **Esercizio**: Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) del piano tali che

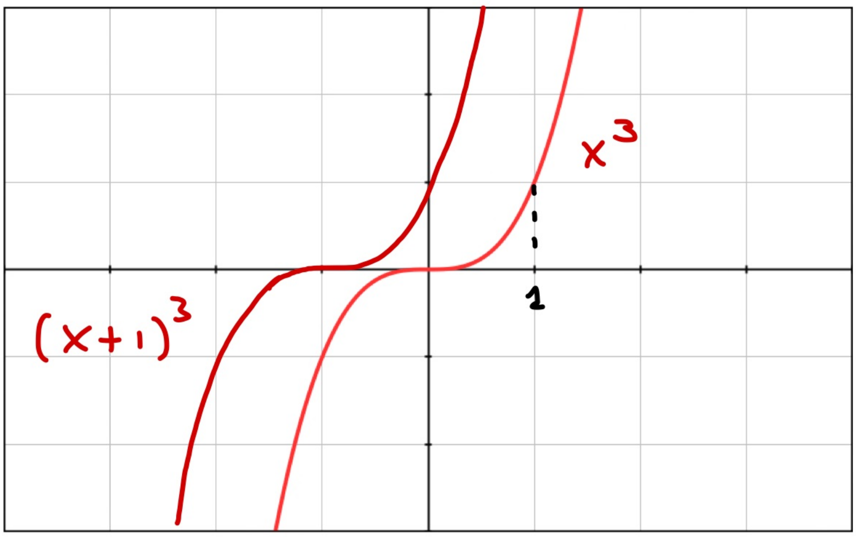
$$-1 \le x \le 1, \qquad (x+1)^3 \le y \le e^{-x}$$

Soluzione:

PRIMO PASSO: disegno il grafico di $y=(x+1)^3$

Il disegno del grafico della funzione $g:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)^3 \end{cases}$ si ottiene traslando orizzontalmente a sinistra di 1 il disegno del grafico della funzione $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

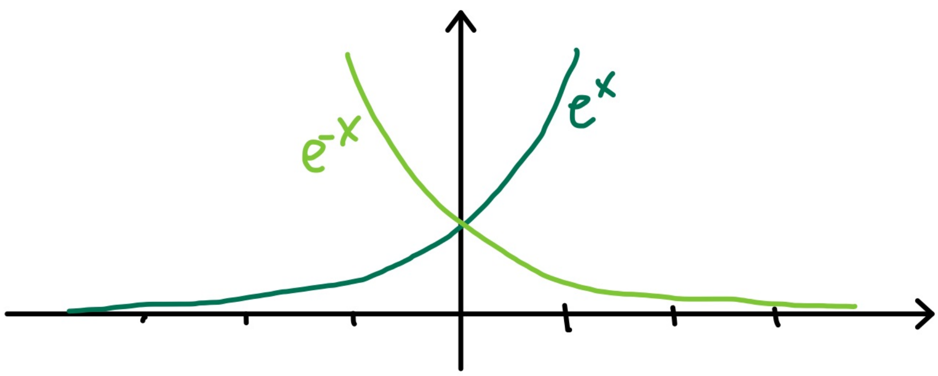
(come ottenere il grafico di $g(x) = f(x+a)$ con $a>0$ a partire dal grafico di $f(x)$).



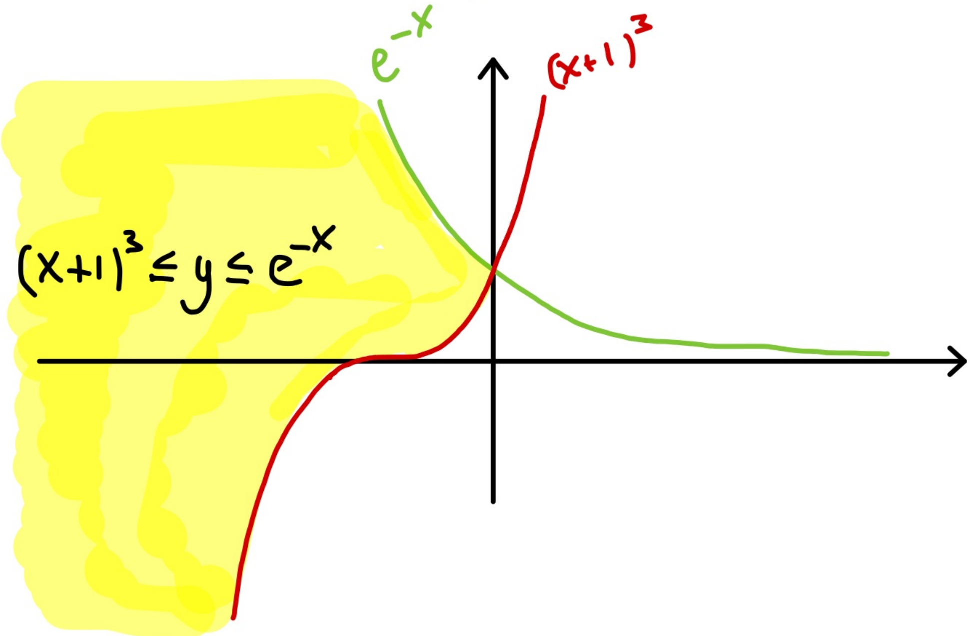
SECONDO PASSO: disegno il grafico di e^{-x}

Il disegno del grafico della funzione $h:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{cases}$ si ottiene riflettendo rispetto all'asse delle y il disegno del grafico della funzione esponenziale con base e

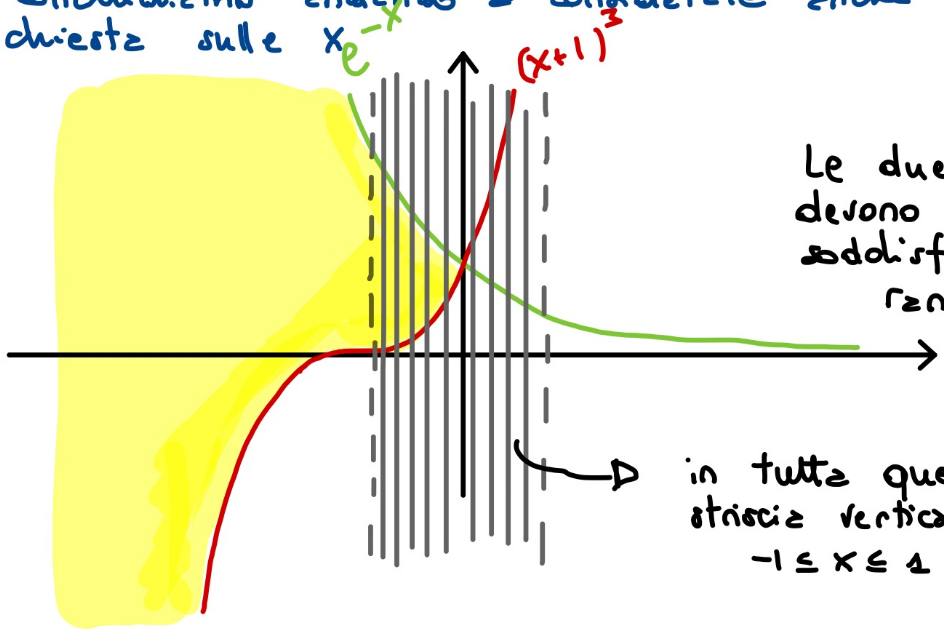
(come ottenere il grafico di $f(-x)$ a partire dal grafico di $f(x)$).



PASSO 3: Riportiamo i grafici delle due funzioni in un unico disegno e individuiamo le y richieste



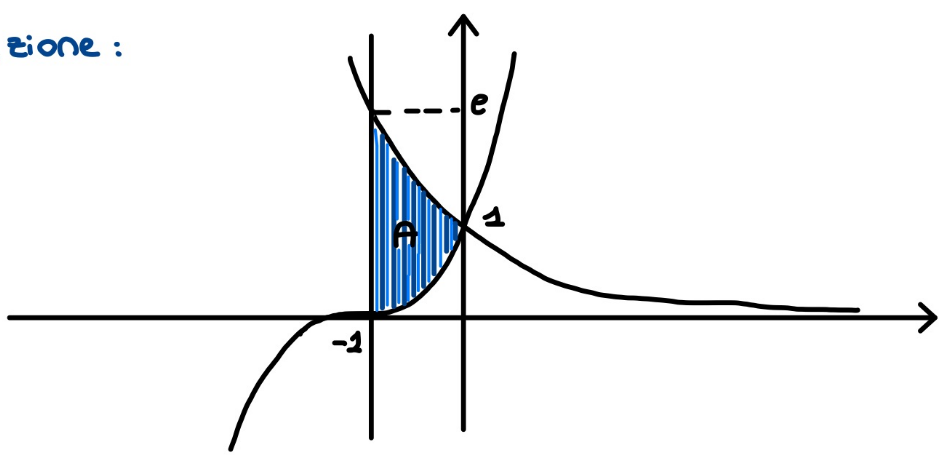
PASSO 4: Concludiamo andando a considerare anche la richiesta sulle x



Le due richieste devono essere soddisfatte contemporaneamente

in tutta questa striscia verticale $-1 \leq x \leq 1$

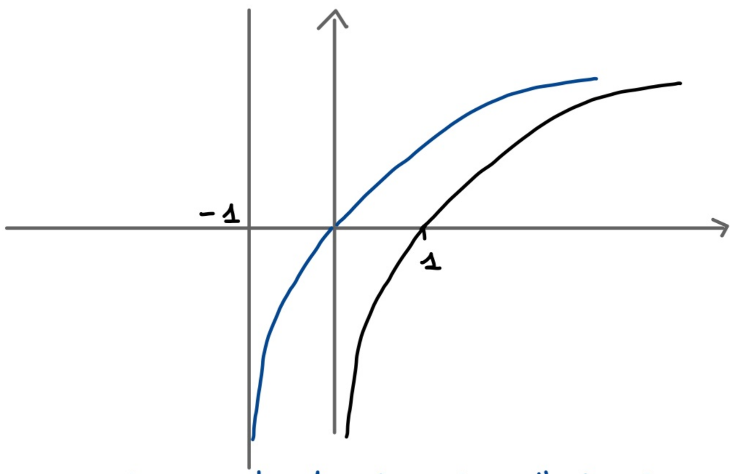
Soluzione:



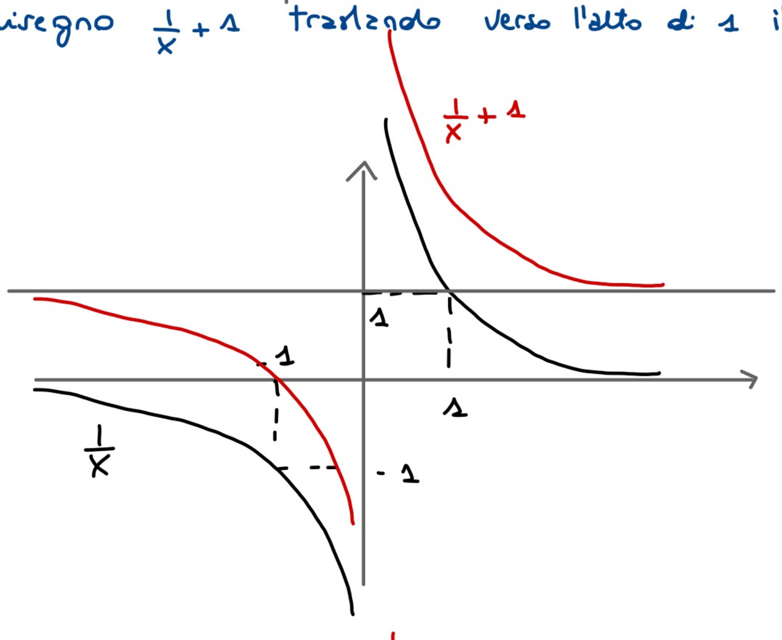
* Esercizio: Risolvere graficamente la disequazione $\log(x+1) \geq \frac{1}{x} + 1$.

Osservazione preliminare: le soluzioni della disequazione sono delle $x \in \mathbb{R}$. Quando vado a rappresentare nel piano cartesiano il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'insieme di partenza $\mathbb{R}$, dove variano le x, è identificato (rappresentato nel disegno) con l'asse delle ascisse. Dovremo dunque andare a evidenziare parti di questo asse.

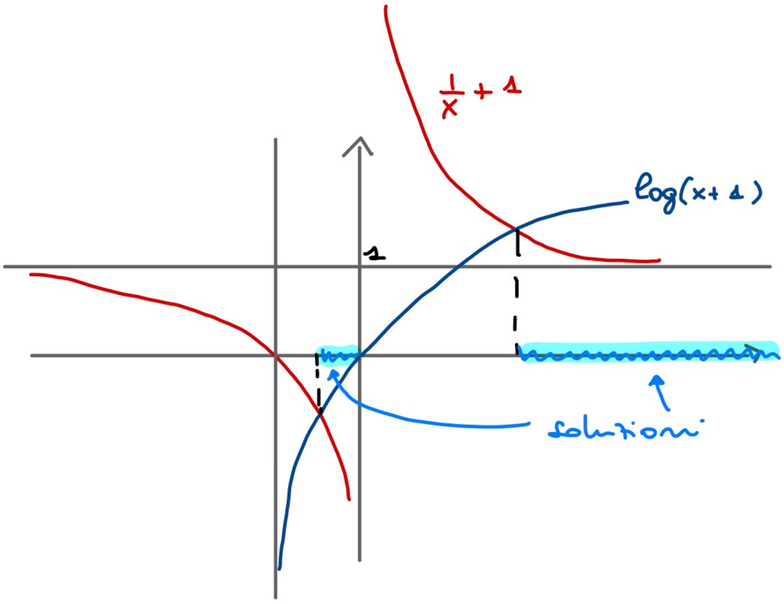
PASSO 1: disegno $\log(x+1)$ → traslazione orizzontale verso sinistra di 1 della funzione logaritmo naturale.



PASSO 2: disegno $\frac{1}{x}+1$ traslando verso l'alto di 1 il grafico di $\frac{1}{x}$



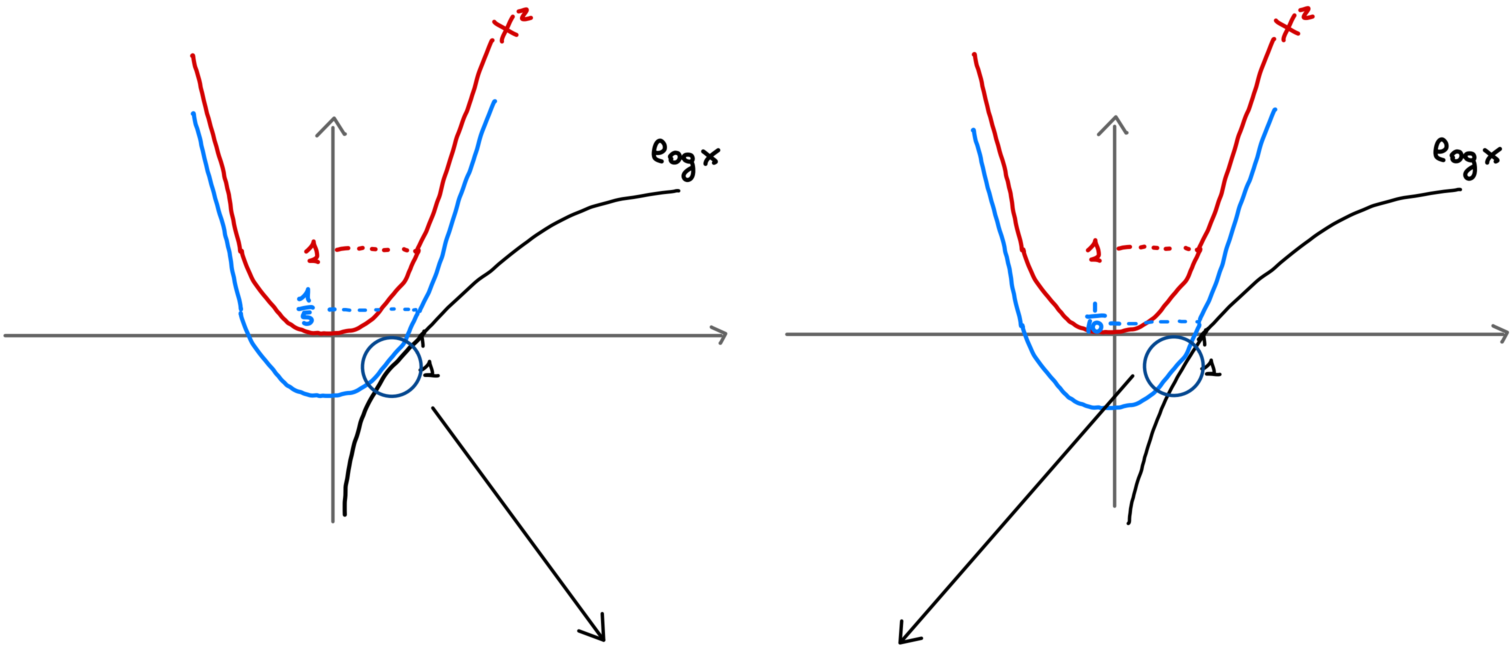
Soluzione:



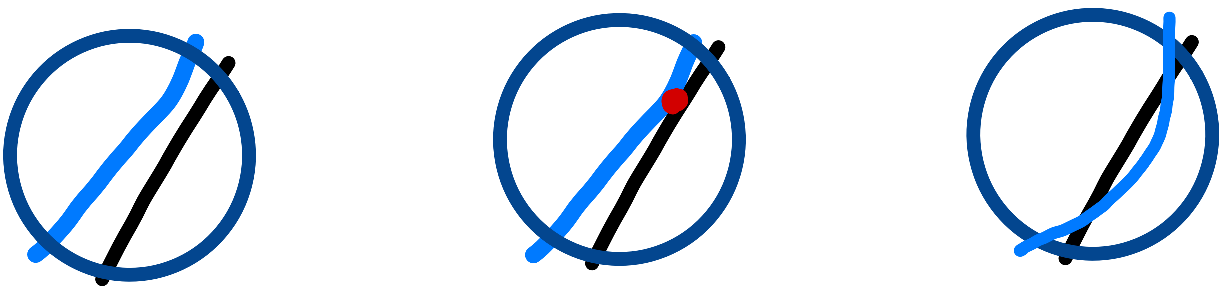
ATTENZIONE: la risoluzione grafica di una disequazione è sempre attendibile?

ESEMPIO: Risolvere graficamente la disequazione

$\log(x) \geq x^2 - \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\log(x) \geq x^2 - \frac{9}{10}$



che comportamento abbiamo nella zona cerchiata?



nessuna intersezione? $\qquad$ un punto di contatto? $\qquad$ due intersezioni?

Il disegno del grafico non è abbastanza preciso per fornirmi questa informazione.

* Esercizio : disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right|$$

Soluzione : Ci chiediamo qual è l'insieme di definizione di f: x deve essere diverso da -2. (Il disegno del grafico dovrà rispecchiare questa proprietà).

Quindi: $f: \begin{cases} (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right| \end{cases}$

Notiamo inoltre che la funzione è sempre positiva.

Dobbiamo cercare di ridurci ad una funzione elementare: la potenza $\frac{1}{x^2}$.

Cerchiamo di fare operazioni sui grafici che ci permettano di passare da $\frac{1}{x^2}$ a f.

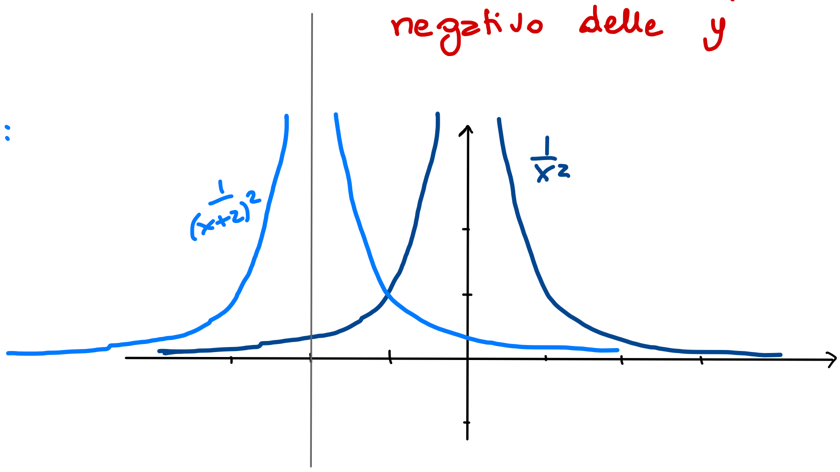
PASSO 0 : $\frac{1}{x^2}$

PASSO 1 : $\frac{1}{(x+2)^2}$ → traslazione orizzontale di $\frac{1}{x^2}$ a sinistra di 2

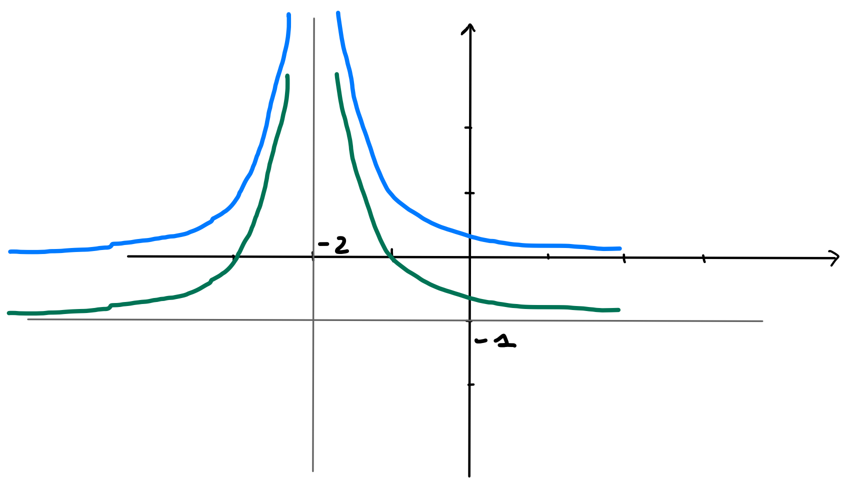
PASSO 2 : $\frac{1}{(x+2)^2} - 1$ → traslazione verticale di $\frac{1}{(x+2)^2}$ verso il basso di 1

PASSO 3 : $\left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right|$ → rifletto rispetto all'asse x tutta la parte del grafico di $\frac{1}{(x+2)^2} - 1$ che sta nel semipiano negativo delle y

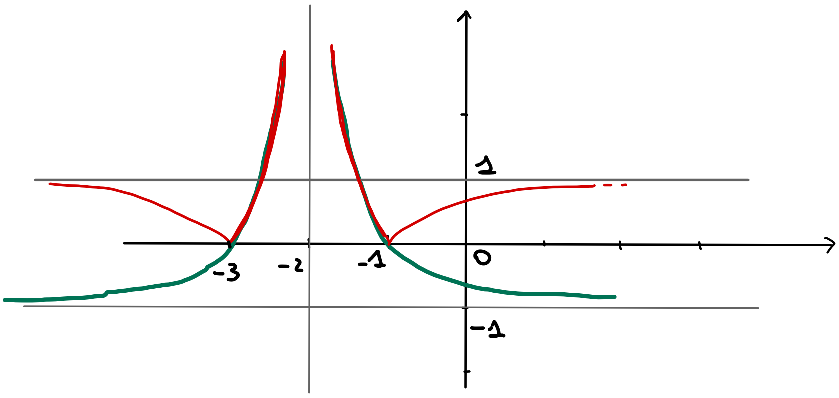
PASSO 1 :



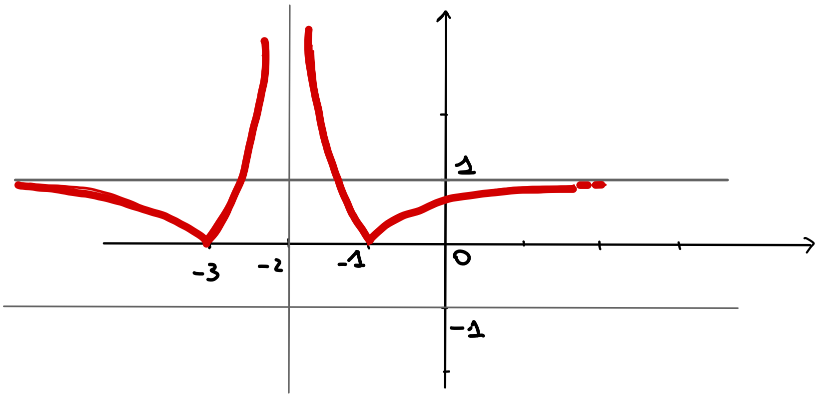
PASSO 2 :



PASSO 3:



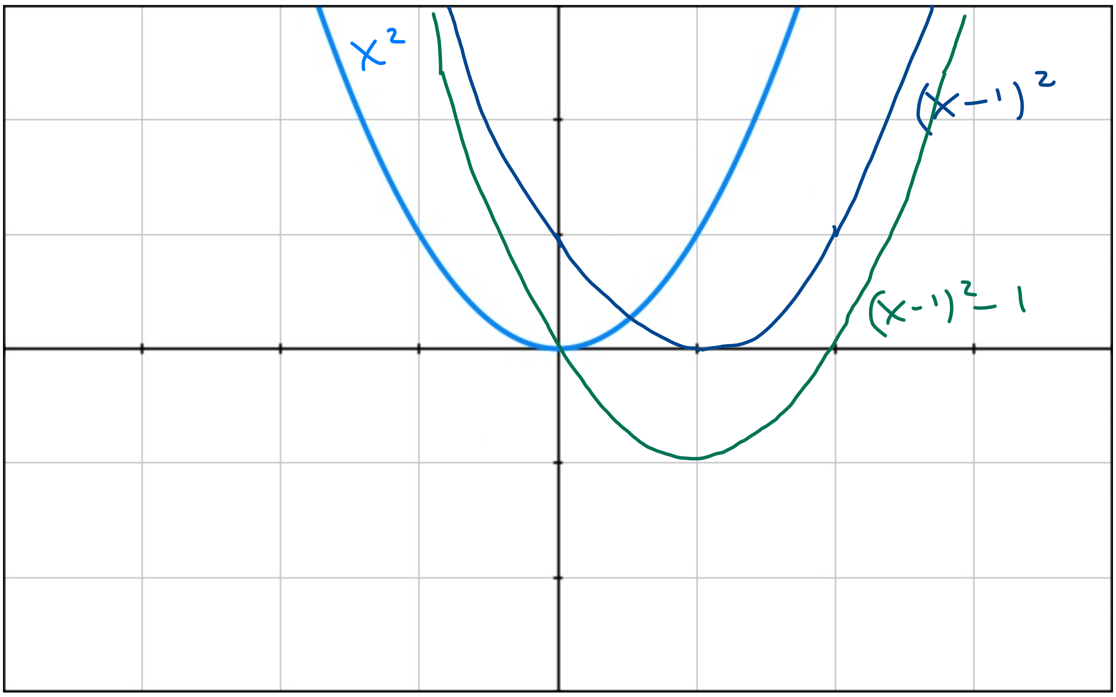
Soluzione:



controllo 1: insieme di definizione
controllo 2: funzione positiva.

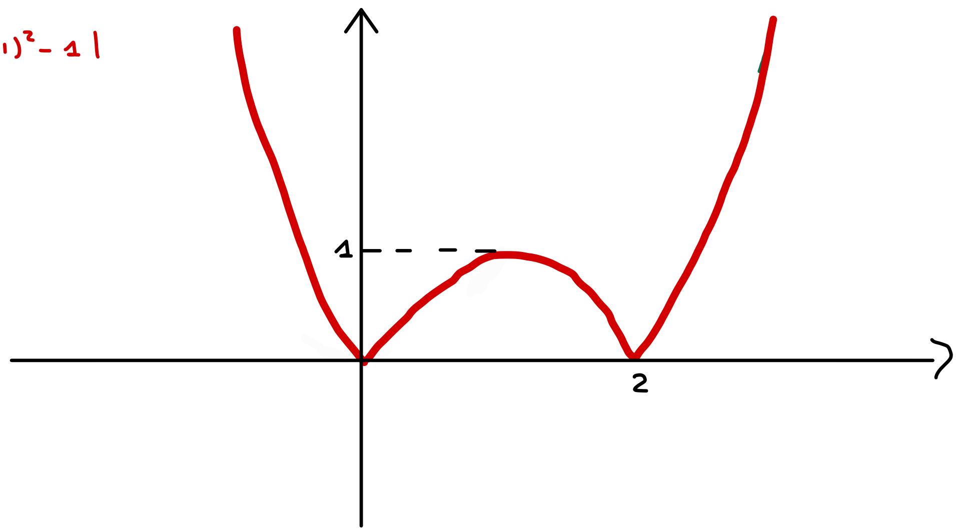
* Esercizio: Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell' equazione $|(x-1)^2-1| = a$

Soluzione: disegno il grafico della funzione data dalla formula $|(x-1)^2-1|$



disegno del grafico di:

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |(x-1)^2 - 1| \end{cases}$



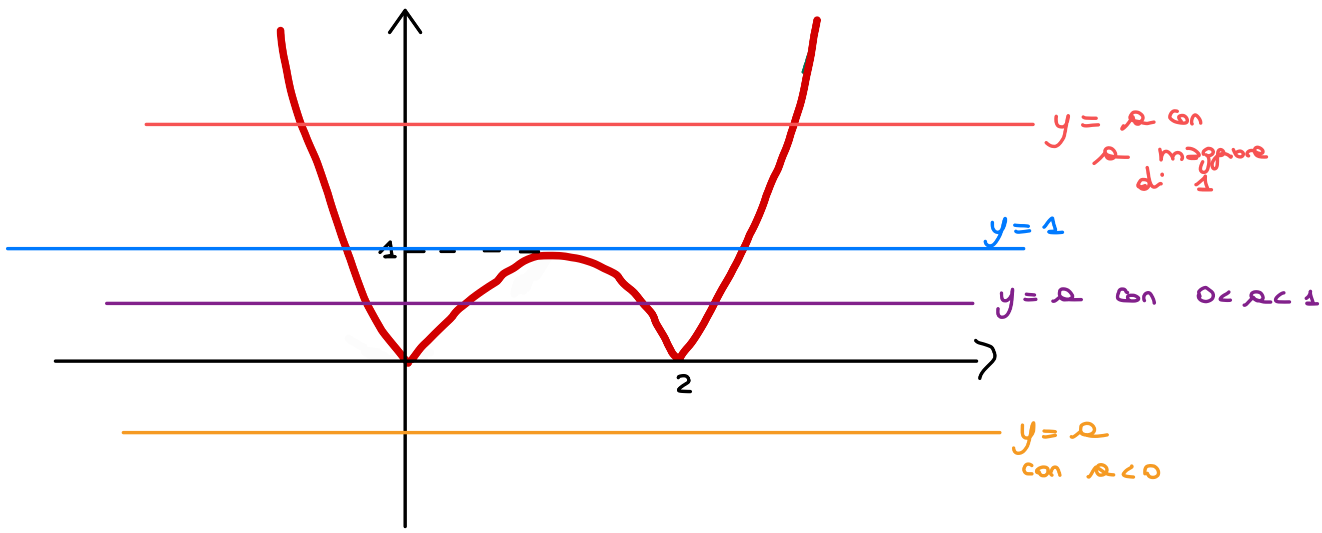
$y = a$ è una retta orizzontale.
Al variare di a dobbiamo contare quante sono le intersezioni di questa retta con il grafico di f.

Se a è negativo non c'è nessuna intersezione

se a è zero, ce ne sono 2

se a è compreso tra zero e 1 ce ne sono 4

se a è maggiore di 1 ce ne sono 2



soluzione: il numero di soluzioni è

0 se $a \in (-\infty, 0)$

2 se $a \in (1, +\infty) \cup \{0\}$

3 se $a = 1$

4 se $a \in (0, 1)$

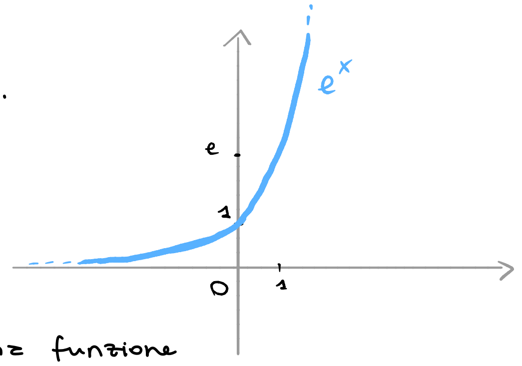
Lezione 8

Funzioni inverse - esempi

ESEMPIO 1: Logaritmi

Consideriamo la funzione esponenziale con base e.

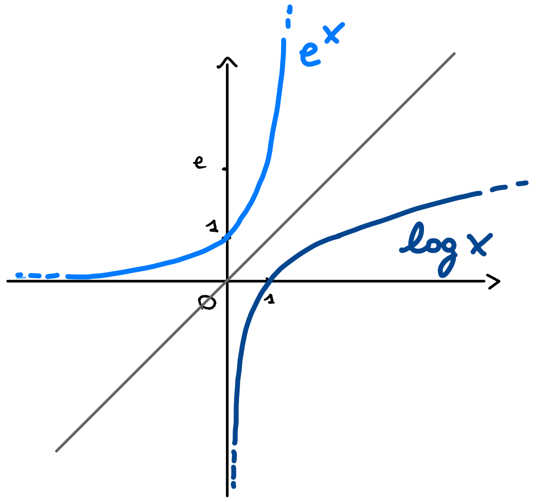
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$$



Questa funzione è iniettiva ma non suriettiva.
Si vede facilmente che l'immagine è $(0, +\infty)$.
Se consideriamo $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to (0, +\infty) \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ abbiamo una funzione che è sia iniettiva che suriettiva che quindi ammette inversa, che è

$$g : \begin{cases} (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \log y \end{cases}$$

Infatti: $\tilde{f}(g(y)) = \tilde{f}(\log y) = e^{\log y} = y$
e $g(\tilde{f}(x)) = g(e^x) = \log(e^x) = x$.



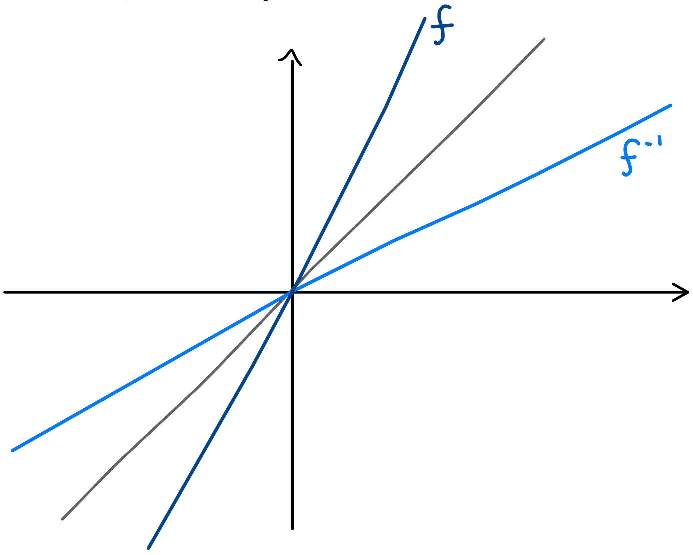
ESEMPIO 2: rette

Sia $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\quad f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{cases}$

f è biiettiva. Sappiamo allora che esiste l'inversa g.
Possiamo trovare la sua formula esplicitando la x in funzione della y nell'equazione $y = f(x) = ax + b$

$y = ax + b \iff ax = y - b \iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Quindi la formula dell'inversa è $x = g(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Il dominio di g è $\mathbb{R}$ e l'immagine di g è $\mathbb{R}$.



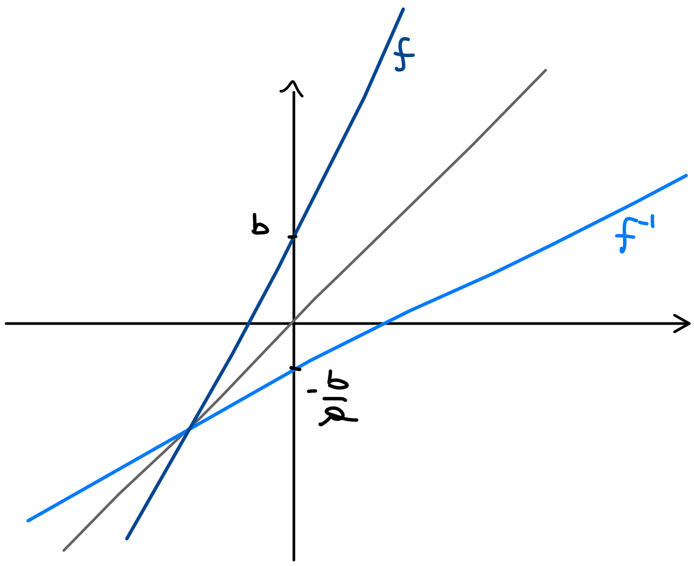


GRAFICO della funzione inversa.

Osservazione: preso un qualsiasi punto nel piano $P=(a,b)$, il punto $P'=(b,a)$, ottenuto scambiando le coordinate di P, è il simmetrico di P' rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

Siano $X, Y \subset \mathbb{R}$.
Ricordiamo che $g: Y \to X$ è l'inversa di $f: X \to Y$ se $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$g(f(x)) = x \qquad e \qquad f(g(y)) = y.$$

Abbiamo che, se g è l'inversa di f

$$\text{grafico di } f = \{ (x,y) \in X \times Y : y = f(x) \}$$
$$= \{ (y,x) \in Y \times X : x = g(y) \} = \text{grafico di } g.$$

Infatti gli elementi del grafico di f sono gli y che soddisfano l'equazione
$$y = f(x) \quad \text{con } x \in X \qquad (*)$$
mentre gli elementi del grafico di g sono gli x che soddisfano l'equazione
$$x = g(y) \quad \text{con } y \in Y \qquad (**)$$
ma $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti

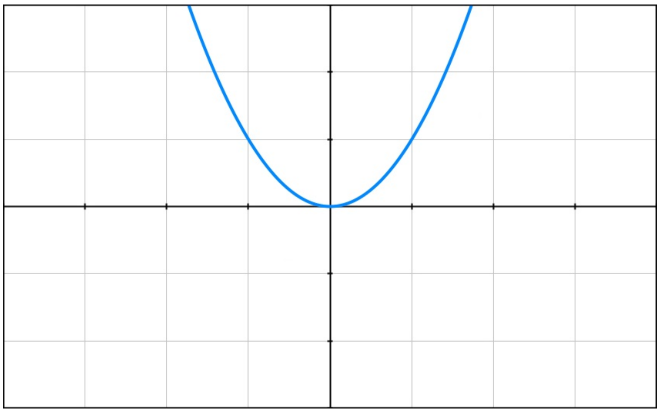
se $y = f(x)$ allora $g(y) = g(f(x))$ e poiché g è l'inversa di f $g(y) = x$,
se $x = g(y)$ allora $f(x) = f(g(y))$ e poiché g è l'inversa di f $f(x) = y$.

Quindi il grafico di f $(y = f(x))$ e della sua inversa $(x = g(y))$ coincidono.

Noi però non disegnamo il grafico di $x = g(y)$, bensì vorremmo disegnare il grafico di $y = g(x)$. Per farlo dobbiamo scambiare le coordinate di ogni punto. L'osservazione ci dice che stiamo facendo un'operazione di riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

ESEMPIO 3: radice quadrata.

Consideriamo la funzione potenza $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$



Questa funzione non è né iniettiva, né suriettiva, quindi non ammette inversa.
In particolare notiamo che qualsiasi $y>0$ è immagine di due x diversi:
esempio: $y=4$, $f(-2)=4$ e $f(2)=4$.

Abbiamo visto nel caso della funzione esponenziale come cavarcela quando non abbiamo la suriettività: al posto di considerare come codominio tutto $\mathbb{R}$, ci restringiamo all'immagine della funzione. Anche in questo caso si vede facilmente che l'immagine è $[0,+\infty)$.
Iniziamo dunque a considerare $\tilde{f}:\begin{cases} \mathbb{R} \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

Proviamo a esprimere x in funzione di y:

$$y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y}$$

Purtroppo la legge che ad ogni $y \in [0,+\infty)$ associa $\pm\sqrt{y}$ non è una funzione (dato un input ottengo due output!).
D'altra parte se scelgo arbitrariamente uno dei due output e considero le funzioni $h_1:\begin{cases} [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{cases}$ e $h_2:\begin{cases} [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto -\sqrt{y} \end{cases}$
nessuna delle due scelte soddisfa la proprietà di essere l'inversa di $\tilde{f}$.

$h_1(\tilde{f}(-2)) = h_1(4) = 2$
$h_2(\tilde{f}(2)) = h_2(4) = -2$

Per riuscire a scrivere l'inversa dobbiamo rende $\tilde{f}$ iniettiva.
Decidiamo di modificare il dominio restringendoci a $[0,+\infty)$.
Abbiamo quindi $\hat{f}:\begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

e la sua inversa è $g:\begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{cases}$

Esercizio: trovare l'inversa di $f:\begin{cases} (-\infty,0] \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

ESEMPIO 3 bis: radici m-esime con m pari
Come per $y=x^2$, non esiste l'inversa di $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^m \end{cases}$

Possiamo trovare l'inversa di $\hat{f}:\begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^m \end{cases}$, che è

$g:\begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ y \mapsto \sqrt[m]{y} \end{cases}$

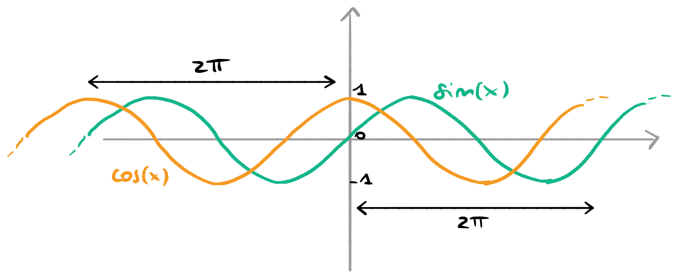
ESEMPIO 4: radici m-esime con m dispari

Come per $y=x^3$, l'inversa di $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^m \end{cases}$ con m dispari esiste ed è

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[m]{y} \end{cases}$$

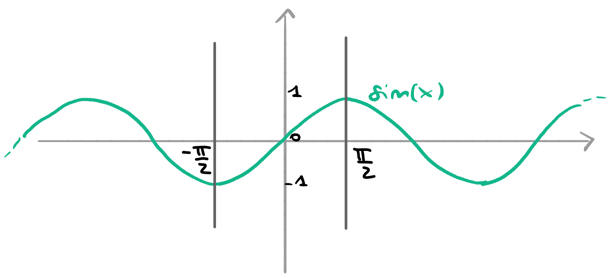
ESEMPIO 5: inverse delle funzioni trigonometriche

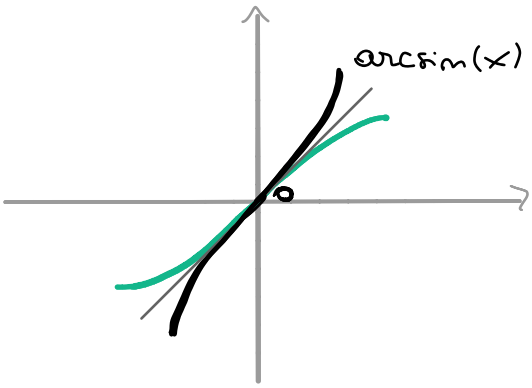
Le funzioni $s: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$ e $c: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ non sono biettive.



Per quanto riguarda il seno prendiamo la sua restrizione

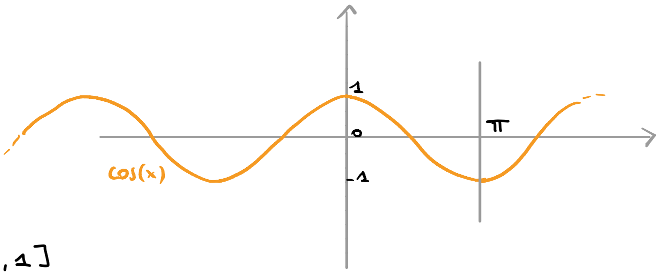
$$s^*: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$



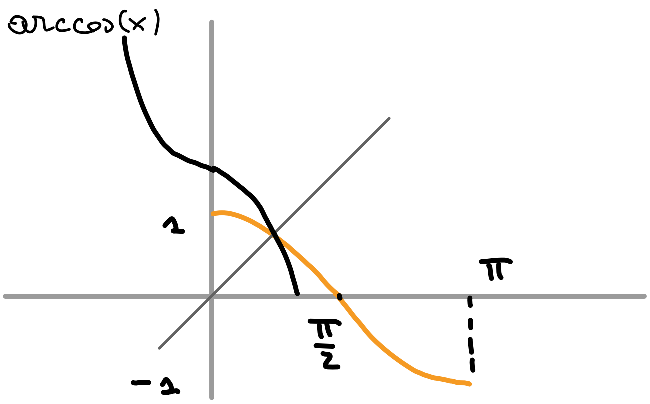


L'inversa $g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è detta arcoseno (arcsin)

$\arcsin(x)$ è l'unico angolo in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il cui seno vale x.



Analogamente, per quanto riguarda il coseno, prendiamo la restrizione $c^*: \begin{cases} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$

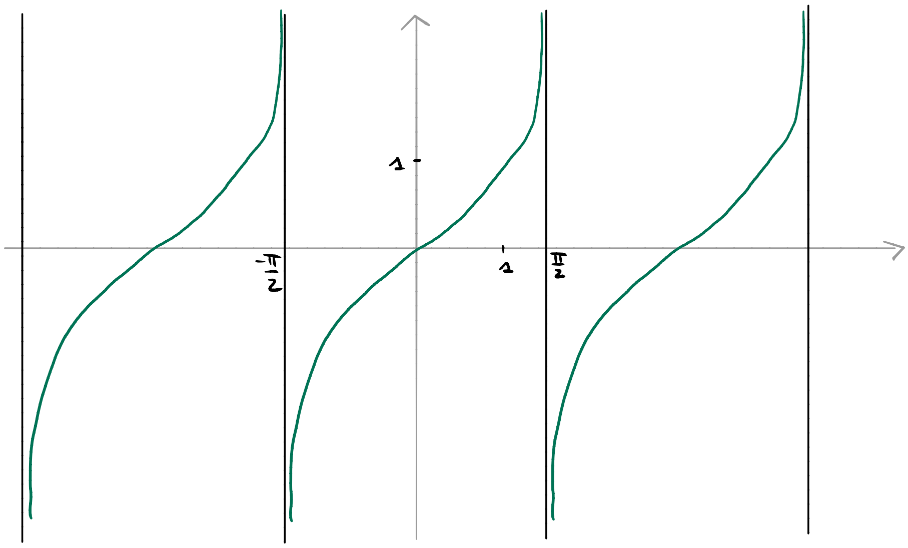


L'inversa $g: [-1,1] \to [0,\pi]$ è detta arcocoseno (arccos)

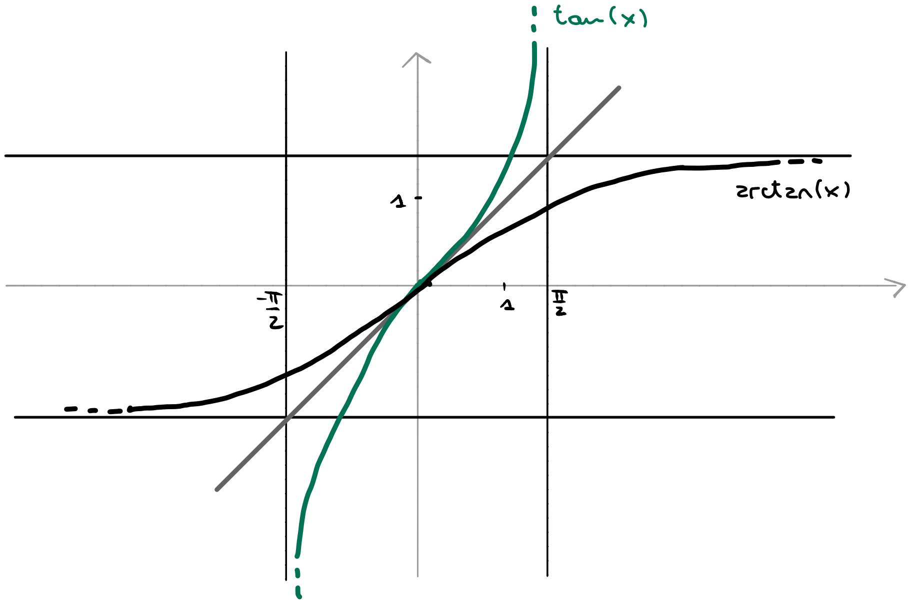
$\arccos(x)$ è l'unico angolo in $[0,\pi]$ il cui coseno vale x.

Infine per quanto riguarda la tangente, ci restringiamo a

$$t^*: \begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

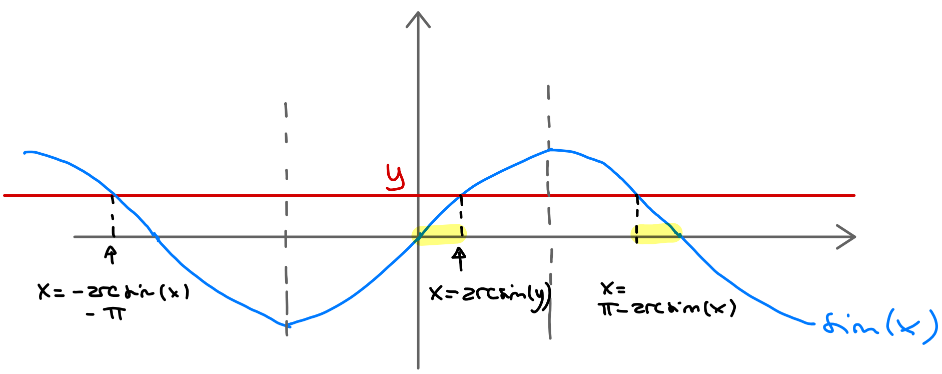


L'inversa di t^* è $\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ed è chiamata arcotangente.
$\arctan(x)$ è l'unico angolo in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la cui tangente vale x.



Attenzione: risoluzione di equazioni trigonometriche con le funzioni inverse.

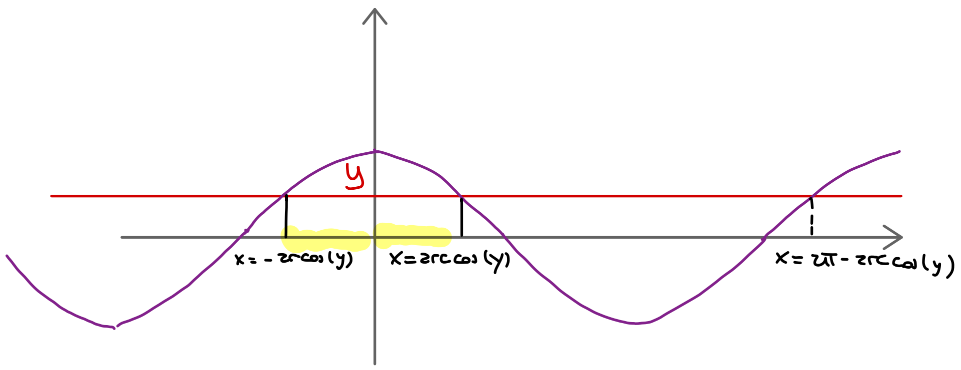
Sia $y \in [-1, 1]$. Consideriamo l'equazione $\sin(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è $x = \arcsin(y)$.
Però in $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni



Soluzioni:

$$x = \arcsin(y) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Sia $y \in [-1,1]$. Consideriamo l'equazione $\cos(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $[0,\pi]$ è $x = \arccos(y)$.
In $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni



Soluzioni: $x = \arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$x = -\arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

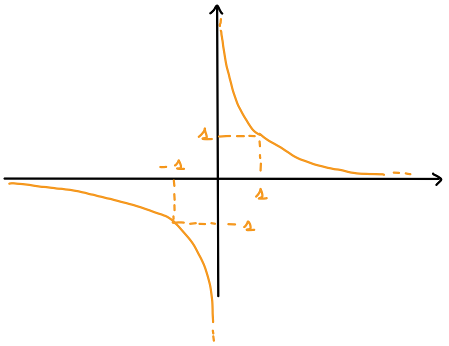
Esercizio: Disegnare il grafico, trovare dominio e immagine, limiti rilevanti e inversa di

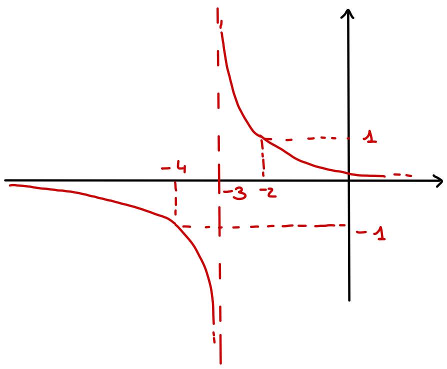
$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

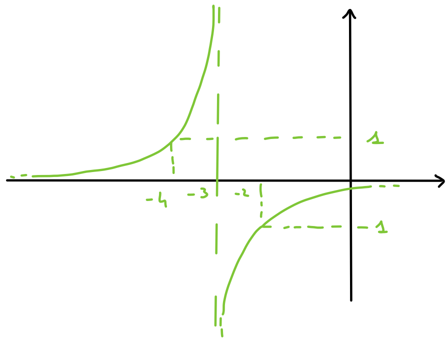
Svolgimento: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

Per disegnare il grafico scrivo $f(x)$ come $\frac{x-5\pm3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}$

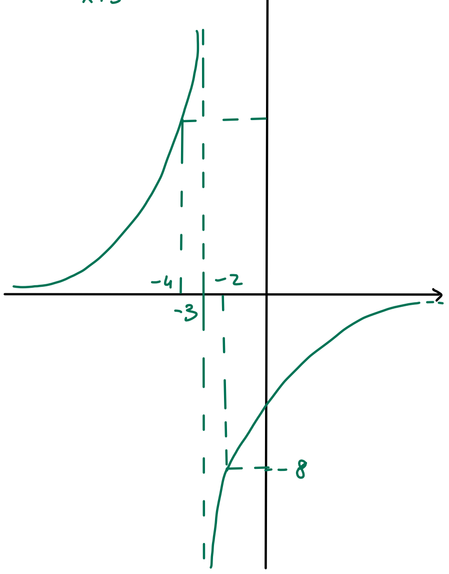
. disegno $f_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{x+3} = f_1(x+3)$ $\quad f_3(x) = -\frac{1}{x+3} = -f_2(x)$



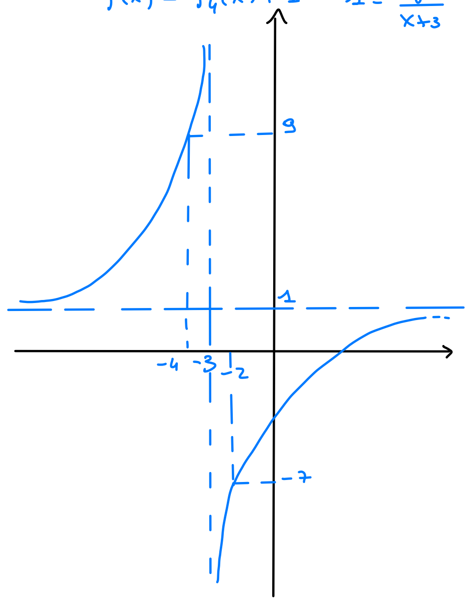




$f_4(x) = -\frac{8}{x+3} = 8f_3(x)$



$f(x) = f_4(x) + 1 = 1 - \frac{8}{x+3}$



$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -3} f(x)$ non esiste

Calcoliamo ora l'inversa di $f : \mathrm{Dom}(f) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$y = \frac{x-5}{x+3}$ con $x \neq -3$

$(x+3)y = x-5 \qquad xy - x = -3y - 5 \qquad x(y-1) = -3y-5 \qquad x = \frac{-3y-5}{y-1}$ con $y \neq 1$

L'inversa g è:

$$g : \begin{cases} (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) \\ y \longmapsto \frac{-3y-5}{y-1} \end{cases}$$

Esercizio: trovare l'inversa di $y=f(x)=e^{2x}+4e^{x}$

Svolgimento: $Im(f)=(0,+\infty)$. Cerchiamo l'inversa di $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to (0,+\infty)\\ x \mapsto e^{2x}+4e^{x}\end{cases}$

Chiamo $e^x=t$, quindi $e^{2x}+4e^x=t^2+4t$

$y=t^2+4t$

$t^2+4t-y=0$ $\qquad t=-2+\sqrt{4+y}$

$\qquad\qquad\qquad\quad t=-2-\sqrt{4+y}$

>0 infatti $\sqrt{4+y}>0$ quando $y>0$

Sostituisco t con e^x: $\qquad e^x=-2+\sqrt{4+y} \Rightarrow x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

>0 poiché $y>0$

$e^x=-2-\sqrt{4+y}$ $\qquad$ nessuna soluzione

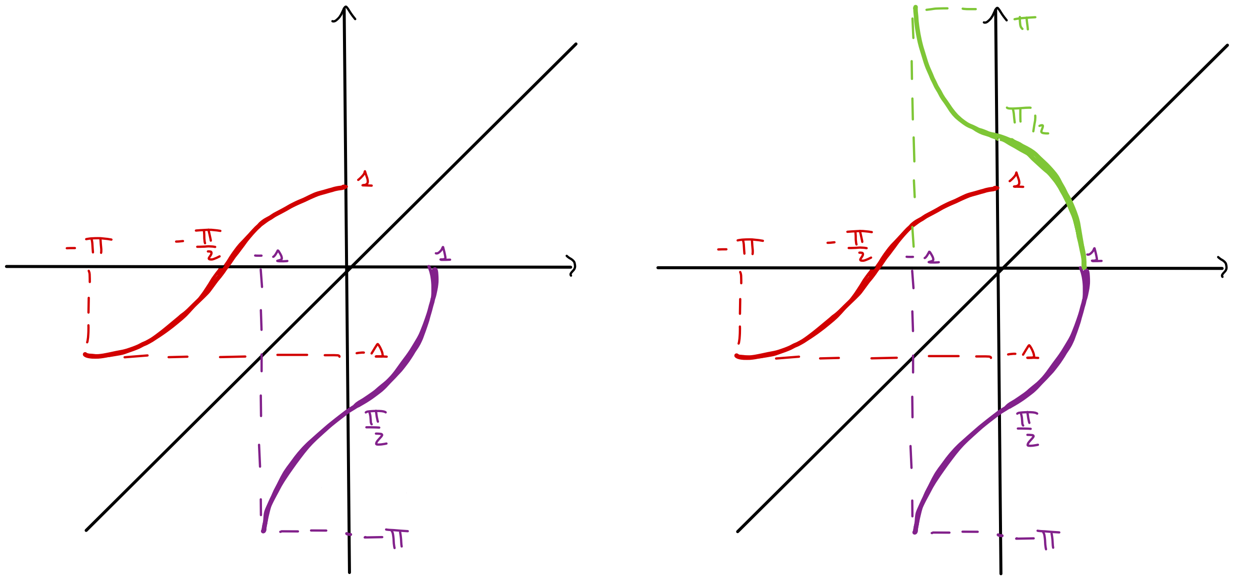
<0

quindi $x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

L'inversa è $g:\begin{cases}(0,+\infty) \to \mathbb{R}\\ y \mapsto \log(-2+\sqrt{4+y})\end{cases}$

Esercizio: Calcolare l'inversa di $f\begin{cases}[-\pi,0] \to [-1,1]\\ x \mapsto \cos(x)\end{cases}$

In rosso è rappresentato il grafico di f e in viola il grafico della sua inversa (una volta scambiati i ruoli di x e y). Chiamo g l'inversa di f



Se lo andiamo a confrontare con il grafico dell'arcocoseno vediamo che $g(y)=-\arccos(y)$.

Potevamo risolvere l'esercizio anche nel seguente modo:

$y=\cos(x)$ con $x\in[-\pi,0]$.

Chiamo $t=-x$, quindi $t\in[0,\pi]$ $\qquad$ stiamo usando la definizione di arcocoseno

$y=\cos(x)=\cos(-t)=\cos(t) \Rightarrow t=\arccos(y)$

poiché il coseno è una funzione pari $\qquad \Rightarrow -x=\arccos(y)$

e dunque $x=-\arccos(y)$ è l'inversa cercata.