CORSO: **Calcolo delle Variazioni A**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)**
CODICE ESAME: **096AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
DURATA: **42 ore**
ANNO ACCADEMICO: **2018-19**
PERIODO: **secondo semestre**

Introduzione. Lo scopo del corso è di dare una panoramica di alcuni dei risultati e problemi fondamentali della moderna teoria del calcolo delle variazioni, arrivando a trattare anche argomenti che sono stati oggetto di ricerca in tempi recenti. Le lezioni sull'ultimo argomento del corso (il problema isoperimetrico) sono state tenute da Aldo Pratelli.

Programma del corso [versione: 1 luglio 2019]. Sono riportati in corsivo gli argomenti solo accennati.

1. Richiamo dei concetti di base del calcolo delle variazioni: variazione prima di un funzionale ed equazione di Eulero-Lagrange. Condizioni al bordo di Dirichlet, di Neumann, e di Robin; esempi di problemi con ostacolo, di problemi vincolati e di problemi con discontinuità libera. Variazione interna e forma di Du Bois-Reymond dell'equazione di Eulero-Lagrange. Equazione delle geodetiche su una superficie data di dimensione qualunque in $\mathbb{R}^d$. Equazione delle superfici minime in $\mathbb{R}^d$ di dimensione e codimensione qualunque.
2. Il metodo diretto del calcolo delle variazioni: esistenza dei minimi per semicontinuità e compattezza. Disuguaglianze di Poincaré generalizzate e condizioni sufficienti per la coercività per funzionali definiti su spazi di Sobolev del primo ordine ($W^{1,p}$) con e senza condizioni al bordo. Teoremi di semicontinuità rispetto alla topologia debole degli spazi di Sobolev per funzionali integrali con integranda $f(x, u, \nabla u)$ convessa nella variabile ∇u (dimostrazione completa in un caso particolare, con cenno al caso generale). Necessità della convessità di f in ∇u per la semicontinuità debole quando u è una funzione scalare.
3. Misure di Young generate da successioni di mappe a valori in un dato spazio metrico compatto: definizione, esistenza e proprietà fondamentali. Seconda dimostrazione della semicontinuità debole dei funzionali con integranda $f(x, u, \nabla u)$ convessa in ∇u usando le misure di Young.
4. Teoremi di semicontinuità ed esistenza dei minimi per funzionali integrali con integranda $f(x, \nabla u)$, con u vettoriale. Quasiconvessità, policonvessità e convessità di rango uno; relazioni tra queste nozioni e con la semicontinuità debole su spazi di Sobolev (limitatamente al caso $W^{1,\infty}$ per funzionali con integranda $f(\nabla u)$). *Misure di Young generate da successioni di gradienti: teorema fondamentale e seconda dimostrazione della semicontinuità dei funzionali con integranda quasiconvessa.*
5. Rilassamento di un funzionale: definizione e motivazioni. Casi significativi: rilassamento di un funzionale non semicontinuo, rilassamento di un funzionale definito solo su un sottoinsieme di funzioni regolari. Esempio significativo: 2-capacità di un insieme K in $\mathbb{R}^d$ e rilassamento del funzionale di Dirichlet con u assegnata su K. Esempi di fenomeno di Lavrentiev in dimensione 1 e superiore. *Rilassamento di funzionali con integranda $f(x, \nabla u)$ con u scalare.*
6. Calcolo della variazione prima per funzionali definiti su spazi di Sobolev e derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Dimostrazione in alcuni casi modello che i minimi soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Lemma fondamentale per la regolarità di base delle soluzioni dell'equazione di E-L in alcuni casi modello: le funzioni in $W^{1,2}(\Omega)$ con laplaciano in L^2 che soddisfano opportune condizioni al bordo (di Dirichlet o di Neumann) appartengono a $W^{2,2}(\Omega)$ (estensione al caso $p \neq 2$ enunciata ma non dimostrata).
7. Gamma-convergenza: motivazioni, definizione, esempi elementari e proprietà generali. Esempio di Gamma-convergenza: teorema di Modica-Mortola sulla convergenza dei funzionali di Ginzburg-Landau scalari (o funzionali di Cahn-Hilliard-van der Waals). *Introduzione veloce (senza dimostrazioni) alla teoria delle funzioni BV e agli insiemi di perimetro finito, incluso il teorema di struttura di De Giorgi-Federer.* Dimostrazione del teorema di Modica-Mortola.
8. Riordinamento radiale di insiemi in $\mathbb{R}^d$ e riordinamento radiale (decrescente) di funzioni positive su $\mathbb{R}^d$. Identità e disuguaglianze fondamentali: il riordinamento di u conserva i funzionali con integranda $g(u)$ e decresce quelli con integranda $f(u, |\nabla u|)$ con f convessa nella seconda variabile; il riordinamento di u e v decresce i funzionali con integranda $h(u - v)$ con h convessa pari. *Applicazioni: costante ottimale nella disuguaglianza di Sobolev, ottimizzazione del primo autovalore del laplaciano (con condizioni di Dirichlet al bordo).*

9. Il problema isoperimetrico in $\mathbb{R}^d$: esistenza di un insieme isoperimetrico nella classe degli insiemi di perimetro finito, simmetrizzazione di Steiner, ogni insieme isoperimetrico è una palla (disuguaglianza isoperimetrica). Esistenza di cluster di perimetro minimo in $\mathbb{R}^d$.

Prerequisiti. Sono prerequisiti essenziali i contenuti fondamentali dei corsi di Analisi 3, Elementi di Calcolo delle Variazioni, Istituzioni di Analisi Matematica. In particolare serviranno la teoria standard degli spazi di Sobolev e le nozioni di base riguardanti la variazione prima di un funzionale, l'equazione di Eulero-Lagrange, la nozione di derivata debole (o distribuzionale), le topologie deboli per spazi di Banach, le funzioni armoniche, e la formula dell'area.

Testi di riferimento.

- F. Clarke: *Functional analysis, calculus of variations and optimal control.* Graduate Texts in Mathematics, 264. Springer-Verlag, London, 2013.
- B. Dacorogna: *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, London, 2004.
- B. Dacorogna: *Direct methods in the calculus of variations*, second edition. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer Science+Business Media, New York, 2008.
- Jürgen Jost, Xianqing Li-Jost: *Calculus of variations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 64. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- Filip Rindler: *Calculus of variations.* Universitext. Springer International Publishing, 2018.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario su un argomento concordato con il docente, seguito da un orale sugli argomenti fondamentali del corso. Lo studente può scegliere omettere di preparare l'argomento 9 oppure gli argomenti 7 e 8. Gli appelli verranno concordati individualmente con ogni studente.