1. Sia M una matrice $d \times d$ invertibile e sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}^d)$, e sia v la funzione su $\mathbb{R}^d$ definita da $v(x) := u(Mx)$.

   a) Dimostrare che $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ed scrivere $\|v\|_1$ in termini di $\|u\|_1$.

   b) Scrivere la trasformata di Fourier $\hat{v}$ in termini di $\hat{u}$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

3. Sia $u_0(x) := 16x_1^2 x_2^2$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ sul disco D di centro 0 e raggio 1 con la condizione al bordo $u = u_0$ su ∂D.

4. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ con bordo regolare e sia X il sottospazio di $L^2(\Omega)$ composto dalle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 con supporto compatto.

   a) Dimostrare che l'operatore $T : X \to L^2(\Omega)$ definito da $T : u \mapsto \Delta u$ è autoaggiunto.

   b) Cosa si può dire sulla segnatura di T?

   c) Cosa succede se invece X è il sottospazio delle funzioni che sono restrizioni di funzioni di classe C^2 definite su tutto $\mathbb{R}^d$?

5. a) Data $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione misurabile limitata, dimostrare che esiste uno (ed un solo) operatore lineare T da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé tale che $\widehat{Tu} = m\,\hat{u}$ per ogni $u \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

   b) Dire per quali m l'operatore T è autoaggiunto, e per quali è anche definito positivo.

6. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 tale che $u \in L^1_{\mathbb{C}}$ e $\dot{u} \in L^2_{\mathbb{C}}$.

   a) Dimostrare che $\widehat{\dot{u}} = iy\,\hat{u}$.

   b) Dimostrare che $\hat{u} \in L^1_{\mathbb{C}}$.

7. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, x) = 8\cos^2 x \,\sin x$.

   a) Trovare una soluzione di (P).

   b) Dimostrare che la soluzione di (P) è unica.

   c) Dimostrare che l'unicità viene meno se si rimuove la condizione al bordo $u(\cdot, \pi) = 0$.

8. a) Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega \neq \varnothing$, e per ogni $x \in \Omega$ sia $d(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega$.

   a) Dimostrare che esiste una costante C che dipende solo da d tale che per ogni u funzione armonica su Ω vale
   $$\big|\nabla u(x)\big| \leq \frac{C}{d(x)} \|u\|_\infty \quad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

   b) Dimostrare che ogni funzione armonica u su $\mathbb{R}^d$ tale che $u(x) = o(|x|)$ per $|x| \to \infty$ è costante.

   c) Trovare una stima per $\big|\nabla^k u(x)\big|$ analoga a quella nel punto a).

   d) Dimostrare che ogni funzione armonica u su $\mathbb{R}^d$ tale che $u(x) = o(|x|^k)$ per $|x| \to \infty$ è un polinomio con grado minore di k.

1. a) Usando il cambio di variabile $z = Mx$ (e quindi $x = M^{-1}z$, $dx = |\det M|^{-1}dx$) ottengo

$$\|v\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |u(Mx)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(z)|\, \frac{dz}{|\det M|} = \frac{\|u\|_1}{|\det M|} < +\infty\,.$$

b) Usando lo stesso cambio di variabile ottengo anche

$$\begin{aligned}\hat{v}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(Mx)\, e^{-i\langle x\,;\,y\rangle}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, e^{-i\left\langle M^{-1}x\,;\,y\right\rangle}\, \frac{dz}{|\det M|} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, e^{-i\left\langle x\,;\,(M^{-1})^T y)\right\rangle}\, \frac{dz}{|\det M|} = \frac{1}{|\det M|}\hat{u}\big((M^{-1})^T y\big)\,.\end{aligned}$$

2. Calcolo la trasformata di u riconducendomi a quella di della funzione $w(x) := \frac{1}{1+x^2}$, già calcolata a lezione. Osservo infatti che posso scrivere in u in termini di v usando l'operatore di traslazione τ_h dato da $\tau_h v(x) := v(x-h)$ e l'operatore di riscalamento σ_δ dato da $\sigma_\delta v(x) := \frac{1}{\delta} v(x/\delta)$, e per la precisione

$$u(x) = \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\big(\tau_{-1}\sigma_2 w\big)(x)\,.$$

Pertanto, ricordando che
- $\widehat{\tau_h v}(y) = e^{-ihy}\hat{v}(y)$,
- $\widehat{\sigma_\delta v}(y) = \hat{v}(\delta y)$,
- $\hat{w}(y) = \pi e^{-|y|}$,

ottengo

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{2}\widehat{\tau_{-1}(\sigma_2 w)}(y) = \frac{1}{2}e^{iy}\,\widehat{\sigma_2 w}(y) = \frac{1}{2}e^{iy}\,\hat{v}(2y) = \frac{\pi}{2}e^{iy}e^{-|2y|} = \frac{\pi}{2}e^{-2|y|+iy}\,.$$

3. Come visto a lezione, conviene identificare il piano $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$. Osservo ora che per ogni punto $x = e^{it}$ del bordo di D vale che

$$\begin{aligned}u_0(x) = 16\cos^2 t\sin^2 t &= 16\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 \\ &= -\big(e^{it}+e^{-it}\big)^2\big(e^{it}-e^{-it}\big)^2 \\ &= -\big(e^{2it}-e^{-2it}\big)^2 = 2-(e^{it})^4-(e^{-it})^4\,,\end{aligned}$$

e quindi l'estensione armonica di u_0 all'interno di D è

$$u(x) = 2 - x^4 - \bar{x}^4 = 2\big(1-\mathrm{Re}(x^4)\big) = 2\big(1+6x_1^2x_2^2-x_1^4-x_2^4\big)\,.$$

4. a) Devo far vedere che per ogni $u, v \in X$ vale $\langle Tu\,;\,v\rangle = \langle u\,;\,Tv\rangle$. Estendo u e v a tutto $\mathbb{R}^d$ ponendole uguali a 0 fuori da Ω. Usando l'identità

$$\mathrm{div}(v\,\nabla u) = v\ \mathrm{div}(\nabla u) + \nabla v\cdot\nabla u = v\,\Delta u + \nabla v\cdot\nabla u$$

ottengo

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_\Omega v\,\Delta u\,dx = \int_\Omega \mathrm{div}(v\,\nabla u) - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx\,,$$

ed applicando il teorema della divergenza ottengo

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{\partial\Omega} (v\,\nabla u)\cdot\eta\,d\sigma(x) - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx\,, \tag{1}$$

dove η è la normale esterna a $\partial\Omega$, e l'integrale su $\partial\Omega$ vale zero perché $v = 0$ su $\partial\Omega$. Applicando la formula (1) sia a $\langle Tu\,;\,v\rangle$ che a $\langle Tv\,;\,u\rangle$ ottengo infine

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx = \langle Tv\,;\,u\rangle = \langle u\,;\,Tv\rangle\,.$$

b) Usando di nuovo la formula (1) ottengo che per ogni $u \in X$ vale

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,,$$

e questo dimostra che T è semidefinito negativo. Inoltre se $\langle Tu\,;\,u\rangle = 0$ allora $\nabla u = 0$ quasi ovunque, e quindi ovunque (perché $|\nabla u|$ è una funzione continua). Quindi la funzione u è costante su ogni componente connessa di Ω, ma siccome è anche nulla in un intorno del bordo di ogni componente connessa, deve essere identicamente nulla. Ho quindi dimostrato che T è definito negativo.

c) In questo caso la dimostrazione fatta al punto a) non funziona perché l'integrale su $\partial\Omega$ nella formula (1) in generale non vale zero, e dunque mi aspetto T non sia autoaggiunto. Per dimostrarlo prendo per esempio $u(x) := x_1^2$ e $v(x) := 1$ e verifico che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle = \int_\Omega v\,\Delta u - u\,\Delta v\,dx = \int_\Omega (2\cdot 1 - x_1^2\cdot 0)\,dx = 2|\Omega| \neq 0\,.$$

Si vede anche che T non è né semidefinito positivo né semidefinito negativo. Il punto a) basta ad escludere la prima possibilità, per escludere la seconda basta osservare che per $u(x) := x_1^2$ si ha

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_\Omega u\,\Delta u\,dx = \int_\Omega 2x_1^2\,dx > 0\,.$$

5. a) È facile verificare per ogni $v \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ il prodotto mv è una funzione in $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e dunque la mappa $U : v \mapsto mv$ è un operatore lineare da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé. Inoltre U è continuo perché

$$\|Uv\|_2 \leq \|m\|_\infty \|v\|_2\,.$$

Detta $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier, intesa come operatore da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé, ho che $T := \mathscr{F}^{-1}U\mathscr{F}$ è un operatore continuo da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé che soddisfa $\widehat{Tu} = m\,\hat{u}$ per ogni u. (L'unicità di Tu segue dal fatto che la trasformata di Fourier di è invertibile su L^2.)

b) *Per quali m l'operatore T è autoaggiunto?* Grazie all'identità di Plancherel ho che per ogni $u, v \in L^2$ vale

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle &= \frac{1}{2\pi}\left[\langle \widehat{Tu}\,;\,\hat{v}\rangle - \langle \hat{u}\,;\,\widehat{Tv}\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (m - \overline{m})\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Questa identità mostra chiaramente che T è autoaggiunto se m ha valori reali q.o.

Faccio ora vedere che vale anche il viceversa, cioè che se T è autoaggiunto allora m ha valori reali q.o. Partendo dalla (2) ottengo che per ogni $u, v \in L^2$ vale

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy = \langle (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,;\,\hat{v}\rangle\,,$$

e siccome la trasformata di Fourier è surgettiva su L^2, questo significa che $(\operatorname{Im} m)\,\hat{u} = 0$ q.o. per ogni $u \in L^2$, ed in particolare per una u tale che $\hat{u} \neq 0$ q.o. (per esempio $u(x) = e^{-|x|}$), da cui segue che $\operatorname{Im} m = 0$ q.o.

Per quali m l'operatore T è definito positivo? Suppongo adesso che T sia autoaggiunto, cioè che m abbia valori reali q.o. Sempre usando l'identità di Plancherel ottengo

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{Tu}\,;\,\hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} m|\hat{u}|^2\,dy\,, \tag{3}$$

da cui segue che T è definito positivo se $m > 0$ q.o.

Faccio ora vedere che vale anche il viceversa, cioè che se T è definito positivo allora l'insieme E dei punti dove $m \leq 0$ ha misura nulla. Supponendo per assurdo che così non sia trovo un sottoinsieme $F \subset E$ con $0 < |F| < \infty$, e siccome l'indicatrice 1_F appartiene a L^2, trovo anche $u \in L^2$ tale che $\hat{u} = 1_F$. Quindi la formula (3) dà

$$0 = \langle Tu\,;\,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} m\,(1_F)^2\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_F \operatorname{Im} m\,dy \leq 0$$

e questo contraddice il fatto che T sia definito positivo.

6. a) So già che la formula $\widehat{\dot{u}} = iy\,\hat{u}$ vale se invece di $\dot{u} \in L^2$ avessi $\dot{u} \in L^1$. Suppongo dunque di avere una successione di funzioni u_n in $C^1(\mathbb{R})$ tali che
   (a) $u_n \in L^1$ e $\dot{u}_n \in L^2 \cap L^1$ per ogni n;

(b) $u_n \to u$ in L^1 e $\dot u_n \to \dot u$ in L^2.
Allora
(c) $\widehat{\dot u_n} = iy\,\hat u_n$ per ogni n per via di (a);
(d) $\widehat{u_n} \to \hat u$ uniformemente per via di (b);
(e) $\widehat{\dot u_n} \to \widehat{\dot u}$ in L^2 per via di (b), e quindi esiste una sottosuccessione tale che $\widehat{\dot u_{n_k}} \to \widehat{\dot u}$ q.o.
Passando al limite nella (c) e usando (d) ed (e) ottengo che $\widehat{\dot u} = iy\,\hat u$ q.o. (non posso dire di più, visto che so solo che $\widehat{\dot u}$ sta in L^2).
Per completare la dimostrazione devo trovare una successione di funzioni u_n che soddisfano (a) e (b). Si verifica facilmente che presa una funzione $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^1 tale che $\sigma(x) = 1$ per $x \le 0$ e $\sigma(x) = 0$ per $x \ge 1$ allora le funzioni $u_n(x) := u(x)\cdot\sigma(x-n)$ soddisfano (a) e (b).
b) Siccome $\hat u$ è una funzione continua e limitata, mi basta dimostrare che $\hat u$ appartiene a $L^1(E)$ con $E := \mathbb{R}\setminus[-1,1]$. In effetti

$$\|\hat u\|_{L^1(E)} = \int_E |\hat u|\,dy = \int_E |y\hat u|\,|1/y|\,dy \le \|y\hat u\|_{L^2(E)}\|1/y\|_{L^2(E)} < +\infty\,.$$

Nel terzo passaggio ho usato la disuguaglianza di Hölder, nel quarto ho usato che $y\hat u$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ (per via del punto (a)) e che $1/y$ appartiene a $L^2(E)$, cosa che si verifica con un semplice calcolo.

7. Date le condizioni al bordo, conviene risolvere il problema (P) scrivendo la soluzione u come combinazione lineare delle funzioni $\sin(nx)$ con coefficienti che dipendono da t, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\sin(nx) \quad \text{con} \quad b_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\,\sin(nx)\,dx\,. \tag{4}$$

Derivando in t e in x ottengo, almeno a livello formale,

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot b_n(t)\,\sin(nx)\ , \quad u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\dot b_n(t)\,\sin(nx)\,, \tag{5}$$

e dunque l'equazione $u_t = u_{xx}$ si riscrive come uguaglianza dei coefficienti delle due derivate parziali, ovvero $\dot b_n(t) = -n^2 b_n(t)$.
Scrivendo inoltre il dato $u_0(x) := 8\cos^2 x\,\sin x$ come combinazione lineare di $\sin(nx)$, cioè

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 4\cos x\,\sin(2x) \\ &= 4\Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)\Big(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\Big) \\ &= 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}+e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} = 2\sin x + 2\sin(3x)\,, \end{aligned}$$

ottengo che la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0$ si riscrive come $b_n(0) = 2$ per $n = 1,3$ e $b_n(0) = 0$ altrimenti. Pertanto $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\dot y = -n^2 y\ , \quad y(0) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1,3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6}$$

da cui segue che

$$b_n(t) = \begin{cases} 2e^{-n^2 t} & \text{se } n = 1,3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La soluzione di (P) dovrebbe dunque essere

$$u(t,x) = 2e^{-t}\sin x + 2e^{-9t}\sin(3x)\,. \tag{7}$$

a) Non essendoci sono problemi di convergenza, verificare che la funzione u data in (7) è effettivamente una soluzione di (P) definita per $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0,\pi]$ è immediato: ogni addendo risolve l'equazione di partenza con le giuste condizioni al bordo, e quindi lo stesso vale per u (per linearità dell'equazione e delle condizioni al bordo), e chiaramente la condizione iniziale è soddisfatta.

b) Supponiamo di avere una soluzione u di (P) definita su $I \times [0, \pi]$ dove I è un intervallo di tempi che contiene 0 (all'interno o come estremo), e per la precisione supponiamo che u sia continua sull'insieme di definizione, C^1 nella variabile t e C^2 nella variabile x su $(I \setminus \{0\}) \times [0, \pi]$. Per far vedere che tale soluzione è unica (e dunque coincide con la funzione in (7)) la scrivo in serie come in (4) e mostro che i coefficienti $b_n(t)$ sono funzioni continue su I e derivabili per $t \neq 0$ che risolvono il problema di Cauchy (6), e sono pertanto univocamente determinati per tutti i tempi t.
Per la precisione osservo che, per via della formula in (4) che la definisce, la funzione b_n è continua su I, e per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale è derivabile in $I \setminus \{0\}$ e $\dot b_n(t)$ è il coefficiente n-esimo di $u_t(t, \cdot)$. Inoltre integrando due volte per parti l'integrale che definisce b_n ottengo che $-n^2 b_n(t)$ è il coefficiente n-esimo di $u_{xx}(t, \cdot)$ (in questo passaggio è essenziale che $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$).
Siccome u_t e u_{xx} sono uguali, anche i loro coefficienti devono essere uguali, il che significa che b_n soddisfa l'equazione in (6) per $t \neq 0$. Che valga la condizione iniziale in (6) è ovvio.

c) È chiaro il ruolo di entrambe le condizioni al bordo nella dimostrazione dell'unicità: servono a garantire che i coefficienti di u_{xx} sono quelli che ci si aspetta. Per mostrare la mancanza di unicità scelgo una funzione g non identicamente nulla, e cerco una soluzione v del problema (P') dato dall'equazione $v_t = v_{xx}$, le condizioni al bordo $v(\cdot, 0) = 0$ e $v(\cdot, \pi) = g$, e la condizione iniziale $v(0, \cdot) = 0$. Se u è la soluzione di (P), allora la funzione $\tilde u = u + v$ risolve l'equazione $u_t = u_{xx}$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = 0$ e $u(\cdot, \pi) = g$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, ma differisce da u perché non soddisfa le stesse condizioni al bordo.
In mancanza di teoremi di esistenza generali, la difficoltà è trovare una funzione g per cui si riesce a risolvere (P'). Una possibilità è prendere $g(t) := \pi t$. Per risolvere (P') uso il cambio di variabile

$$v(t, x) = w(t, x) + \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x) + tx$$

ed ottengo che la nuova incognita w deve risolvere il problema (P'') dato dall'equazione $w_t = w_{xx}$, le condizioni al bordo $w(\cdot, 0) = w(\cdot, \pi) = 0$, e la condizione iniziale $w(0, \cdot) = w_0$ con $w_0 := \frac{1}{6}(\pi^2 x - x^3)$.
Trovo una soluzione di (P'') come ho fatto per (P): usando il fatto che i coefficienti di w_0 per la serie in $\sin(nx)$ sono $b_n^0 := \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1}$ ottengo che i coefficienti $b_n(t)$ della soluzione $w(t, \cdot)$ sono $b_n(t) = \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1} e^{-n^2 t}$. Dunque w dovrebbe essere

$$w(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1} e^{-n^2 t} \sin(nx)\,.$$

È facile vedere che questa serie definisce una funzione continua su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ e di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times [0, \pi]$ che risolve (P'').

8. Prendo $x \in \Omega$ e $r = d(x)/2$, e osservo che la chiusura della palla $B(x, r)$ di centro x e raggio r è contenuta in Ω. Inoltre ogni derivata parziale $D_i u$ è pure una funzione armonica e quindi, usando la proprietà della media,

$$D_i u(x) = \fint_{B(x,r)} D_i u(y)\, dy = \fint_{B(0,r)} D_i u(x + h)\, dh = \frac{1}{a_d r^d} \int_{B(0,r)} \operatorname{div} v(h)\, dh$$

dove v è il campo di vettori $v(h) := u(x + h)\, e_i$, la divergenza è calcolata rispetto alla variabile h, e a_d è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$. Applicando quindi il teorema della divergenza ottengo

$$D_i u(x) = \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} v(h) \cdot \eta(h)\, d\sigma(h) = \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} u(x + h)\, e_1 \cdot \eta(h)\, d\sigma(h)\,,$$

dove $\eta(h)$ è la normale esterna a $\partial B(0, r)$ nel punto h. Usando questa formula ottengo la stima

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| &\le \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} |u(x + h)|\, |e_1 \cdot \eta(h)|\, d\sigma(h) \\ &\le \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} \|u\|_\infty\, d\sigma(h) = \frac{\operatorname{vol}_{d-1}(\partial B(0, r))}{a_d r^d} \|u\|_\infty = \frac{2d}{d(x)} \|u\|_\infty\,. \end{aligned}$$

(Nel penultimo passaggio ho usato la stima $|e_1 \cdot \eta| \leq |e_1|\,|\eta| = 1$, nell'ultimo il fatto che il volume $(d-1)$-dimensionale della sfera di raggio r in $\mathbb{R}^d$ è $d\alpha_d r^{d-1}$ e che $r = d(x)/2$.)
Usando la stima precedente ottengo infine

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{2d^{3/2}}{d(x)} \|u\|_\infty .$$

b) Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, applico la stima trovata al punto a) con $\Omega := B(x,r)$ ed ottengo

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{r} \sup_{y \in B(x,r)} |u(y)| = \frac{C}{r} o(r) .$$

Prendendo il limite per $r \to +\infty$ ottengo $\nabla u(x) = 0$, e siccome questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ne deduco che u è costante.

c) Dimostro che per ogni k esiste una costante C_k dipendente da k e da d tale che

$$|\nabla^k u(x)| \leq \frac{C_k}{(d(x))^k} \|u\|_\infty . \tag{8}$$

Dimostro questa stima per induzione su k. So infatti che vale per $k = 1$, e supponendola vera per un certo k la dimostro per $k+1$. Dato $x \in \Omega$, indico con Ω' l'insieme dei punti $y \in \Omega$ tali che $d(y) > d(x)/2$, e e pongo $v := \nabla u$. Si verifica immediatamente che anche v è una funzione armonica, e quindi, detta $d'(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega'$, ho che

$$\begin{aligned} |\nabla^{k+1} u(x)| = |\nabla^k v(x)| &\leq \frac{C_k}{(d'(x))^k} \sup_{y \in \Omega'} |v(y)| \\ &\leq \frac{C_k}{(d'(x))^k} \sup_{y \in \Omega'} \left(\frac{C_1}{d(y)} \|u\|_\infty \right) \leq \frac{2^{k+1} C_k C_1}{(d(x))^{k+1}} \|u\|_\infty . \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi induttiva, applicando la stima (8) alla funzione v e all'aperto Ω'; nel terzo ho applicato la stima (8) con $k = 1$ alla funzione u e all'aperto Ω, nel quarto ho usato il fatto che per la definizione di Ω' si ha $d(y) \geq d(x)/2$ per ogni $y \in \Omega'$, e $d'(x) \geq d(x)/2$.)

d) Procedo come al punto b) usando la stima (8):

$$|\nabla^k u(x)| \leq \frac{C}{r^k} \sup_{y \in B(x,r)} |u(y)| = \frac{C}{r^k} o(r^k) .$$

Prendendo il limite per $r \to +\infty$ ottengo quindi $\nabla^k u(x) = 0$, e siccome questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ne deduco che u è un polinomio di grado minore stretto di k.

COMMENTI

- Esercizio 2. Nella notazione della soluzione data sopra, vale anche l'identità $u = \sigma_2 \tau_{-1/2} v$, che pure permette di calcolare la trasformata $\hat{u}$.
  Tuttavia alcuni dei presenti hanno fatto un po' di confusione, scrivendo che $u = \sigma_2 \tau_{-1} v$, cosa che porta ad una formula sbagliata per $\hat{u}$.

- Esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno scritto che $\hat{v}(y) = e^{-|y|}$, dimenticando un fattore π...

- Esercizio 2. In alternativa a quanto scritto sopra, è possibile calcolare $\hat{u}(y)$ usando direttamente il metodo dei residui. Per la precisione, fissato $y \in \mathbb{R}$, considero la funzione meromorfa (su $\mathbb{C}$)

  $$f(z) := \frac{e^{-iyz}}{z^2 + 2z + 5} .$$

  ed osservo che

  $$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz \tag{9}$$

  dove il cammino $\gamma_{1,r}(t) := (t, 0)$ con $t \in [-r, r]$ parametrizza del segmento (orientato) in $\mathbb{C}$ di estremi $-r$ e r.

Primo caso: $y \leq 0$. Considero il cammino $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, che parametrizza la semicirconferenza di centro 0 e raggio r nel semipiano superiore ($\operatorname{Im} z \geq 0$), e osservo che

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 0 \tag{10}$$

Infatti per ogni z nel semipiano superiore vale

$$|f(z)| = \frac{e^{y \operatorname{Im} z}}{|z^2 + 2z + 5|} \leq \frac{1}{|z^2 + 2z + 5|} = O(1/|z^2|) \quad \text{per } |z| \to \infty,$$

(in questo punto è essenziale che $y \leq 0$) e quindi, indicando con $L(\gamma_{2,r})$ la lunghezza di $\gamma_{2,r}$,

$$\left| \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz \right| \leq \sup_t \left| f(\gamma_{2,r}(t)) \right| \cdot L(\gamma_{2,r}) = O(1/r^2) \cdot \pi r = O(1/r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0\,.$$

Inoltre i cammini $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ formano un cammino chiuso orientato in senso *antiorario* che per $r > \sqrt{5}$ racchiude l'unico polo della funzione $f(z)$ nel semipiano superiore, vale a dire $z_1 = -1 + 2i$, e quindi

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)\,. \tag{11}$$

Mettendo insieme le formule (9), (10) e (11) ottengo che, per $y \leq 0$,

$$\hat{u}(y) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = 2\pi i \left. \frac{e^{-iyz}}{2z + 2} \right|_{z=z_1} = \frac{\pi}{2} e^{(2+i)y}\,. \tag{12}$$

Secondo caso: $y > 0$. Procedo in modo analogo al primo caso, definendo $\gamma_{2,r}(t) := re^{-it}$ con $t \in [0, \pi]$, cammino cha parametrizza la semicirconferenza di centro 0 e raggio r nel semipiano inferiore ($\operatorname{Im} z \leq 0$). In tal caso la (10) continua a valere, mentre la (11) va modificata tenendo conto che $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ formano un cammino chiuso orientato in senso *orario* che per $r > \sqrt{5}$ racchiude l'unico polo della funzione $f(z)$ nel semipiano inferiore, vale a dire $z_2 = -1 - 2i$. Pertanto

$$\hat{u}(y) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = -2\pi i \left. \frac{e^{-iyz}}{2z + 2} \right|_{z=z_2} = \frac{\pi}{2} e^{(-2+i)y}\,. \tag{13}$$

Mettendo insieme la (12) e la (13) ottengo infine

$$\hat{u}(y) = \frac{\pi}{2} e^{-2|y|+iy} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

- Esercizio 3. Alcuni dei presenti si sono limitati ad esibire la soluzione del problema senza spiegare come l'hanno ottenuta. Ma non era questo il punto dell'esercizio...

- Esercizio 4a). Nel teorema della divergenza appare l'integrale sul bordo di Ω della componente normale (esterna) del campo di vettori. Alcuni hanno indicato questa componente normale con un apposito simbolo, invece di scrivere il prodotto scalare del campo con la normale esterna. Altri hanno semplicemente scritto il campo al posto della componente normale...

- Esercizio 4a). Osservazione di linguaggio: molti dei presenti hanno usato una forma del teorema della divergenza che non è quella solita, pur chiamandolo semplicemente teorema della divergenza. Qualcuno l'ha anche chiamato teorema di Gauss-Green, che però è inappropriato (il teorema di Gauss-Green riguarda l'integrale di una 1-forma su bordo di un aperto del piano, non il flusso di un campo di vettori).

- Esercizio 4b). Diversi dei presenti hanno scritto che una funzione di classe C^1 sull'aperto Ω che ha gradiente nullo allora è costante, ma questo è vero solo se Ω è connesso.

- Esercizio 5b). Per far vedere che se T è autoaggiunto allora m ha valori reali q.o., si può anche far vedere che gli insiemi E^+ ed E^- dei punti dove $\operatorname{Im} m > 0$ e $\operatorname{Im} m < 0$, rispettivamente, hanno misura nulla. Supponendo infatti per assurdo che $|E^+| > 0$ trovo un sottoinsieme $F \subset E^+$ con

$0 < |F| < \infty$, e siccome la funzione indicatrice 1_F appartiene a L^2 trovo anche $u \in L^2$ tale che $\hat{u} = 1_F$. Quindi la formula (2) dà

$$0 = \langle Tu\,;\,u\rangle - \langle u\,;\,Tu\rangle = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,(1_F)^2\,dy = \frac{i}{\pi}\int_F \operatorname{Im} m\,dy$$

ma l'integrale non è zero perché $\operatorname{Im} m > 0$ su F ed F ha misura positiva. (Allo stesso modo si dimostra che $|E^-| = 0$.)

- Esercizio 5b). Diversi dei presenti hanno scritto che la trasformata di Fourier è un'isometria su L^2, mentre invece è un isometria a meno di un fattore $\sqrt{2\pi}$.
  Alcuni hanno sbagliato a scrivere il prodotto nello spazio di Hilbert *complesso* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e hanno concluso che T è sempre autoaggiunto (o peggio).
  Altri hanno cercato di dimostrare che T è autoaggiunto partendo dall'identità
  $$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int Tu\,\bar{v}\,dx = \int \mathscr{F}^{-1}(m\hat{u})\,\bar{v}\,dx$$
  scrivendo poi $\mathscr{F}(m\hat{u})$ come integrale. Purtroppo questa formula per l'inversa della TdF vale solo se $m\hat{u}$ appartiene a L^1.
  Infine alcuni hanno fatto l'ipotesi che m si possa scrivere come $m = \hat{\varphi}$ per un'opportuna funzione φ, per poi ottenere $Tu = m\,\hat{u} = \hat{\varphi}\,\hat{u} = \widehat{u * \varphi}$. Purtroppo le funzioni limitate, come m, non sono necessariamente le TdF di funzioni in L^1 o L^2. Inoltre la formula $\hat{\varphi}\,\hat{u} = \widehat{u * \varphi}$ vale se u e φ sono in L^1, e non si applica a questo caso.

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno cercato di dimostrare l'enunciato approssimando la funzione u con funzioni u_n in $C^1 \cap L^1$ con derivata in L^1, come ho fatto io sopra, ma non hanno saputo trovare la successione approssimante. In particolare alcuni hanno preso $u_n := u \cdot 1_{[-n.n]}$, che però non è di classe C^1, mentre altri hanno preso $u_n := u * \rho_n$, che è C^1 però non ha derivata in L^1.
  Infine diversi dei presenti hanno scritto l'argomento di approssimazione in forma troppo vaga per essere considerata corretta.

- Esercizio 6a). Una dimostrazione alternativa è la seguente. Siccome u è in L^1, il liminf di $|u(x)|$ per $x \to \pm\infty$ deve essere uguale a 0, e quindi posso trovare una successione $r_n \to -\infty$ ed una successione $s_n \to +\infty$ tali che
  $$u(r_n) \to 0\,, \quad u(s_N) \to 0\,.$$
  Pongo quindi
  $$v_n := \dot{u}\,1_{[r_n, s_n]}\,.$$
  Chiaramente $v_n \to \dot{u}$ in L^2, e quindi
  $$\hat{v}_n \to \hat{\dot{u}}\,.$$
  Inoltre, dato che u è di classe C^1, integrando per parti ottengo che per ogni $y \in \mathbb{R}$ vale
  $$\hat{v}_n(y) = \int_{r_n}^{s_n} \dot{u}(x)\,e^{-ixy}dx = u(s_n)\,e^{-is_n y} - u(r_n)\,e^{-ir_n y} - iy\int_{r_n}^{s_n} u(x)\,e^{-ixy}dx\,,$$
  e ora osservo che per la scelta di r_n e s_n i termini $u(s_n)\,e^{-is_n y}$ e $u(r_n)\,e^{-ir_n y}$ convergono a 0, mentre l'ultimo integrale converge a $\hat{u}(y)$ per il teorema di convergenza dominata (ricordo che u è in L^1) e dunque
  $$\hat{v}_n(y) \to iy\,\hat{u}(y)\,.$$
  Quindi le funzioni $\hat{v}_n$ convergono a $\hat{\dot{u}}$ in L^2 e a $iy\,\hat{u}$ puntualmente. Siccome la convergenza in L^2 implica a meno di sottosuccessioni la convergenza puntuale quasi ovunque, ne deduco che $\hat{\dot{u}}(y) = iy\,\hat{u}(y)$ per q.o. y.

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno scritto che ("come visto a lezione") data una funzione u in L^2 allora il limite
  $$\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} u(x)\,e^{-iyx}dx$$

esiste sempre e vale $\hat{u}(y)$. Quello che è stato detto a lezione è leggermente diverso, e cioè che tale uguaglianza vale per quasi ogni y per cui il limite esiste, ma a priori potrebbe non essercene neanche uno.

- Esercizio 6a). Alcuni dei presenti hanno proposto varianti (più o meno corrette) della seguente dimostrazione, che trovo molto elegante: si prende la funzione $\rho(x) := e^{-x^2/2}$ e si osserva che
  - $v := \rho * u$ appartiene a C^1 e $\dot{v} = \dot{\rho} * u$ perché $u \in L^1$ e $\rho \in C^1 \cap L^\infty$, $\dot{\rho} \in L^\infty$;
  - $\dot{v} = \rho * \dot{u}$ perché $\rho \in L^1 \cap L^2$ e $u \in C^1 \cap L^1$, $\dot{u} \in L^2$ (si tratta di una variante di un risultato dimostrato a lezione, la dimostrazione è abbastanza semplice);
  - dunque $\dot{\rho} * u = \rho * \dot{u}$;
  - $\widehat{\dot{\rho} * u} = \widehat{\dot{\rho}}\, \hat{u}$ perché $\dot{\rho}, u \in L^2$;
  - $\widehat{\dot{\rho}} = iy\hat{\rho}$ perché $\rho \in C^1 \cap L^1$ e $\dot{\rho} \in L^1$ (questo è il risultato visto a lezione);
  - $\widehat{\rho * \dot{u}} = \hat{\rho}\, \widehat{\dot{u}}$ perché $\rho, \dot{u} \in L^2$.

  Mettendo insieme gli ultimi quattro passi si ottiene $iy\hat{\rho}\, \hat{u} = \hat{\rho}\, \widehat{\dot{u}}$, e dividendo per $\hat{\rho}$ (che è una funzione mai nulla!) si ottiene infine $iy\, \hat{u} = \widehat{\dot{u}}$.

- Esercizio 7a). La versione originale di questo esercizio aveva un dato iniziale diverso, vale a dire $u_0(x) := 8 \cos x \sin^2 x$. Questo dato è più complicato da gestire perché si scrive come
$$u_0(x) = e^{ix} + e^{-ix} - e^{3ix} - e^{-3ix} = 2\cos x - 2\cos(3x)\,,$$
ma non si scrive come combinazione lineare finita di $\sin(nx)$. Vale la pena di osservare un fatto curioso: cercando una soluzione dell'equazione $u_t = u_x x$ della forma
$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$$
si ottiene
$$u(t,x) = e^{-t}(e^{ix} + e^{-ix}) - e^{-9t}(e^{3ix} - e^{-3ix}) = 2e^{-t}\cos x - 2e^{-9t}\cos(3x)\,.$$
Questa funzione risolve l'equazione su $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ con condizioni di periodicità al bordo, come previsto per questo tipo di soluzione, ma si risolve anche il problema iniziale (P). (Sembra una coincidenza fortuita ma non lo è.)

- Esercizio 7c). Molti dei presenti hanno messo in luce il ruolo della condizione al bordo $u(\cdot, \pi) = 0$ nell'unicità. La difficoltà per tutti è stata quella di trovare un esempio di condizione al bordo differente da quella data per cui fosse effettivamente possibile risolvere l'equazione.

- Esercizio 7c). In alternativa a quanto fatto sopra si può dimostrare la non unicità sommando alla soluzione u ottenuta in precedenza una soluzione v non identicamente nulla dell'equazione $v_t = v_{xx}$ con condizione al bordo $v(\cdot, 0) = 0$ e condizione iniziale $v(0, \cdot) = 0$.
Uno dei presenti ha trovato v usando più o meno questa idea (che trovo brillante): si prende una funzione uniformemente continua e limitata $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia dispari, nulla su $[0, \pi]$ e strettamente positiva su $(\pi, +\infty)$, e quindi si prende la soluzione v dell'equazione $v_t = v_{xx}$ su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con dato iniziale v_0, ottenuta tramite il nucleo del calore. Ovviamente v soddisfa $v(0, x) = v_0(x) = 0$ per $x \in [0, \pi]$, e si verifica facilmente a partire dalla formula risolutiva che v è dispari nella variabile x (e quindi $v(t, 0) = 0$ per ogni $t \geq 0$) e strettamente positiva per $t > 0$ e $x > 0$ (e quindi non è identicamente nulla sulla striscia $[0, +\infty) \times [0, \pi]$). Dunque v è la funzione arminica cercata.

- Esercizio 8(c). La soluzione scritta sopra non è molto precisa, innanzitutto perché ponendo $v = \nabla u$ si passa dalle funzioni armoniche scalari alle funzioni armoniche vettoriali, e poi perché non è del tutto chiaro cosa si debba intendere con $\nabla^k u$. Volendo essere precisi si dovrebbe quindi sostituire alla (8) una stima per ogni derivata parziale di u di ordine k calcolata in x, e nella dimostrazione di questa stima si dovrebbe prendere come v l'opportuna derivata parziale di u.