1. Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e α-Hölderiana per un certo $\alpha \in (0, 1]$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione α-Hölderiana per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Dire per quali $p \geq 1$ la funzione $f(x_1, x_2) := (x_1^2 + x_2^4)^{-1/10}$ appartiene a $L^p(Q)$ dove Q è il quadrato $[0, 1]^2$ in $\mathbb{R}^2$.

3. In $L^2(-1, 1)$ consideriamo il sottospazio X generato dalle funzioni x, x^2, x^3. Determinare le proiezioni della funzione 1 su X e su $X^\perp$.

4. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica appartenente a $L^2(-\pi, \pi)$. Dato $h \in \mathbb{R}$, calcolare i coefficienti di Fourier della traslazione $f(x - h)$ in termini dei coefficienti c_n di f.

   b) Dato un intero $N \geq 2$, dimostrare che f $2\pi/N$-periodica se e solo se $c_n = 0$ per ogni n che non è multiplo di N.[1]

5. a) Dimostrare la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Hölder: date f_1, f_2 funzioni misurabili su E insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$ e dati p, p_1, p_2 in $[1, +\infty]$ tali che $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, allora $\|f_1 f_2\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$. [*Suggerimento: ricondursi alla disuguaglianza di Hölder.*]

   b) Sia la mappa T che ad ogni coppia di funzioni f_1, f_2 su E associa la funzione prodotto $f_1 f_2$. Far vedere che T porta $L^{p_1} \times L^{p_2}$ in L^p.

   c) Dire se la mappa T è iniettiva / surgettiva / continua.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = \cos t \cdot u_{xx}$ con $u = u(t, x)$ definita su $[0, T) \times [-\pi, \pi]$, le condizioni al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$, dove u_0 è una funzione con coefficienti di Fourier c_n^0.
   Dimostrare che:

   a) per ogni $T > 0$ esiste al più una soluzione;[2]

   b) se $\sum_n |c_n^o| < +\infty$ allora esiste una soluzione per $T = \pi$;

   c) la soluzione al punto b) è di classe C^∞ per $t > 0$;

   d) in generale se $T > \pi$ non esistono soluzioni, neanche assumendo che u_0 sia C^∞.

7. Dato $p \in [1, +\infty)$, sia X l'insieme delle successioni $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ tali che $|x_n| \leq 1/n$ per ogni n. Dimostrare che:

   a) X è chiuso (in ℓ^p) per ogni p.

   b) X è compatto per $p > 1$.

   c) X non è compatto per $p = 1$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato.

   a) Far vedere che per ogni $\delta > 0$ esiste m tale che $|y - x| \leq \delta \ \Rightarrow\ f(y)/f(x) \leq m$.

   b) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) < +\infty$ se e solo se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx < +\infty$.

   c) Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{1 + |n|^a}$ è finita.

[1] In questo contesto si dice che f è h-periodica se $f(x) = f(x - h)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.
[2] Al solito si richiede che u sia continua, C^2 in x per $t > 0$, C^1 in t per $t > 0$.

1. Osservo innanzitutto che il prodotto di convoluzione $f * g$ è una funzione limitata ben definita perché f appartiene a L^1 mentre g è limitata. Dati $x, x' \in \mathbb{R}^d$, usando la definizione del prodotto di convoluzione ottengo

$$f * g(x) - f * g(x') = \int_{\mathbb{R}^d} (g(x-y) - g(x'-y))\, f(y)\, dy\,.$$

Detta quindi L la costante di α-Hölderianità di g ottengo

$$\begin{aligned}\big|f * g(x) - f * g(x')\big| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y) - g(x'-y)|\, |f(y)|\, dy \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} L|(x-y) - (x'-y)|^\alpha\, |f(y)|\, dy = L|x-x'|^\alpha\, \|f\|_1\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $f * g$ è α-Hölderiana di costante $L' := L\|f\|_1$.

2. Per capire per quali p la norma $\|f\|_p$ è finita la devo stimare sia dall'alto che dal basso (visto che non la posso calcolare esattamente). Per fare entrambe le stime spezzo il dominio di integrazione Q in due sottoinsiemi Q^+ e Q^- definiti come segue:
   - Q^- è l'insieme degli x tali che $x \in Q$ e $x_2^4 \le x_1^2$, ovvero $0 \le x_1 \le 1$ e $0 \le x_2 \le x_1^{1/2}$;
   - Q^+ è l'insieme degli x tali che $x \in Q$ e $x_2^4 > x_1^2$, ovvero $0 \le x_2 \le 1$ e $0 \le x_1 < x_2^2$.

   L'idea di questa suddivisione è che in Q^- la quantità $x_1^2 + x_2^4$ può essere stimata dall'alto e dal basso con x_1^2, mentre in Q^+ può essere stimata dall'alto e dal basso con x_2^4.
   Per la precisione vale che

$$\begin{aligned} x \in Q^- \ &\Rightarrow\ x_1^2 \le x_1^2 + x_2^4 \le 2x_1^2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^{p/10} x_1^{p/5}} \le |f(x)|^p \le \frac{1}{x_1^{p/5}}\,,\\ x \in Q^+ \ &\Rightarrow\ x_2^4 \le x_1^2 + x_2^4 \le 2x_2^4 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^{p/10} x_2^{2p/5}} \le |f(x)|^p \le \frac{1}{x_2^{2p/5}}\,.\end{aligned}$$

Quindi stimo l'integrale $\int_{Q^-} |f|^p$ dall'alto e dal basso con

$$\int_{Q^-} \frac{dx}{x_1^{p/5}} = \int_0^1 \left(\int_0^{x_1^{1/2}} \frac{dx_2}{x_1^{p/5}}\right) dx_1 = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1^{p/5-1/2}}\,,$$

e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $p/5 - 1/2 < 1$, vale a dire $p < 15/2$.
Analogamente stimo l'integrale $\int_{Q^+} |f|^p$ dall'alto e dal basso con

$$\int_{Q^+} \frac{dx}{x_2^{2p/5}} = \int_0^1 \left(\int_0^{x_2^2} \frac{dx_1}{x_2^{2p/5}}\right) dx_2 = \int_0^1 \frac{dx_2}{x_2^{2p/5-2}}\,,$$

e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $2p/5 - 2 < 1$, vale a dire $p < 15/2$.
Sulla base di quanto fatto deduco che la norma $\|f\|_p$ è finita se e solo se $p < 15/2$.

3. Siccome X è un sottospazio chiuso di $L^2(-1,1)$, so che esiste la proiezione di 1 su X, ed è una funzione della forma

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\,,$$

inoltre la proiezione di 1 su $X^\perp$ è $1 - f$. Il fatto $1 - f$ è ortogonale a X si traduce nel seguente sistema di equazioni lineari nei coefficienti a_i:

$$\begin{cases} 0 = \langle 1-f\,;\, x\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 dx = -\tfrac{2}{3}a_1 - \tfrac{2}{5}a_3 \\ 0 = \langle 1-f\,;\, x^2\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2 - a_1x^3 - a_2x^4 - a_3x^5 dx = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}a_2 \\ 0 = \langle 1-f\,;\, x^3\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x^3 - a_1x^4 - a_2x^5 - a_3x^6 dx = -\tfrac{2}{5}a_1 - \tfrac{2}{7}a_3 \end{cases}$$

da cui si ricava facilmente che $a_1 = a_3 = 0$ e $a_2 = 5/3$. Quindi la proiezione di 1 su X è $f = \frac{5}{3}x^2$ e la proiezione su $X^\perp$ è $1 - f = 1 - \frac{5}{3}x^2$.

4. a) Detta $\tau_h f(x) := f(x-h)$ la traslata di f, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale che

$$\begin{aligned} c_n(\tau_h f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(t)\, e^{-in(t+h)} dt \\ &= e^{-inh}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt = e^{-inh} c_n \,. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = t + h$, nel terzo ho usato il fatto che l'integrale di una funzione 2π-periodica su ogni intervallo di lunghezza 2π è lo stesso.)

b) Posto $h := 2\pi/N$, i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) f è $2\pi/N$-periodica;

(ii) $f(x) = \tau_h f(x) = 0$ per q.o. x;

(iii) $(1 - e^{-inh})c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;

(iv) $c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ tale che N non divide n.

(L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è ovvia, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) segue dal punto a), e infine (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) segue dal fatto che $1 - e^{-inh} \neq 0$ se e solo se N non divide n.)

5. a) La condizione $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ equivale a

$$1 = \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2}\,, \tag{1}$$

il che significa che p_1/p e p_2/p sono esponenti coniugati. Posso allora applicare la disuguaglianza di Hölder come segue:

$$\|f_1 f_2\|_p^p = \int_E |f_1|^p |f_2|^p \, dx \leq \big\||f_1|^p\big\|_{p_1/p} \big\||f_2|^p\big\|_{p_2/p} = \|f_1\|_{p_1}^p \|f_2\|_{p_2}^p \,.$$

(Il caso $p = p_1 = p_2 = +\infty$ va considerato a parte, ma è immediato.)

b) Basta applicare a).

c) *T non è iniettiva.* Infatti posso scrivere la funzione 0 (che appartiene a L^p per ogni p) sia come prodotto di 0 per 0 che come prodotto di g per 0, dove g è una qualunque funzione in L^{p_1} che non sia quasi ovunque nulla.

T è surgettiva. Ricordando la (1) posso infatti scrivere ogni funzione $f \in L^p$ come

$$f = \underbrace{\operatorname{sgn}(f)\, |f|^{p_1/p}}_{f_1} \cdot \underbrace{|f|^{p_2/p}}_{f_2}$$

dove ho posto

$$\operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f_1 appartiene a L^{p_1} ed f_2 appartiene a L^{p_2}.

T è Lipschitziana su ogni sottoinsieme limitato di $L^{p_1} \times L^{p_2}$, ed in particolare è continua. Osservo infatti che date due coppie (f_1, f_2) e (f_1', f_2') in $L^{p_1} \times L^{p_2}$ si ha che

$$\begin{aligned} \|f_1' f_2' - f_1 f_2\|_p &= \|f_1'(f_2' - f_2) + (f_1 - f_1')f_2\|_p \\ &\leq \|f_1'(f_2' - f_2)\|_p + \|(f_1 - f_1')f_2\|_p \\ &\leq \|f_1'\|_{p_1} \|f_2' - f_2\|_{p_2} + \|f_2\|_{p_2} \|f_1 - f_1'\|_{p_1} \,. \end{aligned}$$

6. a) Data u soluzione del problema (P) definita su $[0,T) \times [-\pi, \pi]$, per ogni $t \in [0,T)$ e $n \in \mathbb{Z}$ indico con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$. Allora

- c_n è una funzione continua su $[0,T)$ perché u è continua su $[0,T) \times [-\pi, \pi]$;
- c_n è una funzione derivabile per ogni $t \in (0,T)$ perché u è di classe C^1 in t su $(0,T) \times [-\pi, \pi]$, e $\dot{c}_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di $u_t(t, \cdot)$;

- $-n^2\, c_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di $u_{xx}(t,\cdot)$ per ogni $t \in (0,T)$ perché $u(t,\cdot)$ è di classe C^2 e soddisfa le condizioni al bordo $u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi)$ e $u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi)$;
- per ogni $t \in (0,T)$ vale l'identità $u_t(t,\cdot) = \cos t \cdot u_{xx}(t,\cdot)$ da cui segue l'identità dei rispettivi coefficienti di Fourier, vale a dire $\dot c_n(t) = -n^2 \cos t \cdot c_n(t)$;
- $c_n(0) = c_n^0$ perché $u(u,\cdot) = u_0(\cdot)$;
- la funzione c_n risolve dunque l'equazione differenziale lineare omogenea $\dot y = -n^2 \cos t \cdot y$ con la condizione iniziale $y(0) = c_n^0$, e pertanto è univocamente determinata; per la precisione vale che
$$c_n(t) = c_n^0\, e^{-n^2 \sin t}\,. \tag{2}$$

Siccome i coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$ sono univocamente determinati per ogni $t \in [0,T)$, ho che anche la funzione $u(t,\cdot)$ è univocamente determinata.

b) e c) La formula (2) suggerisce di considerare la soluzione u data da
$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0\, e^{-n^2 \sin t}\, e^{inx}}_{u_n}\,. \tag{3}$$

Faccio vedere quanto segue:

- La serie delle funzioni u_n in (3) converge totalmente su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, da cui segue che u è ben definita e continua su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, e 2π-periodica nella variabile x. Infatti, tenuto conto che $-n^2 \sin t \le 0$ per $t \in [0,\pi]$, ho che
$$\|u_n\|_{L^\infty([0,\pi]\times\mathbb{R})} \le |c_n^0|\,,$$
e sappiamo che $\sum_n |c_n^0| < +\infty$ per ipotesi.
- La serie delle derivate parziali di ogni ordine delle funzioni u_n converge totalmente su $[\delta,\pi-\delta]\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$, da cui segue che u è di classe C^∞ su $(0,\pi)\times\mathbb{R}$. Si può infatti dimostrare per induzione che per ogni intero $h = 0,1\dots$ esiste un polinomio $P_h = P_h(y_1,y_2)$ di grado h tale
$$D_t^h\big(e^{-n^2 \sin t}\big) = c_n^0\, P_h(n^2 \sin t, n^2 \cos t)\, e^{-n^2 \sin t}\,,$$
e quindi per ogni intero $k = 0,1,\dots$ vale che
$$D_x^k D_t^h u_n = c_n^0\, P_h(n^2 \sin t, n^2 \cos t)\, e^{-n^2 \sin t}\, (in)^k e^{inx}\,.$$
Usando questa formula, per ogni $h = 0,1,\dots$ possiamo trovare una costante M_h tale che
$$\big\|D_x^k D_t^h u_n\big\|_{L^\infty([\delta,\pi-\delta]\times\mathbb{R})} \le M_h\, |c_n^0|\, |n|^{2h+k} e^{-n^2 \sin\delta}\,,$$
e dunque la serie delle derivate parziali $D_x^k D_t^h u_n$ converge totalmente perché la successione $|c_n^0|$ è limitata, $e^{-n^2 \sin\delta}$ tende a 0 più che esponenzialmente in n, mentre $|n|^{2h+k}$ tende a infinito polinomialmente.
- Siccome ciascuna funzione u_n risolve l'equazione in (P), che è lineare, grazie ai punti precedenti ottengo che anche u risolve tale equazione. Inoltre u è 2π-periodica in x e quindi soddisfa la condizione al bordo in (P). Infine le funzioni $u(0,\cdot)$ e $u_0(\cdot)$ coincidono perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.

d) Considero la funzione u_0 con coefficienti $c_n^0 := e^{-|n|}$. Siccome c_n^0 tende a 0 più che polinomialmente per $n \to \pm\infty$ ho che
$$\sum_n |c_n^0|\, |n|^k < +\infty \quad \text{per } k = 0,1,\dots,$$
e quindi u_0 è una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ di classe C^∞. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione u di (P) definita su $[0,T)\times[-\pi,\pi]$. Preso allora t con $\pi < t < \min\{T, 2\pi\}$, si ha che $\sin t < 0$ e quindi la formula (2) implica che i coefficienti $c_n(t)$ tendono a $\pm\infty$ per $n \to \pm\infty$. Ma questo contraddice il fatto che questi coefficienti sono in ℓ^2, e quindi devono tendere a 0.

7. a) Sia $x^{(k)}$ una successione di elementi di X che converge a x in ℓ^p per $k \to +\infty$. Devo mostrare che x appartiene a X. Osservo che per ogni $n = 1,2\dots$ si ha che
$$\big|x_n^{(k)} - x_n\big| \le \big\|x^{(k)} - x\big\|_{\ell^p}$$

e quindi $x_n^{(k)}$ converge a x_n per $k \to +\infty$. Inoltre $\left|x_n^{(k)}\right| \le 1/n$ (perché $x^{(k)}$ appartiene a X) e quindi anche x_n soddisfa $|x_n| \le 1/n$, e dunque x appartiene a X.

b) Data una successione $x^{(k)}$ di elementi di X, voglio trovare una sotto-successione che converge ad un qualche elemento di X. Fissato n, ho che $\left|x_n^{(k)}\right| \le 1/n$ per ogni k e quindi posso estrarre da k una sotto-successione k_h tale che $x_n^{(k_h)}$ converge ad un certo x_n, che a sua volta soddisfa

$$|x_n| \le 1/n\,. \tag{4}$$

Usando un procedimento diagonale posso inoltre fare in modo che la successione k_h sia la stessa per ogni n.

Pongo allora $x := (x_1, x_2, \dots)$, e osservo che x appartiene a X per via della (4). Mi resta da dimostrare che $x^{(k_h)}$ converge a x in ℓ^p. Osservo che per ogni n vale

$$\left|x_n^{(k_h)} - x_n\right| \le \left|x_n^{(k_h)}\right| + \left|x_n\right| \le \frac{2}{n}\,,$$

e dunque, fissato un qualunque intero N, vale che

$$\left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p \le \sum_{n=1}^{N-1} \left|x_n^{(k_h)} - x_n\right|^p + 2^p \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\,. \tag{5}$$

Siccome la serie di $1/n^p$ converge, per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare N tale che la seconda somma in (5) vale meno di ε; siccome la prima somma in (5) tende a 0 per $h \to +\infty$ ho che

$$\limsup_{h\to+\infty} \left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p \le 2^p\varepsilon\,,$$

e dall'arbitrarietà di ε segue che

$$\lim_{h\to+\infty} \left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p = 0\,.$$

8. a) Osservo che

$$\nabla(\log f) = \frac{\nabla f}{f}\,.$$

Dunque l'ipotesi fatta su f implica che la funzione $\log f$ ha gradiente limitato, ed in particolare è una funzione Lipschitziana su $\mathbb{R}^d$. In altre parole esiste una costante L tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ vale

$$L|y - x| \ge \left|\log(f(y)) - \log(f(x))\right| = \left|\log\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)\right|\,,$$

e dunque

$$\exp(-L|x-y|) \le \frac{f(y)}{f(x)} \le \exp(L|x-y|)\,.$$

In particolare presa $\delta > 0$ e posto $m := \exp(L\delta)$ si ha che

$$|x - y| \le \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{m} \le \frac{f(y)}{f(x)} \le m\,. \tag{6}$$

b) Per ogni vettore $n \in \mathbb{Z}^d$ indico con $Q(n)$ il cubo di centro n e lato 1 con lati paralleli agli assi. Osservo che i cubi $Q(n)$ ricoprono $\mathbb{R}^d$ e l'intersezione di due di questi cubi ha misura nulla. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{Q(n)} f(x)\,dx\,. \tag{7}$$

D'altra parte il diametro di ciascun $Q(n)$ è $\sqrt{d}$, e posto quindi $m := \exp\left(L\sqrt{d}\right)$ la (6) implica

$$\frac{1}{m} f(n) \le f(x) \le m\, f(n) \quad \text{per ogni } x \in Q(n),$$

e dunque, ricordando che ogni $Q(n)$ ha volume 1,

$$\frac{1}{m} f(n) \le \int_{Q(n)} f(x)\,dx \le m\, f(n)\,. \tag{8}$$

Mettendo insieme (7) e (8) ottengo che

$$\frac{1}{m} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n) \le \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \le m \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n)\,,$$

da cui segue la tesi.

c) Voglio vedere se posso applicare quanto fatto al punto b). Pongo dunque

$$f(x) := \frac{1}{1+|x|^a} \tag{9}$$

ed osservo che

$$\nabla f(x) = \frac{ax|x|^{a-2}}{(1+|x|^a)^2}\,,$$

e quindi

$$\frac{|\nabla f(x)|}{f(x)} = \frac{a|x|^{a-1}}{1+|x|^a}\,,$$

e questa funzione è limitata perché è continua e tende a 0 per $|x| \to +\infty$.
Pertanto grazie a quanto fatto al punto b) ho che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{1+|n|^a} \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^a}\,dx \approx \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1}}{1+t^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a-d+1}} dt\,.$$

(L'espressione "$a \approx b$" sta per "a si comporta come b", cioè "a è finito se e solo se b è finito".) Siccome l'ultimo integrale è finito se e solo se $a - d + 1 > 1$, cioè $a > d$, lo stesso vale per la serie.

COMMENTI

- Esercizio 1. Un passaggio preliminare che molti dei presenti hanno omesso è verificare che il prodotto di convoluzione $f * g$ sia effettivamente ben definito, cosa che peraltro segue da un risultato visto a lezione. Alcuni, nel tentativo di farlo vedere, hanno scritto che $f * g$ è ben definito perché

  $$|f * g(x)| \leq \int |g(x-y)|\,|f(y)|\,dy \leq \|g\|_\infty \|f\|_1\|\,.$$

  Ma questa disuguaglianza non ha molto senso, visto che presuppone l'esistenza di $f * g(x)$, che è proprio quella che si vorrebbe dimostrare.

- Esercizio 2. Mi scuso perché il suggerimento dato durante lo scritto non era ottimale. Seguendo quel suggerimento, infatti, è facile arrivare alla conclusione che $f \in L^p$ per $p < 5$ e $f \notin L^p$ for $p \geq 10$, ma non è facile arrivare al risultato completo.

- Esercizio 2. Un approccio alternativo (seguito da veri dei presenti) è il seguente: si calcola l'integrale di $|f(x)|^p$ su Q usando il cambio di variabili

  $$x_1 = \rho\cos\theta\,, \quad x_2 = \sqrt{\rho\sin\theta}\,.$$

  Si noti infatti che
  - $f(x) = 1/\rho^{1/5}$;
  - il determinante Jacobiano del cambio di variabili è $\frac{1}{2}\sqrt{\rho/\sin\theta}$;
  - Q contiene l'insieme B dei punti x tali che $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$;
  - l'integrale di $|f(x)|^p$ su Q si comporta come quello su B perché f è limitata su $Q \setminus B$ e quindi l'integrale di $|f(x)|^p$ su $Q \setminus B$ è finito per ogni p.

  Ne consegue che

  $$\begin{aligned}\int_Q |f(x)|^p\,dx &\approx \int_B |f(x)|^p\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^{p/5}} \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\sin\theta}} d\theta\,d\rho \\ &= \left(\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p/5-1/2}}\right)\left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\right) \approx \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p/5-1/2}}\,,\end{aligned}$$

  e dunque f appartiene a $L^p(Q)$ se e solo se $p/5 - 1/2 < 1$, cioè $p < 15/2$.

- Esercizio 3. Noto che le funzioni dispari e quelle pari sono mutuamente ortogonali in $L^2(-1,1)$. Usando questa osservazione ed un po' di algebra lineare si dimostra che allora la proiezione della funzione pari 1 su X è uguale alla proiezione di 1 sulla retta generata da x^2, che è data dalla formula
$$\frac{\langle 1\,;\, x^2\rangle}{\|x^2\|_2^2}\, x^2 = \frac{2/3}{2/5}\, x^2 = \frac{5}{3} x^2\,.$$

- Esercizio 5c): continuità della mappa T. Diversi gli errori e le dimostrazioni incomplete, cioè basate su enunciati non sono stati dimostrati né a lezione, né dallo studente che li ha usati. Per cominciare, alcuni dei presenti hanno scritto che la mappa $T : L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$ è lineare, mentre invece è bilineare (come ogni prodotto che si rispetti).
Altri invece hanno scritto che T è continua perché è separatamente continua nelle due variabili. Il problema è che questa affermazione in generale è falsa, persino nel caso in cui T è una funzione bilineare sul prodotto di due spazi normati (anche a valori in $\mathbb{R}$). Tuttavia è vera se T è una mappa bilineare tra spazi di Banach (come in questo esercizio); però questo enunciato è tutt'altro che ovvio, e non può essere dato per buono.
Qualcuno ha scritto che T è continua perchè è continua in $(0,0)$: questa affermazione è corretta ma non immediata, e non può essere data per buona. Stesso discorso vale l'asserzione che la stima $\|T(f_1,f_2)\|_p \le \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}$ implica la continuità di T.

- Esercizio 5c): surgettività della mappa T. Alcuni dei presenti hanno dimostrato che T ha immagine densa in L^p, e ne hanno dedotto che allora l'immagine è tutto L^p. Non vedo alcuna ragione per cui debba essere così, e certamente non basta la continuità di T. (Per esempio, dato un insieme E di misura nulla, l'immersione di $L^2(E)$ in $L^1(E)$ è una mappa lineare continua con immagine densa, ma non surgettiva.)

- Esercizio 6. Questo esercizio è stato particolarmente difficile da correggere, perché molti hanno dato risposte lunghe e allo stesso tempo vaghe e imprecise, in particolare per quanto riguarda i punti b) e c), dando spesso l'impressione di non essere in grado di scriverne di precise. Tuttavia alcuni (ma solo alcuni) hanno anche dato tutte le idee e le formule necessarie, cosa che è stata valutata positivamente.
Diverse persone hanno dedicato tempo a raccontare la procedura "formale" usata per trovare la soluzione del problema. In un esame scritto questo passo può essere ridotto al minimo o anche omesso, e sopratutto deve essere chiaro che non sostituisce le dimostrazioni rigorose.
Infine molti dei presenti hanno ridimostrato formule viste e riviste a lezione, come quelle che legano i coefficienti di Fourier di una funzione $u(t,\cdot)$ con quelli di $u_t(t,\cdot)$ e di $u_{xx}(t,\cdot)$. Questo non era ovviamente necessario.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno mostrato che la serie delle funzioni u_n in (3) converge totalmente, e da questo hanno dedotto che la funzione u definita da questa serie è una soluzione del problema (P). In realtà la convergenza totale della serie mostra solo che u è una funzione ben definita e continua su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, mentre per dimostrare che è una soluzione dell'equazione in (P) bisogna far vedere perlomeno che le serie delle derivate parziali $D_t u_n$, $D_x u_n$ e $D_{xx} u_n$ convergono totalmente sui sottoinsiemi compatti di $(0,\pi)\times\mathbb{R}$.

- Esercizio 6b) e c). Molti dei presenti hanno scritto che le derivate parziali delle funzioni u_n di un certo ordine convergono totalmente su $(0,\pi)\times[-\pi,\pi]$, ma questo è falso: convergono totalmente solo in $(\delta,\pi-\delta)\times[-\pi,\pi]$ per ogni $\delta > 0$. (L'errore è in parte dovuto al tipo di stime scritte, vedere il commento successivo.)

- Esercizio 6b). Per dimostrare la convergenza totale della serie $\sum_n u_n$ che definisce u, o della serie delle derivate parziali di u_n di un certo ordine, molti dei presenti hanno scritto delle stime dipendenti da t, del tipo
$$\sum_n \|D_t u_n\|_\infty \le \sum_n n^2 |c_n^0|\, |e^{-n^2 \sin t}| < +\infty\,,$$
dove quindi $\|D_t u_n\|_\infty$ non può che essere la norma del sup della funzione $D_t u_n(t,\cdot)$ a t fissato. Il problema è che questa stima mostra la convergenza totale della serie delle funzioni $D_t u_n(t,\cdot)$

per ogni t, che però non implica la convergenza totale delle funzioni $D_t u_n$ in t e x. In particolare questa convergenza implica che $v := \sum D_t u_n$ è una funzione continua nella variabile x per ogni t, ma non che v è continua nelle variabili t, x. Inoltre non implica che v coincida con la derivata parziale $D_t u$, né che questa esista.
Ovviamente dalla stima data sopra è possibile ricavare una stima della norma del sup delle funzioni $D_t u_n$ nelle due variabili, ma questa stima andava scritta esplicitamente.

- Esercizio 6d). Alcuni dei presenti hanno fatto vedere che la serie delle funzioni u_n non converge totalmente e ne hanno dedotto che quindi la soluzione u non esiste.
Scritta così questa inferenza non è corretta. Ma può essere resa corretta osservando che per ogni t la soluzione $u(t,\cdot)$ è per ipotesi una funzione di classe C^2 (nella variabile x) e quindi è anche di classe C^1, cosa che implica la convergenza totale della serie di Fourier $\sum c_n(t)\, e^{inx}$ (a t fissato).

- Esercizio 7. Gli enunciati a) e b) valgono anche per $p = +\infty$, ma questo caso è stato escluso per semplificare lo svolgimento dell'esercizio.

- Esercizio 7a). Diversi dei presenti hanno dato la seguente dimostrazione: sia $p_n : \ell^p \to \mathbb{R}$ la mappa lineare che ad ogni successione x associa il termine n-esimo x_n. Si dimostra facilmente che questa mappa è continua e che
$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}\big([-1/n, 1/n]\big)\,,$$
e dunque X è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Attenzione: la continuità della mappa p_n non può essere data per scontata, come invece hanno fatto alcuni.

- Esercizio 7b). Molti dei presenti hanno scritto che la compattezza di X segue dal fatto che X è chiuso e limitato, ma questa affermazione è sbagliata. In effetti gli insiemi compatti in uno spazio metrico completo sono caratterizzati dall'essere chiusi e *totalmente limitati*, ma negli spazi normati di dimensione infinita, come ad esempio ℓ^p, i limitati non sono sempre totalmente limitati. Un esempio di insieme limitato ma non totalmente limitato è proprio la palla chiusa in ℓ^p (con centro l'origine e raggio r) che infatti non è compatta.
Alcuni dei presenti hanno scritto che sotto opportune ipotesi di numerabilità sulla topologia dello spazio, la compattezza equivale a chiusura e limitatezza (confondendosi, credo, con le ipotesi per l'equivalenza di compattezza e compattezza sequenziale).
Infine alcuni dei presenti hanno usato la corretta caratterizzazione dei compatti, ma poi hanno usato definizioni non corrette della totale limitatezza.

- Esercizio 7b). Per quanto detto sopra si può dimostrare che X è compatto facendo vedere che è totalmente limitato. La dimostrazione di questo fatto si basa su due osservazioni: la prima è che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che
$$\sum_{n>N} \frac{1}{n^p} < \varepsilon^p\,,$$
e pertanto, detta $p : X \to X$ la mappa che ad ogni successione x associa la successione "troncata" $p(x)$ definita da
$$p(x)_n := \begin{cases} x_n & \text{se } n \le N, \\ 0 & \text{se } n > N, \end{cases}$$
allora
$$\|x - p(x)\|_{\ell^p} = \Big(\sum_{n>N} |x_n|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{n>N} \frac{1}{n^p}\Big)^{1/p} < \varepsilon\,,$$
e dunque
$$\operatorname{dist}(x, p(X)) := \inf_{y \in p(X)} \|x - y\|_{\ell^p} < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X. \tag{10}$$
La seconda osservazione è che $p(X)$ è un insieme chiuso e limitato in $p(\ell^p)$, che è uno spazio normato di dimensione finita, quindi $p(X)$ è compatto ed in particolare è totalmente limitato.

Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare un insieme finito $F \subset p(X)$ tale che

$$\operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in p(X). \tag{11}$$

Mettendo insieme le stime (10) e (11) ottengo che

$$\operatorname{dist}(x, F) < 2\varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X.$$

e siccome ε è arbitrario ho dimostrato che X è totalmente limitato.

- Esercizio 7b). La dimostrazione data sopra segue questo schema: data una successione di elementi $x^{(k)}$ di X si estrae una sottosuccessione $x^{(k_h)}$ che converge puntualmente ad un qualche $x \in X$ (nel senso che $x_n^{(k_h)} \to x_n$ per ogni n) e quindi si dimostra poi che $x^{(k_h)}$ converge a x in ℓ^p. Alcuni dei presenti hanno proposto una diversa dimostrazione di quest'ultimo fatto: detta μ la misura che conta i punti su $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$, hanno osservato che
$$\big\|x^{(k_h)} - x\big\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \big|x_n^{(k_h)} - x_n\big|^p = \int_{\mathbb{N}^*} \big|x_n^{(k_h)} - x_n\big|^p \, d\mu(n)\,,$$
e questo integrale tende a 0 per il teorema di convergenza dominata. Per la precisione hanno usato la seguente dominazione:
$$\big|x_m^{(k_h)} - x_m\big|^p \le \frac{2}{n^p}$$
(la successione $2/n^p$ sta in $\ell^1 = L^1(\mathbb{N}^*, \mu)$ perché $p > 1$).

- Esercizio 8a). Diversi dei presenti hanno dimostrato che una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^d$ con gradiente limitato è Lipschitziana. Questo fatto poteva essere dato per buono (come anche detto durante lo scritto).

- Esercizio 8. La versione originale del punto c) chiedeva di considerare $a > 0$. Il risultato non cambia, ma la dimostrazione è più complicata perchè la funzione f definita in (9) non è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^d$ per $a \le 1$ (non è differenziabile nell'origine). Per includere il caso $0 < a \le 1$ basta osservare separatamente che la serie in oggetto vale $+\infty$ perché è sempre maggiore della somma di $1/(1 + n^a)$ con n intero positivo, che vale $+\infty$.
  In alternativa si può notare che il criterio di convergenza enunciato al punto b) vale in realtà per tutte le funzioni continue $f : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ che sono di classe C^1 nel complementare A di una qualche palla chiusa, e tali che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato su A.

- Esercizio 8a). In diversi hanno dato dimostrazioni sbagliate di questo punto, e spesso l'errore è consistito nel dire che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato anche se ∇f e f non sono calcolate nello stesso punto.