1. Data $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^1, scrivere i coefficienti di Fourier (complessi) di f' in funzione di quelli di f e del numero $m(f) := f(\pi) - f(-\pi)$.

2. Calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \dfrac{x^2}{x^4 + 4}$.

3. Detto D il disco chiuso (in $\mathbb{C}$) con raggio 1 e centro nell'origine, trovare la funzione $u : D \to \mathbb{R}$ continua e armonica all'interno di D che soddisfa la condizione al bordo $u(e^{it}) = t^2$.

4. Sia $I := [0, 1]$ e sia X il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni $u : I \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che $u(1) = 0$. Data $a : I \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1, consideriamo l'operatore $T : X \to L^2(I)$ dato da $Tu := (a\dot{u})'$.

   a) Dire per quali funzioni a l'operatore T è autoaggiunto.

   b) Tra le funzioni a del punto a), dire per quali T è semi-definito positivo.

   c) Tra le funzioni a del punto a), dire per quali T è definito positivo.

5. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, siano $E_1, E_2, \dots$ una successione di insiemi misurabili contenuti in $\mathbb{R}^d$ e a due a due disgiunti, e sia E l'unione di questi insiemi. Dimostrare che l'uguaglianza
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f\, dx \right) = \int_E f\, dx$$
vale nei seguenti casi: a) $f \geq 0$; b) $f \in L^1(E)$; c) f è integrabile su E.

6. Data una funzione $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^3 e 2π-periodica, consideriamo il problema
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)\,,\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot)\,,\ u_t(0, \cdot) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

   a) Risolvere il problema $(*)$ per $u_0(x) := \cos(x)$.

   b) Dire per quali u_0 la soluzione del problema $(*)$ è definita su tutto $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ ed è limitata.

7. a) Usando la trasformata di Fourier, trovare una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ che risolve l'equazione
$$u * u = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

   b) Quante soluzioni u in $L^1(\mathbb{R})$ ammette di quest'equazione?

   c) E quante in $L^2(\mathbb{R})$?

8. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data $f(x) := 1/|x|$ per $x \neq 0$ (e $f(0) := 0$), sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}^3)$ e sia A un aperto in $\mathbb{R}^3$ tale che $u = 0$ q.o. su A; sia infine $B := B(0, 1)$ la palla chiusa con centro l'origine e raggio 1.

   a) Dire per quali p la funzione f appartiene agli spazi $L^p(\mathbb{R}^3)$, $L^p(B)$, $L^p(\mathbb{R}^3 \setminus B)$.

   b) Dimostrare che il prodotto di convoluzione $u * f(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

   c) Dimostrare che $u * f(x)$ è ben definito e finito per ogni $x \in A$, e che $u * f$ è continua su A.

   d) Dimostrare che $u * f$ è armonica su A.

1. Indicando come al solito con $c_n(f)$ i coefficienti di Fourier di una funzione f, ottengo

$$\begin{aligned} c_n(f') &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big| f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(-in) e^{-inx} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\big(f(\pi)-f(-\pi)\big) + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{(-1)^n}{2\pi}\, m(f) + in\, c_n(f)\,. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti.)

2. Siccome u è una funzione reale e pari, la TdF $\hat{u}$ è pure reale e pari. Calcolo $\hat{u}(y)$ per $y \le 0$ usando il metodo dei residui; indico quindi con f la funzione meromorfa data da

$$f(z) := \frac{z^2 e^{-iyz}}{z^4+4}\,,$$

e per ogni $r > 0$ indico con $\gamma_{1,r} : [-r, r] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,r} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ i cammini dati da

$$\gamma_{1,r}(t) := t\,, \quad \gamma_{2,r}(t) := re^{it}\,;$$

infine γ_r è il cammino ottenuto giungendo $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$. In particolare γ_r parametrizza *in senso antiorario* il bordo del semidisco D_r ottenuto intersecando il semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ e il disco con centro 0 e raggio r.
Osservo ora che per ogni z nel semipiano superiore si ha $|e^{-iyz}| = e^{y\operatorname{Im}(z)} \le 1$, dunque

$$|f(z)| \le \frac{|z|^2}{|z^4+4|} = O(1/|z|^2)\,,$$

da cui segue che

$$\left|\int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz\right| \le \pi r\, O(1/r^2) =)(1/r)$$

ed in particolare questo integrale tende a 0 per $r \to +\infty$. Pertanto

$$\begin{aligned} \hat{u}(y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\, e^{-iyx}\, dx \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1,2} \operatorname{Res}(f, z_i)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dove nell'ultimo passaggio ho applicato il teorema dei residui, e in particolare $z_{1,2}$ sono i poli di f nel semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$, vale a dire

$$z_{1,2} = \pm 1 + i\,. \tag{2}$$

Osservo ora che f si scrive come rapporto delle funzioni intere $g(z) := z^2 e^{-iyz}$ e $h(z) := z^4 + 4$, e siccome h ha uno zero semplice in $z_{1,2}$, ho che

$$\operatorname{Res}(f, z_i) = \frac{g(z_i)}{h'(z_i)} = \frac{e^{-iyz_i}}{4z_i} = \frac{\overline{z_i}\, e^{-iyz_i}}{4|z_i|^2} = \frac{\overline{z_i}\, e^{-iyz_i}}{8}$$

Mettendo insieme questa formula e le (1), (2) ottengo infine che per ogni $y \le 0$ vale

$$\hat{u}(y) = \frac{\pi i}{4}\Big((1-i)\, e^{(1-i)y} - (1+i)\, e^{(1+i)y}\Big) = \frac{\pi}{2} e^y\, (\cos y + \sin y)\,,$$

e quindi, ricordando che $\hat{u}$ è una funzione pari,

$$\hat{u}(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}\, (\cos y - \sin(|y|))\,.$$

3. Come al solito, comincio scrivendo la funzione $u(e^{it}) = t^2$ in serie di Fourier (complessa). Il calcolo dei coefficienti di Fourier mi dà

$$c_n = \begin{cases} \pi^2/3 & \text{per } n = 0, \\ 2(-1)^n/n^2 & \text{per } n \ne 0. \end{cases}$$

Siccome $\sum |c_n| < +\infty$

$$u(e^{it}) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(e^{int} + e^{-int})$$

e la serie converge totalmente, e abbiamo visto a lezione che l'estensione armonica di u a tutto il disco è

$$u(z) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(z^n + \bar{z}^n) = \frac{\pi^2}{3} + 4\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^n\right).$$

4. Presi $u, v \in X$ una semplice integrazione per parti e il fatto che $a(1) = 0$ danno

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_0^1 (a\dot{u})' v\,dx = -a(0)\,\dot{u}(0)\,v(0) - \int_0^1 a\dot{u}\dot{v}\,dx\,, \tag{3}$$

da cui segue che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle = a(0)\big(u(0)\,\dot{v}(0) - \dot{u}(0)\,v(0)\big)\,. \tag{4}$$

a) *T è autoaggiunto se e solo se $a(0) = 0$.* L'implicazione "se" segue immediatamente dalla formula (4). Per dimostrare l'implicazione "solo se" mi basta trovare due funzioni $u, v \in X$ tali che

$$u(0)\,\dot{v}(0) - \dot{u}(0)\,v(0) \neq 0$$

(per esempio $u(x) = 1 - x$ e $v(x) = \sin(\pi x)$) e a questo punto l'ipotesi che T sia autoaggiunto più la formula (4) implicano che $a(0) = 0$.

b) *T è semi-definito positivo se e solo se $a(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$.* Osservo per cominciare che essendo $a(0) = 0$ la formula (3) implica

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_0^1 (-a)\,\dot{u}^2\,dx\,. \tag{5}$$

Da questa identità segue immediatamente l'implicazione "se" dell'enunciato. Dimostro l'implicazione "solo se" per assurdo: se esistesse $\bar{x} \in I$ tale che $a(\bar{x}) > 0$ allora, essendo a una funzione continua, esisterebbe anche un intervallo J contenuto all'interno di I tale che $a > 0$ su J, e quindi, presa una funzione $u \in X$ non identicamente nulla con supporto contenuto in J, la formula (5) implicherebbe $\langle Tu\,;\,u\rangle < 0$, in contraddizione con l'ipotesi che l'operatore T sia semi-definito positivo.

b) *T è definito positivo se e solo l'insieme aperto $A := \{x\colon a(x) < 0\}$ è denso in I.*[1] Comincio con la dimostrazione dell'implicazione "se": suppongo quindi che A sia denso e faccio vedere che data $u \in X$ tale che $\langle Tu\,;\,u\rangle = 0$ allora $u = 0$ su I. Siccome $g := a\,\dot{u}^2$ è una funzione negativa o nulla, la formula (5) implica che $g = 0$ quasi ovunque in I, e quindi ovunque perché g è continua. Ma allora $\dot{u} = 0$ su A, da cui segue che che $\dot{u} = 0$ su tutto I perché A è denso in I e $\dot{u}$ è continua. Dunque u è costante, e il fatto che $u(1) = 0$ implica che u è nulla.
Dimostro l'implicazione "solo se" per assurdo, supponendo che A non sia denso in I. Se così fosse dovrebbe esistere un intervallo J contenuto in I tale che $a \geq 0$ su J, e presa quindi una funzione $u \in X$ non identicamente nulla con supporto contenuto in J, la formula (5) implicherebbe $\langle Tu\,;\,u\rangle \leq 0$, in contraddizione con l'ipotesi che T sia definita positiva.

5. Per ogni $m = 1, 2, \dots$ pongo

$$f_m := f\,1_{E_1\cup\cdots\cup E_m}\,. \tag{6}$$

Allora le funzioni f_m convergono puntualmente a f su E e

$$\int_E f_m\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{E_m} f\,dx\,,$$

per cui la tesi diventa

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f_m\,dx = \int_E f\,dx\,. \tag{7}$$

a) Se la funzione f è positiva, allora, la funzioni f_m sono positive e convergono a f crescendo, e quindi la (8) segue dal teorema di convergenza dominata.

[1] Noto che l'ipotesi che A sia denso e la continuità di a implicano che $a \leq 0$ ovunque.

b) Si tratta di un caso particolare del punto c).

c) Indichiamo con $f^\pm$ le parti positive e negative di f, e definiamo $f_m^\pm$ come in (6), con $f^\pm$ al posto di f. Per via del punto a) abbiamo che

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f_m^+ \, dx = \int_E f^+ \, dx \,, \quad \lim_{m\to\infty} \int_E f_m^- \, dx = \int_E f^- \, dx \,. \tag{8}$$

Siccome f è integrabile su E, almeno uno dei due limiti è finito, e quindi posso sommare i due limiti e scambiare la somma con il limite ottenendo la (8).

6. Al solito, per ogni t indico con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier (complessi) della soluzione $u(t,\cdot)$ e ottengo che le funzioni c_n devono soddisfare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot y + (n^2-3)y = 0 \\ y(0) = c_n^0 \,, \ \dot y(0) = 0 \end{cases}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0. Un semplice calcolo dà

$$c_n(t) = \begin{cases} c_n^0 \cosh\big(\sqrt{3-n^2}\, t\big) & \text{per } n = 0, \pm 1, \\ c_n^0 \cos\big(\sqrt{n^2-3}\, t\big) & \text{per } n \ne 0, \pm 1, \end{cases}$$

e quindi l'eventuale soluzione del problema $(*)$ è data dalla serie

$$u(t,x) = \sum_{n=0,\pm1} c_n^0 \cosh\big(\sqrt{3-n^2}\, t\big)\, e^{inx} + \sum_{n\ne 0,\pm1} \underbrace{c_n^0 \cos\big(\sqrt{n^2-3}\, t\big)\, e^{inx}}_{u_n} \,. \tag{9}$$

a) Se $u_0(x) = \cos x = \frac12 (e^{ix} + e^{-ix})$ allora $c_{\pm1}^0 = \frac12$ e $c_n^0 = 0$ per ogni $n \ne \pm 1$, e quindi la formula (9) si riduce a

$$u(t,x) = \cosh\big(\sqrt2\, t\big)\, \cos(x) \,,$$

e chiaramente questa funzione risolve il problema $(*)$.

b) Se u_0 è una funzione 2π-periodica di classe C^3 allora i suoi coefficienti di Fourier soddisfano

$$\sum_n n^2 \big|c_n^0\big| < +\infty \,. \tag{10}$$

Usando questa stima faccio vedere che la formula (9) definisce una funzione u di classe C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che risolve $(*)$. Divido la dimostrazione in più passi.

Passo 1. La prima somma in (9) è finita, e chiaramente definisce una funzione di classe C^∞; per far vedere che u è una funzione di classe C^2 mi basta far vedere che la seconda somma in (9), quella infinita, converge totalmente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e convergono totalmente anche le serie delle derivate di ordine 1 o 2. In effetti un semplice calcolo mostra che per ogni n

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t,x} \big| c_n^0 \cos\big(\sqrt{n^2-3}\, t\big)\, e^{inx} \big| = \big|c_n^0\big| \,,$$

e anzi per ogni coppia di interi $h, k = 0, 1, \dots$ si ha

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_\infty = (n^2-3)^{h/2} |n|^k \big|c_n^0\big| \le |n|^{k+h} \big|c_n^0\big| \,,$$

e quindi la tesi segue dalla stima (10).

Passo 2. La funzione u soddisfa le condizioni al bordo in $(*)$ perché è 2π-periodica in x, e soddisfa le condizioni iniziali in $(*)$ perchè per $t=0$ il lato destro della (9) si riduce alla serie di Fourier di u_0, mentre le derivate in t di tutti gli addendi sono identicamente nulle.

Passo 3. La funzione u soddisfa l'equazione differenziale in $(*)$ perchè la soddisfano tutti gli addendi che appaiono nel lato destro della (9), e per via della convergenza dimostrata al passo 1 posso scambiare derivate e integrali.

Per concludere l'esercizio osservo che la seconda somma in (9) definisce una funzione limitata (Passo 1) e quindi la soluzione u è limitata se e solo se la prima somma in (9) è limitata. Chiaramente questo succede se

$$c_n^0 = 0 \quad \text{per } n = 0, \pm 1, \tag{11}$$

e questa condizione è anche necessaria perché le funzioni $\cosh\big(\sqrt3\, t\big)$ e $\cosh\big(\sqrt2\, t\big)$ tendono a $+\infty$ per $t \to \pm\infty$, e la prima è di un ordine di infinito superiore alla seconda.

7. Utilizzando il fatto che $\mathscr{F}\big(1/(1+x^2)\big) = \pi e^{-|y|}$ e che $\mathscr{F}(u*u) = \hat{u}^2$, l'equazione

$$u * u = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{12}$$

può essere riscritta come

$$\hat{u}^2 = \pi e^{-|y|}\,, \tag{13}$$

nel senso che ogni funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ che soddisfa la (12) deve necessariamente soddisfare la (13) e per l'iniettività della TdF vale anche il viceversa.

a) In particolare u risolve (13) se

$$\hat{u} = \sqrt{\pi} e^{-|y|/2}\,,$$

e siccome

$$\pi e^{-|y/2|} = \mathscr{F}\Big(\sigma_{1/2}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)\Big) = \mathscr{F}\Big(\frac{2}{1+4x^2}\Big)\,,$$

una soluzione di (12) è data da

$$u(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{1+4x^2}\,.$$

b) Detta u la soluzione trovata al punto a), si vede subito che anche $-u$ è una soluzione di (12). Voglio far vedere che non ci sono altre soluzioni: risolvendo l'equazione (13) per ogni $y \in \mathbb{R}$ ottengo

$$\hat{u}(y) = \sqrt{\pi} e^{-|y|/2} g(y)\,, \tag{14}$$

dove g è una qualunque funzione (misurabile) su $\mathbb{R}$ con valori ± 1. Ma se u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{u}$ è una funzione continua, e quindi anche

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{|y|/2}\,\hat{u}(y)$$

è una funzione continua, e pertanto deve essere la funzione costante 1 oppure la funzione costante -1. Quindi l'equazione (12) ammette al più due soluzioni.

c) Se $u \in L^2(\mathbb{R})$ allora la funzione $\hat{u}$ non è necessariamente continua, e quindi l'argomento usato al punto b) non è più valido. Anzi, siccome la funzione $e^{-|y|/2}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e la TdF è una bigezione da $L^2(\mathbb{R})$ in sé, ogni funzione della forma

$$u(x) = \mathscr{F}^{-1}\big(\sqrt{\pi} e^{-|y|/2} g(y)\big) \tag{15}$$

con g funzione (misurabile) arbitraria a valori ± 1 appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e risolve l'equazione (12), Siccome u non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, quest'ultima affermazione va verificata: in effetti è ovvio che u risolve la (7.2), e applicando ad entrambi i termini di questa equazione l'anti-trasformata $\mathscr{F}^*$ ottengo la (7.1).[2]

L'equazione (12) ha dunque infinite soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$.

8. a) Usando le coordinate sferiche ottengo

$$\|f\|_{L^p(B)} = \int_B \frac{dx}{|x|^p} = 4\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{d-2}}$$

e dunque f appartiene a $L^p(B)$ se e solo se $p < 3$.

Analogamente si dimostra che f appartiene a $L^p(\mathbb{R}^3 \setminus B)$ se e solo se $p > 3$ (incluso $p = +\infty$). In particolare f non appartiene a $L^p(\mathbb{R}^3)$ per alcun p.

b) Scompongo f come $f = g_1 + g_2$ con $g_1 := f \cdot 1_B$ e $g_2 := f \cdot 1_{\mathbb{R}^3 \setminus B}$. Poiché u ed g_1 appartengono a $L^1(\mathbb{R}^3)$ il prodotto di convoluzione $u * g_1(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}^3$, nel senso che l'integrale che lo definisce esiste ed è finito. Poiché inoltre g_2 appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}3)$, il prodotto $u * g_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. Da queste due affermazioni segue che $u * f(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}^3$ e vale $u * g_1(x) + u * g_2(x)$.

c) Indico con A^c il complementare di A in $\mathbb{R}^3$, e per ogni $r > 0$ indico con A_r l'insieme dei punti $x \in A$ tali che $\operatorname{dist}(x, A^c) > r$, e pongo

$$f_r := f \cdot 1_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,r)}\,.$$

[2] In questo passaggio ho usato il seguente fatto, visto a lezione per $\mathscr{F}$: date $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R})$ allora il prodotto $u_1 u_2$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}^*(u_1 u_2) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^*(u_1) * \mathscr{F}^*(u_2)$.

Osservo ora che per ogni $x \in A_r$ vale che

$$u * f(x) = \int_{A^c} u(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{A^c} u(y)\, f_r(x-y)\, dy = u * f_r(x)\,. \tag{16}$$

(Nel primo e terzo passaggio ho usato che $u(y) = 0$ per q.o. $y \in A$, nel secondo passaggio ho usato che per ogni $x \in A_r$ e $y \in A^c$ si ha $|x - y| > r$ e quindi $f(x - y) = f_r(x - y)$.)
Siccome la funzione f_r appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, il prodotto $u * f_r(x)$ è ben definito e continuo per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, e di conseguenza la (16) implica che anche $u * f(x)$ è ben definito e continuo per ogni x in A_r. Per concludere basta osservare che l'unione di tutti gli aperti A_r con $r > 0$ è proprio A.

c) Dimostro che $u * f$ la proprietà della media su A. Prendo una palla chiusa $B' = B(x_0, r)$ contenuta in A ed osservo che

$$\begin{aligned}\fint_{B'} u * f(x)\, dx &= \fint_{B'} \left(\int_{A^c} u(y)\, f(x-y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{A^c} u(y) \left(\fint_{B'} f(x-y)\, dx \right) dy = \int_{A^c} u(y) \left(\fint_{B''_y} f(z)\, dz \right) dy \end{aligned} \tag{17}$$

dove $B''_y := B(x_0 - y, r)$. (Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, che giustifico dopo, e nel terzo il cambio di variabile $z = x - y$).
Osservo ora che per ogni $y \in A^c$ si ha $|x_0 - y| > r$, quindi la palla B''_y non contiene l'origine, e siccome la funzione f è armonica su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ha la proprietà della media su B''_y, cioè

$$\fint_{B''_y} f(z)\, dz = f(x_0 - y)\,.$$

Inserendo questa uguaglianza nella (17) ottengo infine

$$\fint_{B'} u * f(x)\, dx = \int_{A^c} u(y)\, f(x_0 - y)\, dy = u * f(x_0)\,,$$

e la proprietà della media è dimostrata.
Per giustificare l'uso del teorema di Fubini in (17), prendo $\rho > 0$ tale che $\operatorname{dist}(x_0, A^c) = r + \rho$, e osservo che per ogni $x \in B' = B(x_0, r)$ si ha $\operatorname{dist}(x, A^c) \geq \rho$, e quindi per ogni $y \in A^c$ si ha $|x - y| \geq \rho$, che a sua volta implica $f(x - y) \leq 1/\rho$. Pertanto

$$\int_{A^c} \big|u(y)\big| \left(\fint_{B'} f(x-y)\, dx \right) dy \leq \frac{1}{\rho} \int_{A^c} \big|u(y)\big|\, dy \leq \frac{\|u\|_1}{\rho} < +\infty\,.$$

Commenti

- Esercizio 2. Nella soluzione sopra $\hat{u}(y)$ è stata calcolata solo per $y \leq 0$, usando poi che $\hat{u}$ è funzione pari per ottenere la formula per $y > 0$. Tuttavia è possibile calcolare direttamente $\hat{u}(y)$ anche per $y > 0$: in questo caso il cammino γ_r a cui si applica il teorema dei residui è quello che parametrizza *in senso orario* il bordo del semidisco D_r dato dall'intersezione del semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) < 0\}$ con il disco di centro 0 e raggio r. Così facendo si ottiene:

  $$\hat{u}(y) = -2\pi i \sum_{i=3,4} \operatorname{Res}(f, z_i)\,,$$

  dove $z_{3,4}$ sono i poli di f nel semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) < 0\}$, vale a dire $z_{3,4} = \pm 1 - i$.
  Molti dei presenti hanno scritto la formula con il segno opposto (forse dimenticando che in questo caso γ_r percorre D_r in senso orario e non antiorario). Questo errore poteva essere rilevato, perché dà luogo a una funzione $\hat{u}$ discontinua in 0 (mentre le TdF di funzioni : L^1 sono sempre continue).

- Esercizio 2. Una soluzione alternativa parte dall'identità

  $$\frac{4x}{x^4+4} = \frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}\,.$$

Usando infatti le formule $\mathscr{F}(v(x-h)) = e^{ihy}\,\hat{v}(y)$ e

$$\mathscr{F}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \pi e^{-|y|}$$

ottengo la TdF di $x/(x^4+4)$. Usando poi la formula $\mathscr{F}(-ix\,v(x)) = \hat{v}'(y)$ ottengo infine la TdF di $x^2/(x^4+4)$.

- Esercizio 4. Molti dei presenti hanno scritto le caratterizzazioni richieste ai punti a) e b) correttamente, ma stranamente hanno fatto vedere solo alcune delle implicazioni necessarie a dimostrare queste caratterizzazioni.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno omesso di dimostrato solo che la seconda somma nella formula (9) converge totalmente, ma non che convergono le serie delle derivate. Questo basta a dimostrare che un'eventuale soluzione u del problema $(*)$ è limitata se e solo se vale la (11), ma non basta a dimostrare che u esiste per tutti i tempi (cosa che è necessaria per risolvere completamente l'esercizio).

- Esercizio 7b). Diversi dei presenti hanno scritto che l'equazione (12) ha un'unica soluzione, dimenticando per qualche fatale istante che ogni numero diverso da zero ammette due radici quadrate. . .