1. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) := \dfrac{\sin(2x)}{1+x^2}$.

2. Tra tutti i polinomi p di grado minore o uguale a due trovare quello che minimizza la distanza dalla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi,\pi)$.

3. Sia Ω l'insieme del punti (x,y) tali che $x > 0$ e $0 < y < x^2$. Dire per quali $p \in [1,+\infty)$ la funzione $f(x,y) := 1/\sqrt{x^2+y^2}$ appartiene a $L^p(\Omega)$.

4. Dire per quali $a \neq 0$ la funzione $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := |x|^a$ è armonica.

5. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $x^k u \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ Dimostrare che la TdF $\hat{u}$ è una funzione di classe C^∞ e calcolarne la serie di Taylor (formale) in 0.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0$ e dalla la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0$.
   a) Dimostrare che (P) ammette al più una soluzione su $[0,T) \times [0,\pi]$ per ogni $T > 0$.[1]
   b) Dire sotto quali ipotesi (su u_0) (P) ammette una soluzione, e discuterne le regolarità.
   c) Cosa si può dire sulla risolubilità *nel passato* di (P)?

7. Dimostrare la seguente variante del teorema di convergenza dominata: sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$ e siano $u_n : E \to \mathbb{R}$ e $v_n : E \to [0,+\infty)$ due successioni di funzioni misurabili tali che u_n converge q.o. a u, v_n converge a v in $L^1(E)$, e $|u_n| \leq v_n$ q.o. per ogni n; allora
$$\lim_{n\to\infty} \int_E u_n \, dx = \int_E u \, dx \, .$$

8. Sia $I := [0,1]$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia T l'operatore che ad ogni funzione misurabile $u : I \to \mathbb{R}$ associa la funzione composta $f \circ u$. Dimostrare quanto segue:
   a) Se $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$ allora T porta $L^p(I)$ in sé per ogni $p \in [1,+\infty)$.
   b) Se f è Lipschitziana allora T porta $L^p(I)$ in sé ed è Lipschitziana.
   c) Se non vale l'ipotesi al punto a) allora T non porta $L^p(I)$ in sé per alcun $p \in [1,+\infty)$.
   d) Se vale l'ipotesi al punto a) allora $T : L^p(I) \to L^p(I)$ è continua.

[1] Al solito, per soluzione intendo una funzione u continua che sia anche di classe C^1 in t e C^2 in x per $t > 0$, e che risolve l'equazione per $t > 0$.

1. Ricordo i seguenti fatti noti a proposito della Trasformata di Fourier:
   - $\mathscr{F}\big(\frac{1}{1+x^2}\big) = \pi\, e^{-|y|}$;
   - $\mathscr{F}(e^{iax}v) = \hat{v}(y-a)$ per ogni funzione $v \in L^1(\mathbb{R})$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

   Utilizzando queste formule e l'identità $\sin(2x) = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})$ ottengo
$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{1}{2i}\mathscr{F}\bigg(\frac{e^{2ix}}{1+x^2}\bigg) - \frac{1}{2i}\mathscr{F}\bigg(\frac{e^{-2ix}}{1+x^2}\bigg)\\ &= \frac{\pi}{2i}e^{-|y-2|} - \frac{\pi}{2i}e^{-|y+2|} = \frac{\pi i}{2}\big(e^{-|y+2|} - e^{-|y-2|}\big)\,.\end{aligned}$$

2. Sia X il sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ formato dai polinomi p di grado minore o uguale a due, vale a dire il sottospazio generato dalle funzioni 1, x e x^2. Dalla teoria so che l'elemento di X più vicino ad una data funzione u è la sua proiezione ortogonale su X, indicata con $P_X u$. Per determinare $P_X u$ uso la caratterizzazione $u - P_X u \perp X$, vale a dire $\langle u - P_X u\,;\, x^i\rangle = 0$ per $i = 0,1,2$. In particolare per $u(x) := \sin x$ scrivo $P_X u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e determino i coefficienti a_i risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:
$$0 = \langle u - P_X u\,;\, x^i\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\big)x^i\, dx \quad \text{per } i = 0,1,2,$$
   vale a dire
$$\begin{cases} 0 = 2\pi a_0 + \frac{2\pi^3}{3}a_2 \\ 0 = 2\pi + \frac{2\pi^3}{3}a_1 \\ 0 = \frac{2\pi^3}{3}a_0 + \frac{2\pi^5}{5}a_2 \end{cases},$$
   da cui ottengo infine $a_0 = a_2 = 0$ e $a_1 = 3/\pi^2$. Dunque il polinomio cercato è
$$p(x) = \frac{3x}{\pi^2}\,.$$

3. Calcolo la norma $\|f\|_p$ usando le coordinate polari. Osservo per cominciare che le coordinate polari dei punti sulla parabola di equazione $y = x^2$, sono date da
$$\rho = x\sqrt{1+x^2}\,, \quad \theta = \arctan x\,,$$
   vale a dire, $\rho = r(\theta)$ dove
$$r(\theta) := \tan\theta\,\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,,$$
   e quindi Ω consiste dei punti (x,y) le cui coordinate polari soddisfano $0 < \theta < \pi/2$ e $\rho > r(\theta)$. Pertanto
$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\bigg(\int_{r(\theta)}^{+\infty}\frac{1}{\rho^{p-1}}d\rho\bigg)\, d\theta\,.$$
   Osservo ora che per $p \le 2$ l'integrale più interno nell'ultimo termine di questa catena di uguaglianze vale $+\infty$ per ogni θ, e quindi $\|f\|_p = +\infty$. Se invece $p > 2$ allora
$$\|f\|_p^p = \frac{1}{p-2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\big(r(\theta)\big)^{p-2}}\,.$$
   Siccome questo integrale è improprio solo in 0 e $r(\theta) \sim \theta$ per $\theta \to 0$, $\|f\|_p^p$ si comporta come l'integrale improprio
$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\theta^{p-2}}\,,$$
   che è finito se e solo se $p < 3$.

   Riassumendo, $f \in L^p(\Omega)$ se e solo se $2 < p < 3$.

4. Per ogni $i = 1,\dots,d$ ho
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg(\sum_{j=1}^d x_j^2\bigg)^{a/2} = a x_i\bigg(\sum_{j=1}^d x_j^2\bigg)^{a/2-1}\,,$$

quindi
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = a\Big(\sum_{j=1}^d x_j^2\Big)^{a/2-1} + a(a-2)x_i^2\Big(\sum_{j=1}^d x_j^2\Big)^{a/2-2} = a|x|^{a-4}\big(|x|^2+(a-2)x_i^2\big)\,,$$
e infine
$$\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = a|x|^{a-4}\big(d|x|^2+(a-2)|x|^2\big) = a(d+a-2)\,|x|^{a-2}\,.$$
Dunque f è armonica per $a = d-2$.

5. Ricordo il seguente fatto noto sulla Trasformata di Fourier: se $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è una funzione in L^1 tale che $xu\in L^1$, allora $\hat u$ è una funzione di classe C^1 con derivata
$$D\hat u = \mathscr{F}(-ixu)\,.$$
Applicando induttivamente questo risultato si ottiene che se $x^k u\in L^1$ per ogni k allora $\hat u$ è di classe C^∞ e
$$D^k\hat u = \mathscr{F}\big((-ix)^k u\big) \quad \text{per ogni } k.$$
In particolare
$$\big[D^k\hat u\big](0) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k u(x)\,dx\,,$$
e quindi la serie di Taylor di u in 0 è
$$\sum_{k=0}^\infty a_k x^k \quad \text{con} \quad a_k := \frac{1}{k!}\int_{\mathbb{R}}(-ix)^k u(x)\,dx\,.$$

6. La risoluzione segue lo schema standard e quindi tengo i commenti al minimo.

a) Considero una soluzione u del problema (P) su $[0,T)\times[0,\pi]$ e come al solito indico con $b_n(t)$ i coefficienti della rappresentazione della funzione $u(t,\cdot)$ in serie di seni, vale a dire
$$b_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\sin(nx)\,dx$$
per ogni $n=1,2,\dots$ e ogni $t\in[0,T)$. Osservo quindi che per $t>0$
$$\begin{aligned} b_n'(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{8t^3}{\pi}\int_0^\pi u_{xx}(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{8t^3n^2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\sin(nx)\,dx = -4t^3n^2\,b_n(t)\,. \end{aligned}$$
(Nel primo passaggi ho usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e il fatto che u è di classe C^1 in t su $(0,T)\times[0,\pi]$, nel secondo ho usato che u soddisfa l'equazione $u_t = 4t^3u_{xx}$, nel terzo ho integrato per parti due volte usando la condizione al bordo $u(t,0)=u(t,\pi)=0$.)
Dunque b_n risolve (sull'intervallo $[0,T)$) il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot y = -4t^3n^2y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases} \tag{1}$$
dove b_n^0 sono i coefficienti della serie in seni del dato iniziale u_0. Siccome la soluzione di questo problema di Cauchy è univocamente determinata, anche u è univocamente determinata.

b) e c) Per ogni $n=1,2,\dots$ la soluzione del problema di Cauchy (1) è
$$b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2t^4}\,,$$
e quindi la soluzione di (P) dovrebbe essere data dalla formula
$$u(t,x) := \sum_{n=1}^\infty \underbrace{b_n^0\,e^{-n^2t^4}\sin(nx)}_{u_n} \tag{2}$$

Siccome ogni funzione u_n risolve l'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$ su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e soddisfa le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, mi resta solo da verificare che la funzione u è ben definita e ha la dovuta regolarità, almeno sotto opportune ipotesi sul dato iniziale u_0.
In effetti dimostrerò che se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^0| < +\infty \tag{3}$$

allora la funzione u è ben definita e continua su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e di classe C^∞ per $t \neq 0$, vale a dire sull'aperto $A := (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$. In particolare questo dimostra che (P) è risolubile sia nel passato che nel futuro, e che la soluzione è continua e di classe C^∞ per $t \neq 0$.
Per cominciare osservo che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |b_n^0|\,,$$

e dunque l'ipotesi (3) implica che la serie delle funzioni (continue) u_n converge totalmente su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, da cui segue che u è ben definita e continua (e limitata) su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Fisso ora due interi $h, k \geq 0$ e $\delta > 0$, e pongo

$$A_\delta := \big\{(t,x)\colon \delta < |t| < 1/\delta\big\}\,.$$

Osservo quindi che per k pari vale

$$D_t^h D_x^k u_n(t,x) = b_n^0\, P_h(n,t)\, e^{-n^2t^4}(-n^2)^k \sin(nx)$$

dove P_h è un polinomio di grado $2h$ in n e $3h$ in t (la formula per k dispari è simile, ma con $\cos(nx)$ al posto di $\sin(nx)$). Pertanto esiste una costante $C_{\delta,h}$ tale che

$$\|D_t^k D_x^h u_n\|_{L^\infty(A_\delta)} \leq C_{\delta,h}\, n^{2h+2k} e^{-n^2\delta^4}\,,$$

e quindi la serie delle derivate parziali $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su A_δ. Siccome questo vale per ogni h, k, δ, la funzione u è di classe C^∞ su A_δ, e quindi anche sull'unione degli aperti A_δ, che è appunto A.

7. Dimostro prima l'enunciato sotto l'ipotesi aggiuntiva che v_n converge a v q.o. in E. La dimostrazione segue quella del teorema di convergenza dominata.
Applicando il lemma di Fatou alle funzioni $v_n + u_n$, che sono positive e convergono q.o. a $u+v$, ottengo

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E v_n + u_n\, dx \geq \int_E v + u\, dx$$

L'ipotesi che $v_n \to v$ in $L^1(E)$ implica che gli integrali su E delle funzioni v_n sono tutti finiti e convergono all'integrale di v, che è pure finito, e quindi posso spezzare ciascuno degli integrali nella formula precedente come somma di due integrali, uno per ogni addendo della funzione integranda, e la disuguaglianza diventa

$$\lim_{n\to\infty} \int_E v_n\, dx + \liminf_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx \geq \int_E v\, dx + \int_E u\, dx\,,$$

da cui segue che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx \geq \int_E u\, dx\,.$$

Applicando invece lemma di Fatou alle funzioni $v_n - u_n$ ottengo

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx \leq \int_E u\, dx\,.$$

Concludo la dimostrazione mettendo insieme le disuguaglianze nelle ultime due formule.

Dimostro ora l'enunciato senza ipotesi aggiuntive. Per farlo uso questa osservazione elementare: *data una successione di numeri reali x_n (che saranno poi gli integrali di u_n) ed un numero x tale che da ogni sottosuccessione di x_n posso estrarre una sotto-sottosuccessione che converge a x, allora tutta la successione x_n converge a x.*
Osservo quindi che data una qualunque sottosuccessione di n, posso estrarre una sotto-sottosuccessione tale che v_n converge a v q.o. (ricordo che v_n converge a v in L^1) e ho dimostrato sopra che per questa sotto-sottosuccessione gli integrali di u_n convergono all'integrale di u.

8. a) L'ipotesi su f equivale a dire che esistono M, m positivi e finiti tali che $|f(t)| \leq M|t|$ per ogni t con $|t| \geq m$. Inoltre $|f|$ è continua, ed è quindi maggiorata da una qualche costante M' sull'intervallo $[-m, m]$, e quindi

$$|f(t)| \leq M' + M|t| \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Data allora una funzione misurabile $u : I \to \mathbb{R}$ vale che

$$|Tu(x)| \leq M' + M\,|u(x)| \quad \text{per ogni } x \in I, \tag{4}$$

e usando la disuguaglianza triangolare per la norma L^p,

$$\|Tu\|_p \leq \big\|M' + M|u|\big\|_p \leq \big\|M'\big\|_p + \big\|M|u|\big\|_p \leq M' + M\|u\|_p\,.$$

Pertanto $u \in L^p(I)$ implica $Tu \in L^p(I)$.

b) Detta L la costante di Lipschitz di f ho che $|f(t) - f(0)| \leq L|t|$, quindi $|f(t)| \leq |f(0)| + L|t|$, in particolare f soddisfa l'ipotesi del punto a) e dunque T porta $L^p(I)$ in sé. Presi inoltre u_1, $u_2 \in L^P(I)$ ho che

$$\begin{aligned}\big\|Tu_1 - Tu_2\big\|_p^p &= \int_I \big|f(u_1(x)) - f(u_2(x))\big|^p dx \\ &\leq \int_I L^p\big|u_1(x) - u_2(x)\big|^p dx = L^p\|u_1 - u_2\|_p^p\,,\end{aligned}$$

e dunque T è una mappa da $L^p(I)$ in sé con costante di Lipschitz minore o uguale a L.

c) Se non vale l'ipotesi al punto a) allora esiste una successione di numeri reali t_n tale che $|t_n|$ e il rapporto $|f(t_n)|/|t_n|$ convergono a $+\infty$. Passando ad un'opportuna sottosuccessione posso supporre che per ogni $n = 1, 2, \ldots$ vale

$$|t_n| \geq 2^n\,, \quad |f(t_n)| \geq 2^n|t_n|\,. \tag{5}$$

Voglio ora usare i valori t_n per costruire una funzione $u \in L^p(I)$ tale che $Tu \notin L^p(I)$. Per farlo pongo

$$a_n := \frac{1}{2^n|t_n|^p}\,, \tag{6}$$

e prendo una successione di intervalli I_n che sono disgiunti, contenuti in I, e con lunghezza a_n. (Posso trovare tali intervalli a patto che la somma degli a_n sia minore della lunghezza di I, che è 1; questa condizione è verificata perché $a_n < 1/2^n$.) Pongo infine

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} t_n 1_{I_n}\,.$$

Usando la (6) ottengo

$$\|u\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p|I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,,$$

e quindi u appartiene a $L^p(I)$. Usando la (5) e la (6) ottengo

$$\|Tu\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p|I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(t_n)|^p}{2^n|t_n|^p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(p-1)} = +\infty\,,$$

e quindi Tu non appartiene a $L^p(I)$.

d) Presa una successione u_n che converge a u in $L^p(I)$, devo far vedere che Tu_n converge a Tu in $L^p(I)$. Dimostro questo fatto sotto l'ipotesi aggiuntiva che u_n converge a u q.o. in I; il caso generale lo si ottiene procedendo come nella soluzione dell'esercizio precedente.
Posto

$$w_n(x) := \big|Tu_n(x) - Tu(x)\big|^p = \big|f(u_n(x)) - f(u(x))\big|^p\,,$$

devo dimostrare che $\int_I w_n\, dx$ tende a 0.
Siccome u_n converge a u q.o. ed f è continua ho che w_n converge a 0 q.o., e per concludere uso la variante del teorema di convergenza dominata vista nell'esercizio precedente: devo quindi trovare una successione di funzioni v_n (le dominazioni) che convergono in $L^1(I)$ e

soddisfano $|w_n| \leq v_n$. Osservo dunque che

$$\begin{aligned}|w_n(x)| &\leq \Big(\big|f(u_n(x))\big| + \big|f(u(x))\big|\Big)^p \\ &\leq \Big(2M' + M\,|u_n(x)| + M\,|u(x)|\Big)^p \\ &\leq \Big(2M' + 2M\,|u(x)| + M\,|u_n(x) - u(x)|\Big)^p \\ &\leq \underbrace{(6M')^p + (6M)^p|u(x)|^p + (3M)^p|u_n(x) - u(x)|^p}_{v_n(x)} .\end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato la disuguaglianza $|a - b| \leq |a| + |b|$, che vale per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, nel secondo ho usato la (4), nel quarto la disuguaglianza $(a + b + c)^p \leq 3^p(a^p + b^p + c^p)$, che vale per ogni $a, b, c \geq 0$; infine noto che le funzioni v_n convergono in $L^1(I)$ alla funzione $v(x) := (6M')^p + (6M)^p|u(x)|^p$.)

Commenti

- Esercizio 1. Qualcuno dei presenti ha calcolato direttamente la TdF di u usando il metodo dei residui, ma senza accorgersi che l'estensione olomorfa della funzione $\sin(2x)$, vale a dire

$$\sin(2z) := \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} ,$$

non è limitata su piano complesso $\mathbb{C}$ (e anzi non è limitata né sul semipiano inferiore né su quello superiore).

- Esercizio 3. Molti dei presenti hanno risolto questo esercizio in modo completamente diverso da quello illustrato sopra. Per esempio, le stime

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + x^4}} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{x}$$

permettono facilmente dimostrare che f è in $L^p(\Omega \cap B)$, dove B è il disco di centro $(0, 0)$ e raggio 1, se e solo se $p < 3$. Usando invece le coordinate polari e le inclusioni

$$\big\{(x, y)\colon \rho \geq 1\,,\ 0 < \theta < \pi/4\big\} \subset \Omega \setminus B \subset \big\{(x, y)\colon \rho \geq 1\,,\ 0 < \theta < \pi/2\big\}$$

si dimostra facilmente che $f \in L^p(\Omega \setminus B)$ se e solo se $p > 2$.

- Esercizio 4. Con mia grande sorpresa, due terzi dei dei presenti non ha fatto questo esercizio oppure ha sbagliato il calcolo (del tutto elementare) delle derivate parziali della funzione f.

- Esercizio 6. L'ipotesi (3) è soddisfatta se u_0 è una funzione di classe C^1 su $[0, \pi]$. Questa affermazione può essere dimostrata in modo simile all'analogo enunciato per la serie di Fourier. In alternativa, ci si può ricondurre all'enunciato per la serie di Fourier estendendo f a tutto $[-\pi, \pi]$ per disparità (cioè ponendo $f(x) := -f(-x)$ per $x \in [-\pi, 0)$), e poi a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. La funzione così estesa è di classe C^1 e quindi i suoi coefficienti di Fourier c_n soddisfano $\sum_n |c_n| < +\infty$, e un semplice calcolo mostra che $b_n^0 = -2ic_n$.

- Esercizio 6c). La risolubilità del problema (P) nel passato equivale a quella nel futuro: si vede infatti che se $u(t, x)$ risolve l'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$ allora $u(-t, x)$ risolve la stessa equazione (e chiaramente soddisfa le stesse condizioni iniziali e le stesse condizioni al bordo). Pertanto, avendo dimostrato che (P) è risolubile su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ si ottiene automaticamente che è risolubile anche su $(-\infty, 0] \times [0, \pi]$, e che la soluzione è una funzione pari nella variabile t (per via dell'unicità).

- Esercizio 6. Nel dimostrare che la soluzione u data dalla formula (2) è di classe C^∞ per $t \neq 0$, la quasi totalità dei presenti ha usato formule completamente sbagliate per le derivate parziali della funzione $e^{-n^2t^4}\sin(nx)$, ed in particolare per le derivate parziali nella variabile t, per esempio $D_t^h\big(e^{-n^2t^4}\sin(nx)\big) = (-4n^2t^3)^h e^{-n^2t^4}\sin(nx)$.

- Esercizio 7. Molti dei presenti hanno risolto l'esercizio assumendo (senza dichiararlo esplicitamente!) che le funzioni v_n convergono a v q.o., e non solo in L^1. Altri hanno invece ottenuto la convergenza puntuale che gli serviva passando ad una sottosuccessione. In entrambi casi la dimostrazione è stata considerata incompleta, anche se di poco.

- Esercizio 7. Diversi dei presenti hanno utilizzato (implicitamente) la seguente proprietà del liminf:
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \,,$$
che però è falsa. Quella che vale sempre è la disuguaglianza $\geq$ (che non serve nella dimostrazione), mentre l'uguaglianza vale se uno dei due liminf è un limite (ed è esattamente questo che si usa).

- Esercizio 8a). Quasi nessuno dei presenti ha scritto che la condizione $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$ significa che esistono m, M tali che $|f(t)| \leq M|t|$ se $|t| \geq m$. Alcuni hanno scritto che esiste M tale che $|f(t)| \leq M|t|$ per ogni t (falso); altri hanno scritto che esistono i limiti per $t \to \pm\infty$ del rapporto $|f(t)|/|t|$.

- Esercizio 8b). Quasi nessuno dei presenti ha notato esplicitamente che se è f Lipschitziana allora $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$.