1. Dire per quali $p \geq 1$ e $a \geq 0$ la funzione $f(x_1, x_2) := \dfrac{x_1^a}{x_1^4 + x_2^4}$ appartiene a $L^p(Q)$ dove Q è il quadrato $Q := (0,1)^2$.

2. Calcolare la serie di Fourier di $f(x) := \dfrac{1}{2 - e^{ix}}$.

3. Sia $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ una funzione di classe C^1 tale che u e ∇u appartengono a $L^1(\mathbb{R}^d)$. Esprimere le trasformate di Fourier di ∇u e $\operatorname{div} u$ in funzione della trasformata di u.[1]

4. Sia X l'insieme delle funzioni u in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ con integrale 0.
   a) Dimostrare che la chiusura di X in $L^1(\mathbb{R})$ è il sottospazio Y delle funzioni con integrale 0.
   b) Qual è la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$?

5. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(t, 0) = 0$ e $u(t, \pi) = \pi t^2$ e la condizione iniziale $u(0, x) = 0$.
   a) Discutere l'unicità della soluzione.
   b) Discutere l'esistenza della soluzione.

6. Consideriamo lo spazio di Hilbert complesso $L^2 = L^2_{\mathbb{C}}([0, \pi])$, il sottospazio X delle funzioni $u : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^1 tali che $u(0) = u(\pi)$, e l'operatore $T : X \to L^2$ dato da $T : u \mapsto i\dot{u}$.
   a) Dimostrare che T è autoaggiunto.
   b) Discutere la segnatura di T.
   c) Trovare una base di Hilbert di L^2 composta di autovettori di T.

7. Fissata una funzione pari $g \in L^1(\mathbb{R})$ considero la forma quadratica F su $L^2(\mathbb{R})$ data da
$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^2} g(h)\, u(x - h)\, u(x)\, dx\, dh\,.$$
   a) Dimostrare che $F(u)$ è ben definita per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$;
   b) Scrivere $F(u)$ in funzione della trasformata di Fourier di u;
   c) Trovare ipotesi su g che garantiscono che F è definita positiva.

8. In $\mathbb{R}^2$ sia D la corona circolare (chiusa) con centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2, e siano S_1 ed S_2 le circonferenze con centro l'origine e raggi 1 e 2 rispettivamente, vale a dire le due componenti connesse di ∂D. Date u_1 e u_2 funzioni di classe C^1 definite su S_1 e S_2 rispettivamente, trovare la funzione continua $u : D \to \mathbb{R}$ tale che $u = u_1$ su S_1, $u = u_2$ su S_2, e u è armonica all'interno di D.

[1] Per le funzioni a valori vettori o matrici la trasformata di Fourier viene calcolata componente per componente.

1. Indico con B il quarto di cerchio dato dall'intersezione di Q con il cerchio di centro l'origine e raggio 1; siccome la funzione $|f|^p$ ha sempre integrale finito su $Q \setminus B$ ne segue che f appartiene a $L^p(Q)$ se e solo se appartiene a $L^p(B)$. Osservo poi che, usando le coordinate polari (e il teorema di Fubini),

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(B)} &= \int_B \frac{x_1^{pa}}{(x_1^4 + x_2^4)^p}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4}\!\!\int_0^1 \frac{(\rho\cos\theta)^{pa}}{\big((\rho\cos\theta)^4 + (\rho\sin\theta)^4\big)^p}\, \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \underbrace{\bigg(\int_0^{\pi/4} \frac{(\cos\theta)^{pa}}{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)^p}\, d\theta\bigg)}_{I} \underbrace{\bigg(\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p(4-a)-1}}\bigg)}_{II} . \end{aligned}$$

Osservo ora che l'integrale I è sempre finito e strettamente positivo perché la funzione integranda è bene definita, continua, positiva e non identicamente nulla su tutto l'intervallo $[0, \pi/4]$. Ne segue che f appartiene a $L^p(B)$, ovvero a $L^p(Q)$, se e solo se l'integrale II è finito, vale a dire se e solo se $p(4-a) < 2$, ovvero se e solo se $a > 4 - 2/p$.
Volendo includere anche il caso $p = +\infty$, si vede subito che $f \in L^\infty(Q)$ se e solo se $a \geq 4$.

2. Ricordo che

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| < 1,$$

e la serie converge totalmente su ogni insieme $\{z \colon |z| \leq m\}$ con $m < 1$. Ne segue che

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{ix}/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^{n+1}} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$ e quindi converge anche in $L^2(-\pi, \pi)$; quest'ultima osservazione dimostra che quella scritta sopra è anche la serie di Fourier di f.

3. Comincio con un lemma: *dato $j = 1, \dots, d$ e data $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ funzione di classe C^1 tale che v e la derivata parziale $D_j v$ appartengono a $L^1(\mathbb{R}^d)$, allora*

$$\widehat{D_j v}(y) = i y_j\, \widehat{v}(y) \quad \textit{per ogni } y \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Dimostro questa formula per $j = 1$, riconducendomi all'analogo risultato in dimensione 1. Comincio con l'osservare che per ogni $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ la funzione di una variabile $w_{x'}(x_1) := v(x)$ è di classe C^1; inoltre, per via del teorema di Fubini, $w_{x'}$ e $\dot{w}_{x'}$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, e quindi

$$\widehat{\dot{w}_{x'}}(y_1) = i y_1\, \widehat{w_{x'}}(y_1) \quad \text{per ogni } y_1 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Preso $y \in \mathbb{R}^d$ e posto $y' := (y_2, \dots, y_d)$ ho che

$$\begin{aligned} \widehat{D_1 v}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} D_1 v(x)\, e^{-iy\cdot x}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} D_1 v(x_1, x')\, e^{-iy_1 x_1} dx_1\bigg) e^{-iy'\cdot x'}\, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \dot{w}_{x'}(x_1)\, e^{-iy_1 x_1} dx_1\bigg) e^{-iy'\cdot x'}\, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i y_1 \bigg(\int_{\mathbb{R}} w_{x'}(x_1)\, e^{-iy_1 x_1} dx_1\bigg) e^{-iy'\cdot x'}\, dx' \\ &= i y_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} v(x_1, x')\, e^{-iy_1 x_1} dx_1\bigg) e^{-iy'\cdot x'}\, dx' \\ &= i y_1 \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\, e^{-iy\cdot x}\, dx = i y_1 \widehat{v}(y)\, . \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini e l'identità $e^{-iy\cdot x} = e^{-iy_1 x_1}\, e^{-iy'\cdot x'}$, nel terzo l'identità $D_1 v(x_1, x') = \dot{w}_{x'}(x_1)$, nel quarto l'identità (2), nel quinto la definizione di $w_{x'}$, e infine nel sesto di nuovo Fubini e l'identità $e^{-iy\cdot x} = e^{-iy_1 x_1}\, e^{-iy'\cdot x'}$.)

Utilizzando la formula (1) ottengo subito che

$$\widehat{\nabla u} = i\,\widehat{u} \otimes y\,, \quad \widehat{\operatorname{div} u} = i\,\widehat{u} \cdot y\,.$$

(Ricordo che dati a, b vettori, $a \otimes b$ è la matrice con componenti $(a \otimes b)_{jk} = a_j b_k$.)

4. a) Ricordo che

$$I : u \mapsto \int_{\mathbb{R}} u\, dx$$

è un funzionale lineare continuo su $L^1(\mathbb{R})$, quindi $Y = I^{-1}(0)$ è un sottospazio chiuso di $L^1(\mathbb{R})$, e pertanto la chiusura di X deve essere contenuta in Y.

Resta da dimostrare l'inclusione opposta, vale a dire che per ogni funzione $u \in Y$ esiste una successione di funzioni $u_n \in X$ che converge a u in $L^1(\mathbb{R})$. Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ (fatto noto), posso trovare una successione $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ che converge a u in $L^1(\mathbb{R})$, e la voglio modificare in modo da ottenere una successione du funzioni con integrale nullo. Per farlo scelgo una funzione $w \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $I(w) = 1$ e pongo

$$u_n := v_n - I(v_n)\, w\,.$$

È chiaro che u_n appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$I(u_n) = I(v_n) - I(v_n)\, I(w) = 0\,,$$

ovvero u_n appartiene a X. Inoltre, siccome $I(v_n)$ converge a $I(u) = 0$,

$$\big\| I(v_n)\, w \big\|_1 = |I(v_n)|\, \|w\|_1 \to 0\,,$$

da cui segue che u_n converge a u in $L^1(\mathbb{R})$.

b) Dimostro che la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$ è tutto lo spazio, ovvero che X è denso in $L^2(\mathbb{R})$. Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$ (fatto noto) mi basta dimostrare che X è denso in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ rispetto alla norma L^2. Data dunque $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, prendo la funzione w come sopra e per ogni $\delta > 0$ pongo

$$u_\delta := u - I(u)\, w_\delta \quad \text{dove} \quad w_\delta(x) := \delta\, w(\delta x)\,.$$

È chiaro che u_δ appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R})$, e siccome $I(w_\delta) = I(w) = 1$ (si tratta di un semplice cambio di variabile nell'integrale) allora

$$I(u_\delta) = I(u) - I(u)\, I(w_\delta) = 0\,,$$

ovvero u_δ appartiene a X. Infine u_δ converge a u in norma L^2 per $\delta \to 0$ perchè $\|w_\delta\|_2 \to 0$ (anche questo segue da un semplice cambio di variabile).

5. Scrivo u in funzione di una nuova incognita v scelta in modo che le condizioni al bordo in (P) si trasformino in $v(t, 0) = v(t, \pi) = 0$ e v soddisfi sempre l'equazione del calore. Una possibilità è prendere

$$u(t, x) = v(t, x) + tx + g(x)$$

con g scelta in modo tale che

- $g(0) = g(\pi)$, in modo che v soddisfi $v(t, 0) = v(t, \pi) = 0$;
- $\ddot{g}(x) = x$, in modo che v soddisfi $v_t = v_{xx}$.

Si vede subito che una funzione g che soddisfa queste condizioni è

$$g(x) := \frac{x^3 - \pi^2 x}{6}\,.$$

Usando il cambio di variabile summenzionato ottengo che in effetti v risolve il problema (P') dato dall'equazione $v_t = v_{xx}$ con le condizioni al bordo $v(t, 0) = v(t, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0, x) = -g(x)$.

Discutere l'unicità e l'esistenza per il problema (P) equivale a discuterle per il problema (P'), cosa che farò in seguito.

a) *Unicità.* Sia $v : [0,T) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, di classe C^1 in t e C^2 in x su $(0,T) \times [0,\pi]$, che risolve (P'). Scrivo $v(t,\cdot)$ in serie di $\sin(nx)$ per ogni $t \in [0,T)$, vale a dire

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b(t)\,\sin(nx) \quad \text{con} \quad b(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(t,x)\,\sin(nx)\,dx\,.$$

La funzione b_n è continua su $[0,T)$, differenziabile su $(0,T)$, e la derivata vale

$$\begin{aligned} b_n'(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_t(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_{xx}(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{2n^2}{\pi}\int_0^{\pi} v(t,x)\,\sin(nx)\,dx = -n^2 b_n(t)\,. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, nel secondo ho usato che $v_t = v_{xx}$, nel terzo ho applicato la formula di integrazione per parti per due volte, tenendo conto delle condizioni al bordo soddisfatte da v.)
Infine $b_n(0)$ sono i coefficienti della serie in $\sin(nx)$ di $-g(x)$, vale a dire

$$b_n(0) = -\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}\,.$$

(Ho calcolato l'integrale integrandolo per parti tre volte.)
Dunque la funzione b_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = -n^2 y \\ y(0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} \end{cases} \tag{3}$$

e quindi è univocamente determinata. Ne segue che anche v è univocamente determinata.
b) Risolvendo il problema (3) ottengo

$$b_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n^2 t}\,,$$

e quindi la soluzione v dovrebbe essere data da

$$v(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n^2 t}\sin(nx)}_{v_n(t,x)}\,. \tag{4}$$

Trattandosi dell'equazione del calore, mi aspetto che la soluzione esista per tutto l'intervallo temporale $[0,+\infty)$; verifico in effetti che la funzione v data sopra

(i) è ben definita e continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$;
(ii) è di classe C^1 in x su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$;
(iii) è di classe C^2 in x e di classe C^1 in t su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, e soddisfa l'equazione $v_t = v_{xx}$;
(iv) soddisfa le condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = -g(x)$.

Per dimostrare l'enunciato (i) osservo che le funzioni v_n in (4) sono di classe C^∞ e soddisfano

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n^3}\,,$$

e quindi la serie in (4) converge totalmente su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
Per dimostrare (ii) osservo che le derivate parziali $(v_n)_x$ sono

$$(v_n)_x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\,e^{-n^2 t}\cos(nx)\,,$$

quindi

$$\big\|(v_n)_x\big\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n^2}\,,$$

da cui segue che la serie delle $(v_n)_x$ converge totalmente su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e di conseguenza u è di classe C^1 in x su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Per dimostrare (iii) osservo che

$$(v_n)_t = (v_n)_{xx} = \frac{2(-1)^n}{n}\, e^{-n^2 t}\sin(nx)\,,$$

quindi per ogni $\delta > 0$ vale che

$$\big\|(v_n)_t = (v_n)_{xx}\big\|_{L^\infty([\delta,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n}\, e^{-n^2\delta}\,,$$

da cui segue che la serie delle derivate parziali $(v_n)_t = (v_n)_{xx}$ converge totalmente su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$, e di conseguenza u è di classe C^2 in x e C^1 in t su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. La convergenza totale implica inoltre che $v_t = v_{xx}$.
L'enunciato (iv) è immediato.

6. a) Presi $u, v \in X$ ho che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_0^\pi i\dot u\,\bar v\,dt = \Big|iu\,\bar v\Big|_0^\pi - \int_0^\pi iu\,\dot{\bar v}\,dt = \int_0^\pi u\,\overline{i\dot v}\,dt = \langle u\,;\,Tv\rangle\,.$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti; nel terzo ho usato il fatto che $u(0) = u(\pi)$ e $v(0) = v(\pi)$ per far vedere che il termine "di bordo" dell'integrazione per parti è nullo, e l'identità $\dot{\bar v} = \bar{\dot v}$.)

c) Gli autovettori di T sono soluzioni non banali sull'intervallo $[0,\pi]$ del problema

$$\begin{cases} i\dot u = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) \end{cases} \tag{5}$$

(la condizione al bordo esprime il fatto che u appartiene a X). Le soluzioni dell'equazione differenziale in (5) sono della forma

$$u(t) = \alpha e^{-i\lambda t} \quad \text{con } \alpha\in\mathbb{C},$$

e per $\alpha\neq 0$ la condizione al bordo in (5) è soddisfatta se e solo se $1 = e^{-i\lambda\pi}$, ovvero $\lambda = 2k$ con $k\in\mathbb{Z}$. Pertanto una famiglia di autovettori di T con norma L^2 uguale a 1 è

$$\mathscr{F} := \Big\{\tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ikt} : k\in\mathbb{Z}\Big\}\,;$$

trattandosi di autovettori corrispondenti ad autovalori differenti queste funzioni sono automaticamente a due a due ortogonali, e quindi $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale in L^2.
Per vedere che $\mathscr{F}$ è un sistema ortornormale completo, e quindi una base di Hilbert, basta procedere come per la base utilizzata nella serie di Fourier, osservando che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è una sotto-algebra delle funzioni continue $C(K,\mathbb{C})$ dove K è lo spazio ottenuto identificando gli estremi dell'intervallo $[0,\pi]$, inoltre $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è chiusa per coniugio e separa i punti di K e pertanto il teorema di Stone–Weierstrass ci dice che è densa in $C(K,\mathbb{C})$; partendo da quest'ultimo fatto si ottiene che è densa anche in $L^2(0,\pi)$.

b) Per quanto visto al punto precedente T ha sia autovalori positivi, che negativi che nulli, e quindi non è semidefinito (né negativo né positivo).

7. a) Devo far vedere che la funzione $g(h)\,u(x-h)\,u(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Osservo dunque che detto $\langle\cdot\,;\,\cdot\rangle$ il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\big|g(h)\,u(x-h)\,u(x)\big|\,dx\,dh &= \int_{\mathbb{R}}\bigg(\int_{\mathbb{R}}|g(h)|\,|u(x-h)|\,dh\bigg)|u(x)|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\big(|g| * |u|(x)\big)\,|u(x)|\,dx \\ &= \big\langle |g| * |u|\,;\,|u|\big\rangle \le \big\||g| * |u|\big\|_2\,\big\||u|\big\|_2 \le \|g\|_1\,\|u\|_2^2 < +\infty\,.\end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato il teorema di Fubini per funzioni positive, nel quarto la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in L^2, nel quinto la stima per la norma del prodotto di convoluzione di una funzione L^2 e di una funzione L^1.)

b) Ripetendo i passaggi fatti al punto precedente ottengo che $F(u) = \langle g * u\,;\, u\rangle$ e quindi

$$F(u) = \langle g * u\,;\, u\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{g * u}\,;\, \hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{g}\,\hat{u}\,;\, \hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)\,|\hat{u}(y)|^2\,dy\,.$$

(Nel secondo passaggio ho usato il fatto che la TdF è un'isometria su $L^2(\mathbb{R})$ a meno di un fattore $1/(2\pi)$, nel terzo ho usato la formula per la TdF del prodotto di convoluzione–quest'ultima è stata dimostrata a lezione per fattori in L^1 ma può essere facilmente estesa per densità anche al caso in cui uno dei fattori è in L^1 e l'altro in L^2.)

c) Utilizzando la formula ottenuta al punto precedente si vede che T è definito positivo se $\hat{g}$ è reale e strettamente positiva (ricordo che $\hat{g}$ è una funzione continua a valori complessi).

8. Come fatto nel caso in cui D è un disco, identifico $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$ e cerco la soluzione u tra le funzioni che si scrivono come somma di una funzione olomorfa e di una funzione anti-olomorfa definite sulla corona circolare D. Ricordo inoltre che tali funzioni si scrivono in serie di Laurent, cioè come serie in z^n e $\bar{z}^n$, rispettivamente, con n che varia in $\mathbb{Z}$. In altre parole cerco u della forma [2]

$$u(z) := a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} b_n \bar{z}^{-n}\,. \tag{6}$$

Scrivo quindi le funzioni $u_1(e^{i\theta})$ e $u_2(2e^{i\theta})$ in serie di Fourier, cioè

$$u_1(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{1,n}e^{in\theta}\,, \quad u_2(2e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n}e^{in\theta}\,,$$

e ricordo che essendo u_1 e u_2 funzioni di classe C^1, le due serie convergono totalmente, cioè

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{1,n}| < +\infty\,, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{2,n}| < +\infty\,. \tag{7}$$

Osservo quindi che le identità $u_1 = u$ su S_1 e $u_2 = u$ su S_2 si riscrivono come $u_1(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta})$ e $u_2(2e^{i\theta}) = u(2e^{i\theta})$ per ogni θ, ovvero

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{1,n}e^{in\theta} &= a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} (a_n + b_n)e^{in\theta}\,,\\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n}e^{in\theta} &= a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} (2^n a_n + 2^{-n} b_n)e^{in\theta}\,,\end{aligned}$$

e dunque sono implicate dal (e in effetti sono equivalenti al) seguente sistema di equazioni nelle incognite a_n e b_n:

$$c_{1,0} = c_{2,0} = a_0\,, \quad c_{1,n} = a_n + b_n\,, \quad c_{2,n} = 2^n a_n + 2^{-n} b_n \quad (\text{per ogni } n\neq 0).$$

Suppongo ora che $c_{1,0} = c_{2,0}$ (il caso $c_{1,0} \neq c_{2,0}$ lo considero dopo). In questo caso il sistema sopra è risolubile e le soluzioni sono

$$a_0 = c_{1,0} = c_{2,0}\,, \quad a_n = \frac{2^n c_{2,n} - c_{1,n}}{4^n - 1}\,, \quad b_n = \frac{4^n c_{1,n} - c_{2,n}}{4^n - 1}\,.$$

Resta da verificare che con questi coefficienti le due serie di Laurent in (6) convergono totalmente su D; questo implica automaticamente che le due serie definiscono funzioni continue su D e olomorfe/anti-olomorfe all'interno di D, e che quindi la funzione u è definita e continua su D e armonica all'interno di D. Mi limito alla prima delle due serie (la seconda è analoga):

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \|a_n z^n\|_{L^\infty(D)} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4^n}{4^n-1}|c_{2,n}| + \frac{2^n}{4^n-1}|c_{1,n}|\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2^n}{4^n-1}|c_{2,-n}| + \frac{4^n}{4^n-1}|c_{1,-n}|\Big)\,,\end{aligned}$$

e la finitezza delle ultime due serie segue dalle stime in (7).

Infine nel caso in cui $c_{1,0} \neq c_{2,0}$ modifico la formula (6) che definisce la funzione u aggiungendo $c\log|z|$, con c da scegliere opportunamente (ricordo che $\log|z|$ è una funzione armonica).

[2] La scelta dell'esponente $-n$ invece di n nella seconda serie è stata fatta solo per semplificare alcune formule in seguito.

Commenti

- Esercizio 2. Molti dei presenti hanno semplicemente scritto $f(x)$ come serie, senza preoccuparsi di spiegare in che senso la serie converge e perché dovrebbe essere la serie di Fourier, ma anche se non sembra, quest'ultimo passaggio richiede una qualche spiegazione (si pensi solo che è possibile trovare una serie $\sum c_n e^{inx}$ con coefficienti non tutti nulli che converge puntualmente a 0 per quasi ogni x—chiaramente la successione dei coefficienti c_n non appartiene a ℓ^2 e tale serie non è la serie di Fourier della funzione 0).
Ciò premesso, questo errore non è stato considerato grave.

- Esercizio 3. Diversi dei presenti hanno scritto formule più o meno giuste per le TdF di ∇u e $\operatorname{div} u$, senza però dare alcuna dimostrazione, neanche parziale. (Ho apprezzato le poche dimostrazioni date, anche quelle parziali.)

- Esercizio 4a). Molti dei presenti hanno dimostrato che la chiusura di X è contenuta in Y (cosa che peraltro segue immediatamente dalla continuità dell'integrale) ma non che i due insiemi coincidono, che invece era la parte significativa di questo esercizio.

- Esercizio 4a). Diversi dei presenti hanno scritto che se una successione di funzioni $u_n \in L^1(\mathbb{R})$ converge quasi ovunque ad una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale $\int_{\mathbb{R}} u_n\, dx$ converge a $\int_{\mathbb{R}} u\, dx$ per convergenza dominata; in particolare alcuni hanno anche specificato che la dominazione usata è $|u| + |u_n|$, mentre una dominazione non può dipendere da n. Si tratta di un errore grave.

- Esercizio 4b). Alcuni dei presenti hanno dimostrato il risultato facendo vedere che la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$ contiene la base di Haar di $L^2(\mathbb{R})$. C'è però problema: la dimostrazione del fatto che la base di Haar è una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$ è stata solo accennata a lezione e quindi non può essere data per scontata; in particolare visto che uno dei punti chiave, che è anche il punto chiave di questo esercizio, era stato omesso.

- Esercizio 5. La maggior parte dei presenti ha utilizzato un cambio di variabile diverso da quello proposto sopra ma molto naturale, vale a dire
$$u(t,x) = v(t,x) + xt\,,$$
riducendosi a discutere il problema (P'') dato dall'equazione $v_t = v_{xx} - x$ con le condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = 0$.
Siccome la rappresentazione della funzione $-x$ in serie di $\sin(nx)$ ha coefficienti $a_n = \frac{2(-1)^n}{n}$, scrivendo $v(t,\cdot)$ in serie di $\sin(nx)$ come sopra si ottiene quindi che i coefficienti $b_n(t)$ risolvono l'equazione differenziale $\dot y = -n^2 y + a_n$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$, e dunque
$$b_n(t) = \frac{a_n}{n^2}\big(1 - e^{-n^2 t}\big) = \frac{2(-1)^n}{n^3}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\,.$$
In particolare b_n è univocamente determinata, e lo stesso vale per la soluzione v. Per quanto riguarda l'esistenza, la soluzione dovrebbe essere data dalla serie
$$v(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^n}{n^3}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\sin(nx)}_{v_n(t,x)}\,.$$
In effetti è facile verificare che v è una funzione ben definita e continua su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, soddisfa le condizioni al bordo e la condizione iniziale in (P''), è di classe C^1 in x su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, ed è di classe C^1 in t su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Il problema è far vedere che v è anche di classe C^2 in x su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e soddisfa l'equazione $v_t = v_{xx} - x$, infatti non si vede come dimostrare la convergenza uniforme della serie delle derivate seconde
$$(v_n)_{xx} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\sin(nx)\,.$$

Un modo per aggirare questo problema consiste nell'osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x)\,,$$

cosa che si può intuire osservando che, formalmente, la derivata seconda della serie a sinistra dell'uguale è la serie della funzione x, mentre $g(x) := \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x)$ è l'unica funzione tale che $\ddot{g}(x) = x$ e $g(0) = g(\pi) = 0$.
Pertanto conviene definire v in modo leggermente diverso, vale a dire

$$v(t,x) := g(x) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{w(t,x)}\ .$$

Ora è facile vedere che la serie a destra dell'uguale definisce una funzione w che è continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, C^1 in t e C^2 in x su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, e soddisfa $w_t = w_{xx}$; dunque v ha la stessa regolarità di w e soddisfa $v_t = w_t = w_{xx} = v_{xx} - \ddot{g} = v_{xx} - x$.

- Esercizio 5b). Diversi dei presenti che hanno usato l'approccio illustrato al punto precedente, messi davanti al fatto che la serie delle derivate parziali $(v_n)_{xx}$ non converge totalmente hanno concluso erroneamente che la soluzione v non esiste. L'unica dimostrazione di non esistenza che mi viene in mente consiste nel far vedere che i coefficienti della derivata seconda v_{xx}, vale a dire $-n^2 b_n(t)$, non sono in ℓ^2 per alcun $t > 0$. Ma questa dimostrazione non si applica a questo caso, visto che $-n^2 b_n(t) = O(1/n)$.

- Esercizio 5b). Quasi tutti i presenti che hanno affrontato questo esercizio hanno ottenuto una formula che esprime la soluzione v come una serie di funzioni regolari v_n, e hanno quindi dovuto dimostrare che v ha la regolarità necessaria e risolve effettivamente l'equazione alle derivate parziali in oggetto. Diversi dei presenti hanno cercato di dimostrare tale regolarità a partire dalla convergenza *puntuale* della serie delle derivate parziali rilevanti (vale a dire $(v_n)_t$, $(v_n)_x$, $(v_n)_{xx}$), oppure da una convergenza che è uniforme/totale nella variabile x, ma non in t. Come già spiegato in precedenza, questo approccio è completamente errato.

- Esercizio 6c). Per dimostrare che $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale completo si può anche osservare che il cambio di variabile $t = \frac{1}{2}(x+\pi)$ porta $x \in [-\pi,\pi]$ in $t \in [0,\pi]$ e trasforma (per composizione) $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$ in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, portando la funzione $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ikt}$ in $\mathscr{F}$ nella funzione $\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} e^{ikx}$. Dunque $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ viene portato nei polinomi trigonometrici, che com'è noto sono densi in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$; ne segue che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ deve essere denso in $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$.

- Esercizio 6. Nell'affrontare i punti b) e c) molti dei presenti si sono dimenticati che le funzioni u in X devono soddisfare la condizione al bordo $u(0) = u(\pi)$. In particolare alcuni hanno detto che un sistema ortornormale di autovettori di T è dato (a meno di opportune rinormalizzazioni) dalle funzioni e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$: questo è errato per due ragioni: la prima è che per k dispari queste funzioni non appartengono a X e quindi non possono essere autovettori di T, la seconda è che queste funzioni non sono a due a due ortogonali in $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$, anche se lo sono in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$.

- Esercizio 7c). Alcuni dei presenti si sono chiesti se la condizione $\hat{g}$ reale e positiva è necessaria oltre che sufficiente, concludendo erroneamente che lo è. L'errore è piuttosto nascosto, ed è legato al fatto che se u è una funzione in L^2 a valori reali allora $|\hat{u}|$ è una funzione pari. In particolare, contrariamente a quanto sostenuto da costoro, dato un insieme E di misura finita non è sempre possibile trovare una funzione reale u tale che $|\hat{u}| = 1_E$.