1. Sia X il sottospazio delle funzioni u in $L^2([0,2])$ tali che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$. Determinare $X^\perp$ e le proiezioni ortogonali di una generica $u \in L^2([0,2])$ su X e su $X^\perp$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := xe^{-|x|}$.

3. Detto X lo spazio delle funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitate e misurabili, dotato della norma L^1, consideriamo l'applicazione $T : X \times X \to \mathbb{R}$ data da $T(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1 f_2 \, dx$.

   a) Dimostrare che T è ben definita e separatamente continua in ciascuna variabile.

   b) Dimostrare che T non è continua.

4. a) Trovare una funzione v su $\mathbb{R}^2$ tale che $\Delta v(x) = 4$.

   b) Risolvere l'equazione $\Delta u(x) = 4$ sul disco D di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$, con la condizione al bordo $u(e^{it}) = |t|$ per $-\pi \le t \le \pi$.

5. a) Scrivere la funzione $u_0(x) := 2 - 16 \cos^2 x \sin^2 x$ in serie di Fourier.

   b) Risolvere il problema (P) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_{tt} + 4u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità $u(t, -\pi) = u(t, \pi)$ e $u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi)$, e le condizioni iniziali $u(0, \cdot) = u_0$ e $u_t(0, \cdot) = 0$.

   c) Dire per quali dati iniziali u_0 la soluzione di (P) esiste per ogni $t \ge 0$, e per quali tende uniformemente a 0 per $t \to +\infty$.

6. Fissato $a > 0$ consideriamo la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_a(x) := 1/|x|^a$ se $-1 \le x \le 1$ e $x \ne 0$, e $f_a(x) := 0$ altrimenti.

   a) Dire per quali $p \in [1, \infty)$ si ha che $f_a \in L^p(\mathbb{R})$.

   b) Dire per quali a la funzione $f_a * f_a$ è continua e limitata. (Notare che siccome f_a è positiva, $f_a * f_a$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ha valori in $[0, +\infty]$.)

7. Dato E insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ e $1 \le p_1 \le p_2 \le +\infty$, per ogni funzione misurabile u su E poniamo
$$\|u\|_X := \inf \left\{ \|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2} : u = u_1 + u_2 \right\},$$
ed indichiamo con $X = X(E, p_1, p_2)$ lo spazio delle u tali che $\|u\|_X < +\infty$. Nel caso $p_2 < +\infty$ consideriamo inoltre la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(t) := |t|^{p_1} \wedge |t|^{p_2}$ dove $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Dimostrare quanto segue (supponendo $p_2 < +\infty$ tranne che per a)):

   a) $\|\cdot\|_X$ è una norma su X (avendo identificato le funzioni che coincidono q.o.);

   b) esiste una costante C tale che $g(t_1 + t_2) \le C\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

   c) $u \in X$ se e solo se $\int_E g(u(x)) \, dx < +\infty$;

   d) se $|E| < \infty$ allora $X = L^{p_1}$ e la una norma $\|\cdot\|_X$ equivale alla norma $\|\cdot\|_{p_1}$;

   e) lo spazio X con la norma $\|\cdot\|_X$ è completo.

8. a) Far vedere che è possibile definire la Trasformata di Fourier come applicazione lineare e continua da $X := X(\mathbb{R}, 1, 2)$ in $X' := X(\mathbb{R}, 2, \infty)$ che coincide con le definizioni già viste su L^1 e su L^2.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $u(x) := |x|^{-a} \in X(\mathbb{R}, 1, 2)$.

   c) Per gli a come sopra, dimostrare che $\hat{u}(y) = b|y|^{-c}$ per opportuni b, c.

1. L'insieme $X^\perp$ consiste delle funzioni $v \in L^2([0,2])$ tali che per ogni $u \in X$ vale
$$0 = \langle u\,;\, v\rangle = \int_0^2 uv\,dx = \int_1^2 uv\,dx\,. \tag{1}$$
Siccome la restrizione di u a $[1,2]$ è un arbitraria funzione L^2 ottengo che la (1) vale per ogni $u \in X$ se e solo se $v(x) = 0$ per q.o. $x \in [1,2]$, ovvero
$$X^\perp = \big\{v \in L^2([0,2])\colon v(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in [1,2]\big\}\,.$$
Ciò detto, è immediato vedere che le proiezioni ortogonali di $u \in L^2([0,2])$ su X e $X^\perp$ sono rispettivamente $u \cdot 1_{[1,2]}$ e $u \cdot 1_{[0,1]}$.

2. Ricordo i seguenti fatti noti: la TdF di $e^{-|x|}$ è $2/(1+y^2)$, e per ogni $u \in L^1$ con $xu \in L^1$ si ha che $\widehat{-ix\,u} = (\hat u)'$, vale a dire $\widehat{x\,u} = i(\hat u)'$. Pertanto
$$\widehat{xe^{-|x|}} = i\Big(\widehat{e^{-|x|}}\Big)' = 2i\Big(\frac{1}{1+y^2}\Big)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\,.$$

3. a) Che T sia ben definita è ovvio, perchè $f_1 f_2$ è una funzione misurabile limitata e quindi è integrabile su $[0,1]$. La continuità di T nella prima variabile segue dalla stima
$$\big|T(f_1,f_2)\big| \le \int_0^1 |f_1|\,|f_2|\,dx \le \|f_2\|_\infty\,\|f_1\|_1\,,$$
e la continuità di T nella seconda variabile segue dal fatto che è simmetrica.
b) Prendo la seguente successione di funzioni:
$$f_n := \sqrt{n}\cdot 1_{[0,\,1/n]}\,.$$
Si vede subito che $\|f_n\|_1 = 1/\sqrt{n}$ e quindi $f_n \to 0$ in X, ma d'altra parte $T(f_n,f_n) = 1$ e quindi non tende a $T(0,0) = 0$.

4. a) Basta prendere $v(x) := |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.
b) Utilizzando il cambio di variabile $u = v + w$, mi riconduco a risolvere l'equazione $\Delta w = 0$ con la condizione al bordo $w(e^{it}) = |t| - 1$. Per farlo scrivo la funzione $w_0(t) := |t| - 1$ in serie di Fourier: i coefficienti di Fourier di w_0 sono
$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t - 1\,dt = \frac{\pi}{2} - 1\,,$$
e per $n \ne 0$,
$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,\cos(nt)\,dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.}\end{cases}$$
Siccome $c_n = O(1/n^2)$, ho che $\sum |c_n| < +\infty$ e dunque
$$w_0(t) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\dots}\frac{e^{int} + e^{-int}}{n^2} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{e^{int}}{n^2}\Bigg)\,,$$
e la serie converge totalmente. Pertanto la funzione armonica w con $w(e^{-it} = w_0(t)$ è data da
$$w(x) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{x^n}{n^2}\Bigg)\,,$$
e la serie converge totalmente sulla $\overline{D} = \{x\colon |x| \le 1\}$. Infine la soluzione u del problema originale è
$$u(x) = v(x) + w(x) = |x|^2 + \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{x^n}{n^2}\Bigg)\,.$$

5. a) $u_0(x) := 2 - 16\cos^2 x\,\sin^2 x = 2 - \big(2\sin(2x)\big)^2 = 2 + \big(e^{2ix} - e^{-2ix}\big)^2 = e^{4ix} + e^{-4ix}$.

b) Scrivendo l'eventuale soluzione u in serie di Fourier rispetto alla variabile x, cioè

$$u(t,x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\, e^{inx}\,, \tag{2}$$

ottengo che i coefficienti di $u_t(t,\cdot)$, $u_{tt}(t,\cdot)$ e $u_{xx}(t,\cdot)$ sono rispettivamente $\dot{c}_n(t)$, $\ddot{c}_n(t)$ e $-n^2 c_n(t)$, e quindi le funzioni c_n dovrebbero soddisfare il problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + n^2 y = 0\,, \quad y(0) = c_n^0\,, \quad \dot{y}(0) = 0\,, \tag{3}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0.
Per via del punto a) ho che $c_n^0 = 1$ per $n = \pm 4$ e $c_n^0 = 0$ altrimenti, e quindi un semplice calcolo mostra che le soluzioni c_n di (3)

$$c_n(t) = \begin{cases} e^{-2t}\big(\cos\big(\sqrt{12}\,t\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\big(\sqrt{12}\,t\big)\big) & \text{se } n = \pm 4, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque, ricordando la (2), la soluzione u dovrebbe essere

$$u(t,x) = 2\cos(4x)\, e^{-2t}\big(\cos\big(\sqrt{12}\,t\big) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\big(\sqrt{12}\,t\big)\big)\,,$$

e in effetti è immediato verificare che questa funzione risolve (P) su $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$.

c) Riparto dal problema di Cauchy (3), osservando che le soluzioni dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale $\ddot{y} + 4\dot{y} + n^2 y = 0$ sono

$$\lambda_{1,2}^n = \begin{cases} -2 \pm \sqrt{4 - n^2} & \text{se } |n| \le 2, \\ -2 \pm i\omega_n & \text{con } \omega_n := \sqrt{n^2 - 4} \text{ se } |n| > 2; \end{cases} \tag{4}$$

un semplice calcolo mostra allora che per $|n| > 2$ la soluzione c_n di (3) è

$$c_n(t) = c_n^0\, e^{-2t}\Big(\cos(\omega_n t) + \frac{2}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\Big)\,.$$

Dunque la soluzione u di (P) dovrebbe essere

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t,x) \tag{5}$$

dove $u_n(t,x) := c_n(t)\, e^{inx}$; in particolare per $|n| > 2$ ho che

$$u_n(t,x) = c_n^0\, e^{inx}\, e^{-2t}\Big(\cos(\omega_n t) + \frac{2}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\Big)\,. \tag{6}$$

Usando questa formula e il fatto che $\omega_n \sim |n|$ per $n \to \pm\infty$ ottengo le seguenti stime asintotiche per la norma del sup su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ di u_n e delle sue derivate parziali del primo e secondo ordine:

$$\|u_n\|_\infty \sim |c_n^0|\,, \quad \|(u_n)_t\|_\infty \sim \|(u_n)_x\|_\infty \sim |n c_n^0|\,, \quad \|(u_n)_{tt}\|_\infty \sim \|(u_n)_{xx}\|_\infty \sim |n^2 c_n^0|\,.$$

Pertanto, facendo l'ipotesi che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n^0| < +\infty\,, \tag{7}$$

ottengo che la serie di funzioni in (5) converge totalmente su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con tutte le derivate parziali del primo e secondo ordine, e quindi u è una funzione di classe C^2 su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, 2π-periodica nella variabile x, che risolve il problema (P).

Studio adesso il comportamento della soluzione u per $t \to +\infty$. Per ogni n con $|n| > 2$ ho che $\omega_n \ge 2$ e utilizzando la formula (6) ottengo

$$\|u_n(t,\cdot)\|_\infty \le 2|c_n^0|\, e^{-2t}\,,$$

e tenendo conto del fatto che $\sum |c_n| < +\infty$ è finita,

$$\sum_{|n|>2} \|u_n(t,\cdot)\|_\infty \le 2\Big(\sum_{|n|>2} |c_n^0|\Big) e^{-2t} = O(e^{-2t})\,.$$

In particolare la funzione

$$\tilde{u}(t,x) := \sum_{|n|>2} u_n(t,x)$$

tende a zero per $t \to +\infty$, uniformemente in x.
Considero ora il comportamento individuale dei rimanenti addendi della serie che definisce la soluzione u, vale a dire u_n con $n = 0, \pm1, \pm2$. Per $n = \pm1, \pm2$ le soluzioni $\lambda^n_{1,2}$ dell'equazione caratteristica date in (4) sono reali e strettamente negative; quindi i coefficienti $c_n(t)$, essendo combinazioni lineari di $e^{\lambda_1^n t}$ ed $e^{\lambda_2^n t}$, tendono a 0 per $t \to +\infty$, e pertanto $u_n(t,x) = c_n(t)\, e^{inx}$ tende a 0 uniformemente in x. Invece per $n = 0$ si ha che $c_0(t) = c_0$ e quindi $u_0(t,x) = c_0$.
Mettendo insieme quanto detto otteniamo che, per $t \to +\infty$, la soluzione $u(t,x)$ tende a c_0 uniformemente in x; in particolare tende a 0 (uniformemente in x) se e solo se $c_0 = 0$.

6. a) Osservo che la norma

$$\|f_a\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_a(x)|^p\, dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{ap}}$$

è finita se e solo se $ap < 1$, e dunque $f_a \in L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $a < 1$ e $1 \le p < 1/a$.
b) Se $a < 1/2$ allora $2 < 1/a$ e dunque $f_a \in L^2$, e in tal caso, per quanto visto a lezione $f_a * f_a$ è una funzione continua e limitata (anzi, infinitesima all'infinito). Invece per $a \ge 1/2$ ho che

$$f_a * f_a(0) = \int_{\mathbb{R}} f_a(0-t) f_a(t)\, dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}} = +\infty\,,$$

e quindi $f_a * f_a$ non è una funzione limitata.

7. a) *La funzione $\|\cdot\|_X$ è 1 omogenea.* Data u funzione misurabile su E, $\lambda \ne 0$, e u_1, u_2 funzioni misurabili su E tali che $u = u_1 + u_2$, ho che

$$\|\lambda u\|_X = \|\lambda u_1 + \lambda u_2\|_X \le \|\lambda u_1\|_{p_1} + \|\lambda u_2\|_{p_2} = |\lambda|\big(\|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big)$$

e prendendo l'inf su tutte le coppie u_1, u_2 ammissibili ottengo

$$\|\lambda u\|_X \le |\lambda|\, \|u\|_X\,.$$

Applicando questa stessa disuguaglianza con λu al posto di u e $1/\lambda$ ottengo

$$\|u\|_X \le \frac{1}{|\lambda|}\, \|\lambda u\|_X\,,$$

che insieme alla stima precedente dà

$$\|\lambda u\|_X = |\lambda|\, \|u\|_X\,.$$

La funzione $\|\cdot\|_X$ è subadditiva. Prese u, v funzioni misurabili su E e u_1, u_2, v_1, v_2 funzioni misurabili su E tali che $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$ ho che

$$\begin{aligned}\|u+v\|_X &= \|(u_1+v_1) + (u_2+v_2)\|_X \\ &\le \|u_1+v_1\|_{p_1} + \|u_2+v_2\|_{p_2} \\ &\le \big(\|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big) + \big(\|v_1\|_{p_1} + \|v_2\|_{p_2}\big)\end{aligned}$$

e prendendo l'inf su tutte le quadruplette u_1, u_2, v_1, v_2 ammissibili ottengo

$$\|u+v\|_X \le \|u\|_X + \|v\|_X\,.$$

$\|u\|_X = 0$ *se e solo se* $u = 0$ *q.o.* Il "se" è ovvio, passo quindi al "solo se". Se $\|u\|_X = 0$ posso trovare una successione di coppie di funzioni $u_{n,1}, u_{n,2}$ tali che $u = u_{n,1} + u_{n,2}$ per ogni n e

$$\|u_{n,1}\|_{p_1} + \|u_{n,2}\|_{p_2} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Ma allora $u_{n,1}$ tende a 0 in $L^{p_1}(E)$ e $u_{n,2}$ tende a 0 in $L^{p_2}(E)$. In particolare, a patto di passare ad un'opportuna sottosuccessione, $u_{n,1}(x) \to 0$ e $u_{n,2}(x) \to 0$ per q.o. $x \in E$. Da questo segue che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in E$.

b) Divido la stima in due casi, cominciando da $|t_1| \geq |t_2|$. In questo caso $|t_1 + t_2| \leq 2|t_1|$ e quindi

$$\begin{aligned} g(t_1+t_2) &= |t_1+t_2|^{p_1} \wedge |t_1+t_2|^{p_2} \\ &\leq 2^{p_1}|t_1|^{p_1} \wedge 2^{p_2}|t_1|^{p_2} \leq 2^{p_1}|t_1|^{p_1} \leq 2^{p_1}\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)\,. \end{aligned}$$

Analogamente per $|t_1| \leq |t_2|$ si dimostra che

$$g(t_1+t_2) \leq 2^{p_2}\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)$$

e dunque la stima desiderata vale con $C = 2^{p_2}$.

c) Sia u una funzione misurabile su E. Pongo allora

$$F := \big\{x \in E\colon |u(x)| \geq 1\big\}\,, \quad u_1 := u \cdot 1_F\,, \quad u_2 := u \cdot 1_{E\setminus F}\,,$$

e osservo che, per via della scelta di F e della definizione di g,

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \|u_2\|_{p_2}^{p_2} &= \int_F |u(x)|^{p_1}\,dx + \int_{E\setminus F} |u(x)|^{p_2}\,dx \\ &= \int_F g(u(x))\,dx + \int_{E\setminus F} g(u(x))\,dx = \int_E g(u(x))\,dx\,, \end{aligned}$$

e questo dimostra che se $\int_E g(u(x))\,dx$ è finito allora le norme $\|u_1\|_{p_1}$ e $\|u_2\|_{p_2}$ sono finite, e quindi, tenuto conto che $u = u_1 + u_2$, anche $\|u\|_X$ è finita.

Viceversa, se $\|u\|_X$ è finita posso trovare $u_1 \in L^{p_1}(E)$ e $u_2 \in L^{p_2}(E)$ tali che $u = u_1 + u_2$, e usando la stima al punto b) ottengo

$$\begin{aligned} \int_E g(u(x))\,dx &= \int_E g\big(u_1(x) + u_2(x)\big)\,dx \\ &\leq C \int_E |u_1(x)|^{p_1} + |u_2(x)|^{p_2}\,dx = C\big(\|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \|u_2\|_{p_2}^{p_2}\big)\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $\int_E g(u(x))\,dx$ è finito.

d) Sicome $X = L^{p_1} + L^{p_2}$ e in questo caso $L^{p_2} \subset L^{p_1}$, ho che $X = L^{p_1}$. Dimostro ora l'equivalenza delle norme, vale a dire che esistono delle costanti c e c' tali che per ogni $u \in L^{p_1}$ vale

$$c'\,\|u\|_X \leq \|u\|_{p_1} \leq c\,\|u\|_X\,.$$

La prima disuguaglianza è ovvia, e anzi vale con $c' = 1$. Riguardo alla seconda, considero u_1, u_2 tali che $u = u_1 + u_2$ e ricordo che

$$\|u_2\|_{p_1} \leq |E|^a\,\|u_2\|_{p_2} \quad \text{con } a := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$$

(disuguaglianza vista a lezione); quindi

$$\|u\|_{p_1} \leq \|u\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_1} \leq C\big(\|u\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big) \quad \text{con } c := \max\{1, |E|^a\}\,,$$

e prendendo l'inf su tutte le coppie u_1, u_2 ammissibili ottengo infine

$$\|u\|_{p_1} \leq c\,\|u\|_X\,.$$

e) Devo far vedere che ogni successione di Cauchy u_n in X ammette limite. Come visto a lezione parlando della completezza di L^p, mi basta dimostrare che una sottosuccessione di u_n converge, e scelgo la sottosuccessione in modo che

$$\|u_n - u_{n-1}\|_X \leq 2^{-n} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots. \tag{8}$$

Posso inoltre supporre che $u_n = 0$.

Voglio ora scomporre ogni u_n come $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$ in modo che $(u_{1,n})$ sia una successione di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $(u_{2,n})$ sia una successione di Cauchy in $L^{p_2}(E)$. Per farlo osservo che, per via della (7.3), posso scomporre ogni $u_n - u_{n-1}$ come

$$u_n - u_{n-1} = v_{1,n} + v_{2,n} \tag{9}$$

con

$$\|v_{1,n}\|_{p_1} + \|v_{2,n}\|_{p_2} \leq 2^{1-n}\,; \tag{10}$$

pongo quindi

$$u_{1,n} := \sum_{m=1}^{n} v_{1,m}\,, \quad u_{2,n} := \sum_{m=1}^{n} v_{2,m}\,.$$

Usando (9) e il fatto che $u_0 = 0$ ottengo che $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$, mentre la stima (10) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_{1,n} - u_{1,n-1}\|_{p_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|_{p_2} \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} < +\infty\,,$$

da cui segue che $(u_{1,n})$ e $(u_{2,n})$ sono successioni di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $L^{p_2}(E)$ rispettivamente, e quindi convergono (in questi spazi) a delle funzioni $u_{1,\infty}$ e $u_{2,\infty}$. Da questo segue immediatamente che u_n converge in X a $u_\infty := u_{1,\infty} + u_{2,\infty}$ (per dimostrarlo basta usare che $\|u_n - u_\infty\|_X \le \|u_{1,n} - u_{1,\infty}\|_{p_1} + \|u_{2,n} - u_{2,\infty}\|_{p_2}$).

8. a) Data $u \in X = X(\mathbb{R}, 1, 2)$ la scrivo come $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $u_2 \in L^2(\mathbb{R})$, e definisco la TdF di u come

$$\mathscr{F}_X u := \mathscr{F}_1 u_1 + \mathscr{F}_2 u_2\,,$$

dove $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ denotano le TdF su L^1 e L^2, rispettivamente; siccome $\mathscr{F}_1 u_1$ appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}_2 u_2$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ è chiaro che $\mathscr{F}_X u$ appartiene a $X' = X(\mathbb{R}, 2, \infty)$.

Per prima cosa devo far vedere che questa definizione è ben posta, vale a dire che non dipende dalla specifica scomposizione di u: presa infatti un'altra scomposizione $u = u_1' + u_2'$ ho che

$$u_1 - u_1' = u_2' - u_2$$

e in particolare queste due funzioni appartengono a $L^1 \cap L^2$; quindi, ricordando che $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ coincidono su $L^1 \cap L^2$,

$$\big(\mathscr{F}_1 u_1 + \mathscr{F}_2 u_2\big) - \big(\mathscr{F}_1 u_1' + \mathscr{F}_2 u_2'\big) = \mathscr{F}_1(u_1 - u_1') - \mathscr{F}_2(u_2' - u_2) = 0\,.$$

La linearità di $\mathscr{F}_X$ è immediata.

Per quanto riguarda la continuità mi basta osservare che presi u_1 e u_2 come sopra vale

$$\|\mathscr{F}_X u\|_{X'} \le \|\mathscr{F}_1 u_1\|_\infty + \|\mathscr{F}_2 u_2\|_2 \le \|u_1\|_1 + \sqrt{2\pi}\,\|u_2\|_2 \le \sqrt{2\pi}\,\big(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_2\big)\,,$$

e prendendo l'inf su tutte le scelte di u_1 e u_2 ammissibili ottengo

$$\|\mathscr{F}_X u\|_{X'} \le \sqrt{2\pi}\,\|u\|_X\,.$$

b) Per quanto fatto nell'esercizio precedente, una funzione misurabile u su $\mathbb{R}$ appartiene a X se e solo se l'integrale $\int_{\mathbb{R}} g(u)\,dx$ è finito, dove g è la funzione

$$g(t) := |t| \wedge |t|^2 = \begin{cases} |t| & \text{per } |t| \ge 1, \\ |t|^2 & \text{per } |t| < 1. \end{cases}$$

Osservo quindi che se $u(x) := 1/|x|^a$ allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\,dx = \int_{|x|\ge 1} \frac{dx}{|x|^a} + \int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^{2a}} = 2\left[\int_0^1 \frac{dx}{x^a} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}}\right]$$

e quindi $u \in X$ se e solo se $\frac{1}{2} < a < 1$.

c) Fissato $\frac{1}{2} < a < 1$, per ogni $r > 0$ pongo $u_r := u \cdot 1_{[-r,r]}$, e osservo che le funzioni u_r sono in L^1 e soddisfano

$$\|u - u_r\|_2^2 = 2\int_r^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}} = \frac{2}{(2a-1)r^{2a-1}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0\,,$$

e dunque u_r converge a u in L^2 per $r \to +\infty$; di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ in L^2, e passando ad una opportuna sottosuccessione di r, converge anche puntualmente q.o. Posso quindi trovare $\mathscr{F}_X u(y)$ calcolando il limite *puntuale* di $\mathscr{F}_1 u_r(y)$, sperando che tale limite esista almeno per q.o. y. In effetti per $y \ne 0$ vale che

$$\mathscr{F}_1 u_r(y) = \int_{-r}^{r} \frac{e^{-iyx}}{|x|^a}\,dx = 2\int_0^r \frac{\cos(yx)}{|x|^a}\,dx = \frac{2}{|y|^{1-a}} \int_0^{r|y|} \frac{\cos t}{t^a}\,dt$$

(nell'ultimo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = yx$) e quindi

$$\mathscr{F}_X u(y) = \lim_{r\to+\infty} \mathscr{F}_1 u_r(y) = \frac{c}{|y|^{1-a}}\,,$$

dove la costante c è data da

$$c := 2 \lim_{s\to+\infty} \int_0^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = 2a \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt\,. \tag{11}$$

Qui servono alcune precisazioni:

- la funzione $f(t) := \cos t/t^a$ appartiene a $L^1([0,s])$ per ogni $s>0$, ma non a $L^1([0,+\infty))$ e quindi il limite in (11) potrebbe non anche esistere, e comunque non può essere scritto come $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (a meno di non resuscitare la definizione di *integrale improprio*);
- la funzione $h(t) := \sin t/t^{a+1}$ appartiene a $L^1([0,+\infty))$ perché $|h(t)| \sim 1/t^a$ per $t\to 0$ e $|h(t)| = O(1/t^{1+a})$ per $t\to+\infty$, e quindi il secondo integrale in (11) esiste ed è finito;
- per dimostrare la seconda uguaglianza in (11) osservo che per ogni $0 < s' < s < \infty$ vale
$$\int_{s'}^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = \left|\frac{\sin t}{t^a}\right|_{s'}^s + a\int_{s'}^s \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt$$
(si tratta di un'integrazione per parti); passando al limite per $s'\to 0$ ottengo
$$\int_0^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = \frac{\sin s}{s^a} + a\int_0^s \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt\,,$$
e passando al limite per $s\to+\infty$ ottengo la seconda uguaglianza in (11).

COMMENTI

- Esercizio 1. Avendo intuito cos'è $X^\perp$, si può risolvere l'esercizio in modo più elegante di quanto fatto sopra. Per la precisione si indica con X' il sottospazio delle funzioni $v \in L^2 = L^2([0,2])$ tali che $v(x) = 0$ per q.o. $x\in[0,2]$ e si osserva che $X' \subset X^\perp$ e che si può scomporre ogni $u\in L^2$ come
$$u = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 := u\cdot 1_{[0,1]}\,,\ u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}\,.$$
Siccome $u_1\in X'$ e $u_2\in X$, se ne deduce immediatamente che $L^2 = X + X'$, da cui segue che necessariamente $X' = X^\perp$ (e che X è un sottospazio chiuso) e che u_1 e u_2 sono proprio le proiezioni *ortogonali* di u su $X^\perp$ e X, rispettivamente.

- Esercizio 1. Da quel che hanno scritto, sembrerebbe che diversi dei presenti non hanno chiara la distinzione tra proiezione e proiezione ortogonale. Per la precisione, alcuni hanno scritto che siccome $u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}$ appartiene a X, allora la mappa $u\mapsto u_2$ è la proiezione *ortogonale* di L^2 su X, mentre è solo legittimo dedurne che $u\mapsto u_2$ è *una* proiezione di L^2 su X; per avere che è *la* proiezione ortogonale serve anche far vedere che $u - u_2 \perp X$, ovvero che $u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}$ appartiene a $X^\perp$.

- Esercizio 3a). Diversi dei presenti hanno dimostrato che $T(f_1,f_2)$ è ben definito scrivendo
$$\left|\int_0^1 f_1 f_2\, dx\right| \le \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty\,.$$
Ad essere pignoli questa giustificazione non è corretta, perché il punto non è tanto stimare l'integrale quanto dimostrare che esiste ed è finito. Scrivendo invece
$$\int_0^1 |f_1 f_2|\, dx \le \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty$$
si dimostra che la funzione $f_1 f_2$ è in L^1 e quindi $\int_0^1 f_1 f_2\, dx$ esiste ed è finito.

- Esercizio 4b). Moltissimi dei presenti hanno fatto errori più o meno gravi nel calcolo dei coefficienti di Fourier della funzione $|t|$. Alcuni hanno dimenticato di calcolare a parte c_0, altri hanno ottenuto coefficienti complessi (mentre i coeffcienti di una funzione pari e reale sono tutti reali) e infine alcuni hanno ottenuto coefficienti non sommabili (mentre i coefficienti di una funzione C^1 a tratti con valori uguali agli estremi $\pm\pi$ sono sempre sommabili).

- Esercizio 5c). Si può far vedere che sotto l'ipotesi (7) la soluzione u definita dalle formule (5) e (6) è in realtà una soluzione del problema (P) su tutto $\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$. In effetti, fissato un qualunque $T \in \mathbb{R}$, è possibile stimare come segue la norma del sup su $[T, +\infty) \times \mathbb{R}$ di u_n e delle sue derivate parziali del primo e secondo ordine:

$$\begin{gathered} \|u_n\|_\infty \sim e^{-2T}|c_n^0|\,, \\ \|(u_n)_t\|_\infty \sim \|(u_n)_x\|_\infty \sim e^{-2T}|nc_n^0|\,, \\ \|(u_n)_{tt}\|_\infty \sim \|(u_n)_{xx}\|_\infty \sim e^{-2T}|n^2c_n^0|\,. \end{gathered}$$

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno sbagliato questo punto, che è una questione di integrali improprio elementari. Si tratta di un errore grave.

- Esercizio 6b). In effetti si può far vedere un risultato più forte, vale a dire che per $a \geq 1/2$ la funzione $f_a * f_a$ non appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$. Per la precisione si ha che $f_a * f_a$ ha valori finiti ed è continua per $x \neq 0$, e tende a $+\infty$ per $x \to 0$.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno dimostrato che $f_1 * f_a$ è continua e limitata per $a < 1/2$ in modo assai involuto, vale a dire dicendo che f_a appartiene a $L^p \cap L^q$ per un qualche p e per q esponente coniugato di p, senza però dire esplicitamente di che p si tratta.

- Esercizio 7a). Nel dimostrare che $\|u\|_X = 0$ implica $u = 0$ q.o., quasi tutti quelli che ci hanno provato hanno dato per scontato che esistono u_1 e u_2 tali che $u = u_1 + u_2$ e $\|u_1\|_{p_1} = \|u_2\|_{p_2} = 0$, vale a dire che l'estremo inferiore nella definizione della norma $\|\cdot\|_X$ è in realtà un minimo. Ma questo è proprio quello che si chiedeva di dimostrare qui.

- Esercizio 7a). Sarebbe tutto più semplice sapendo che l'estremo inferiore nella definizione della norma $\|\cdot\|_X$ è un minimo. In effetti lo è, ma la dimostrazione richiede nozioni che vengono insegnate nel corso di Istituzioni di Analisi.

- Esercizio 7c). Alcuni dei presenti hanno scritto che la finitezza di $\int_E g(u)\,dx$ equivale a dire che almeno una tra $\|u\|_{p_1}$ e $\|u\|_{p_2}$ è finita, mentre non è questo il caso. In effetti la definizione di g implica che

$$\int_E g(u)\,dx = \int_E |u(x)|^{p_1} \wedge |u(x)|^{p_2}\,dx \leq \min\left\{ \int_E |u(x)|^{p_1}\,dx\,,\ \int_E |u(x)|^{p_2}\,dx \right\},$$

  ma non è detto che valga l'uguaglianza.

- Esercizio 7e). Una dimostrazione alternativa (e più naturale di quella scritta sopra) potrebbe essere la seguente: data (u_n) successione di Cauchy in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$ vale

$$\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon\,;$$

  quindi, ricordando la definizione di $\|\cdot\|_X$, posso trovare delle scomposizioni $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$ e $u_m = u_{1,m} + u_{2,m}$ in modo tale che

$$\|u_{1,n} - u_{1,m}\|_{p_1} + \|u_{2,n} - u_{2,m}\|_{p_2} < \varepsilon\,,$$

  da cui segue che $(u_{1,n})$ e $(u_{2,n})$ sono successioni di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $L^{p_2}(E)$, rispettivamente, e dunque convergono a degli opportuni $u_{1,\infty}$ e $u_{2,\infty}$, ecc.
  Ma questa dimostrazione non funziona! (Lascio agli interessati scoprire il perché.)

- Esercizio 8c). La dimostrazione data sopra è leggermente imprecisa dove scrivo che "u_r converge a u in L^2 per $r \to +\infty$ e di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ in L^2", e l'imprecisione sta nel fatto che le funzioni u_r e u non appartengono a L^2. La versione corretta sarebbe la seguente: "$u_r - u$ converge a 0 in L^2 per $r \to +\infty$ e di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r - \mathscr{F}_X u = \mathscr{F}_2(u_r - u)$ converge a 0 in L^2". Da questo si deduce comunque che, passando ad un'opportuna sottosuccessione di r, $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ q.o.