CORSO: **Calcolo delle Variazioni A**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **Matematica, secondo livello (WMA-LM)**
CODICE ESAME: **096AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
DURATA: **42 ore**
ANNO ACCADEMICO: **2015-16**
COLLOCAZIONE: **secondo semestre**

Introduzione. Lo scopo del corso è di dare una panoramica di alcuni dei risultati e problemi fondamentali della moderna teoria del calcolo delle variazioni, arrivando a includere, anche se solo marginalmente, argomenti che sono stati oggetto di ricerca in tempi relativamente recenti.

Programma del corso [versione: 6 giugno 2016].

1. Richiamo dei concetti di base del calcolo delle variazioni: variazione prima di un funzionale ed equazione di Eulero-Lagrange. Condizioni al bordo di Dirichlet, di Neumann, e di Robin; esempi di problemi con ostacolo, di problemi vincolati e di problemi con discontinuità libera. Variazione interna e forma di Du Bois-Reymond dell'equazione di Eulero-Lagrange. Equazione delle geodetiche per superfici in $\mathbb{R}^N$.
2. Il metodo diretto del calcolo delle variazioni: esistenza per semicontinuità e compattezza. Condizioni di coercività per funzionali definiti su spazi di Sobolev del primo ordine ($W^{1,p}$) con e senza condizioni al bordo. Teoremi di semicontinuità rispetto alla topologia debole degli spazi di Sobolev, e risultati di esistenza dei minimi per funzionali integrali in forma canonica nel caso scalare, vale a dire $F(u) := \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx$ con $u : \Omega \to \mathbb{R}$. La convessità come condizione necessaria e in alcuni casi sufficiente. Seconda dimostrazione della semicontinuità per funzionali con integranda $f(x, \nabla u)$ convessa nella seconda variabile: riduzione per blow-up al caso di una funzione affine.
3. Teoremi di semicontinuità ed esistenza dei minimi per funzionali integrali con integranda $f(x, \nabla u)$, con $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ (caso vettoriale). Quasiconvessità, policonvessità e convessità di rango uno; relazioni tra queste nozioni e la semicontinuità debole su spazi di Sobolev.
4. Rilassamento di un funzionale: definizione e motivazioni. Casi significativi: rilassamento di un funzionale non semicontinuo, rilassamento di un funzionale definito solo su un sottoinsieme di funzioni regolari. Esempi di problemi mal posti; p-capacità di un insieme K in $\mathbb{R}^n$ e rilassamento del funzionale di Dirichlet con u assegnata su K. Esempi di fenomeno di Lavrentiev in dimensione 1 e superiore. Rilassamento di funzionali con integranda $f(x, \nabla u)$ ed u scalare.
5. Calcolo della variazione prima in forma debole per funzionali definiti su spazi di Sobolev. Dimostrazione che i minimi soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole, almeno in alcuni semplici casi. Dimostrazione della regolarità $W^{2,2}$ (e $W^{2,p}$) per minimi di funzionali con integranda $|\nabla u|^2 + g(x, u)$, u scalare. Breve discussione dei funzionali più generali, sempre nel caso scalare.
6. Superfici di area minima: variazione prima dell'area ed equazione di Eulero-Lagrange in forma geometrica. Risultati di esistenza per superfici di dimensione due in forma parametrica ottenuti per minimizzazione dell'energia di Dirichlet con opportune condizioni al bordo (approccio di Douglas e Radó): il punto chiave è l'esistenza di parametrizzazioni conformi per superfici diffeomorfa al disco (Teorema di Lichtenstein). Dimostrazione del Teorema di Lichtenstein (a parte la regolarità) e traccia della dimostrazione del teorema di esistenza di Douglas.
7. Gamma-convergenza: motivazioni, definizione, ed esempi elementari. Proprietà generali della Gamma-convergenza. Primo esempio di Gamma-convergenza: teorema di Modica-Mortola sulla convergenza dei funzionali di Ginzburg-Landau scalari (o funzionali di Cahn-Hilliard-van der Waals). Secondo esempio: omogeneizzazione per funzionali con integranda $f(x/\varepsilon, \nabla u)$, con dimostrazione dettagliata nel caso uni-dimensionale, e solo accennata nel caso di dimensione generale.

Prerequisiti. Sono prerequisiti essenziali i contenuti fondamentali dei corsi di Analisi 3, Elementi di Calcolo delle Variazioni, Istituzioni di Analisi Matematica. In particolare serviranno la teoria standard degli spazi di Sobolev e le nozioni di base riguardanti la variazione prima di un funzionale, l'equazione di Eulero-Lagrange, la nozione di derivata debole (o distribuzionale), le topologie deboli per spazi di Banach, le funzioni armoniche, e la formula dell'area.

Testi di riferimento.

- F. Clarke: *Functional analysis, calculus of variations and optimal control.* Graduate Texts in Mathematics, 264. Springer-Verlag, London, 2013.
- B. Dacorogna: *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, London, 2004.
- B. Dacorogna: *Direct methods in the calculus of variations*, second edition. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer Science+Business Media, New York, 2008.
- Jürgen Jost, X. Li-Jost: *Calculus of variations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 64. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario su un argomento concordato con il docente, seguito da un orale sugli argomenti fondamentali del corso. Gli appelli verranno concordati individualmente con ogni studente.