Versione: 20 settembre 2014

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2013-14

Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 15 dicembre 2013]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e descrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni e funzioni continue.
   - 2.2 Proprietà elementari dei limiti. Forme indeterminate.
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione (all'infinito e in zero).
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali. *Il numero e. Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *tramite gli sviluppi di Taylor.*
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i imiti di funzioni.
   - 4.3 *Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass). Teorema di esistenza degli zeri.*
   - 4.4 Teoremi di Lagrange e di Cauchy. *Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Lagrange.*
   - 4.5 Prime nozioni di calcolo combinatorico. Disposizioni con e senza ripetizioni, combinazioni, permutazioni.
5. Integrali
   - 5.1 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e prima versione del teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.

5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e dei solidi di rotazione in particolare.

6. Integrali imrpropri e serie numeriche

6.1 Integrali impropri semplici. Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.2 Integrali impropri non semplici.
6.3 Serie. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio dell'integrale, del confronto, e del confronto asintotico. Esempi fondamentali: la serie geometrica ($\sum a^n$) e la serie armonica generalizzata ($\sum 1/n^a$). Criterio della convergenza assoluta per serie a segno variabile.

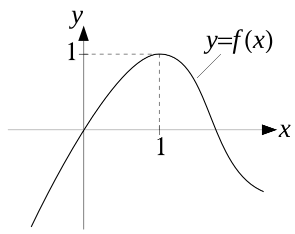
7. Equazioni differenziali

7.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato dei dati iniziali.
7.2 Equazioni lineari del primo ordine.
7.3 Equazioni a variabili separabili.
7.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Calcolo della soluzione particolare per certe classi di termini noti.

T E S T I

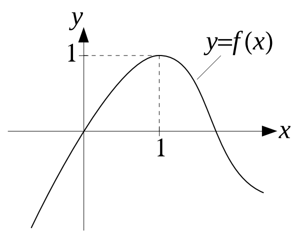
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2-1}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) e^{x^3-1}; c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x-2}}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3-x}$; b) $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\log(2x)$; c) $\lim_{x\to+\infty} 2x\,\sin(1/x)$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^3 + \log(1-x^3)$.
5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 40.
6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin(x-\pi) = \cos(x+c)$.
7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq \frac{1}{2x}$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 1 - e^{-x}$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sqrt{4-x}}{1+\sqrt{x^2-1}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 \log x$; b) e^{x^2-1}; c) $\dfrac{9^{x-1}}{3^{x-2}}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} e^{x^3-x}$; b) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\log x}{x^2+1}$; c) $\lim_{x\to0} \dfrac{x^3+x^2}{\log(2x^2)}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^4 - \sin(x^4)$.
5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 30.
6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\cos(x-\pi) = \sin(x+c)$.
7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq x^2 - \frac{1}{2}$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 0$.

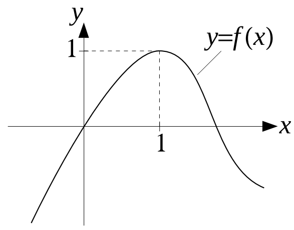


PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{1}{-1+\sqrt{1-x^2}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^4 \log x$; b) e^{x^3+2}; c) $\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} (x^3+x^2)$; b) $\lim_{x\to0^+} (x^{-1} + \log x)$; c) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin(1/x)$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^4 + \log(1-x^4)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 30.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin(x + \pi) = \cos(x - c)$.



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq -\frac{1}{x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq e^{x} - 1$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sqrt{x-4}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

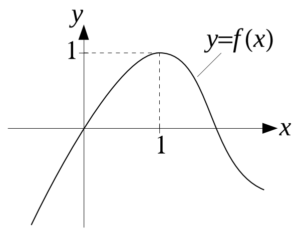
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{-1}\log x$; b) e^{x^2+2}; c) $\dfrac{3^{x+2}}{9^{x+1}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{-1} + \log x)$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+x^2}{\log(3x^2)}$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^3 - \sin(x^3)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 40.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\cos(x + \pi) = \sin(x - c)$.



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq e^{-x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \geq y \geq e^{x} - 1$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\tan(x/2) \geq 1$.

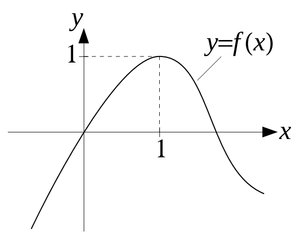
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(1 + 2x^2)$; b) $x^3 e^{-x}$; c) $\log\left[\dfrac{(x+1)^4}{x^3}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 2^x$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 20$ relativamente all'intervallo $-3 \leq x \leq 0$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 5 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$-\log x \ll x^2 \ll 3 \ll x^2 + x^{-2} \quad \text{per } x \to 0^+.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq f(x + 1)$.

8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\sin x| \geq x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\sin(2x) \leq 1/2$.

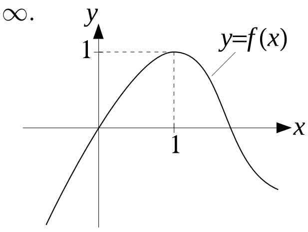
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1 - 2x^2)$; b) $x^2 e^{-x}$; c) $\log\left[\dfrac{(x+1)^3}{x^4}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 2^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x - 20$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 3$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 4 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\frac{x^4}{x^2+1} \ll \log(x+1) \ll \frac{2^x}{3^x} \ll x^3 \quad \text{per } x \to +\infty.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \leq |f(x)|$.

8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\cos x| \geq x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\cos(2x) \leq 1/2$.

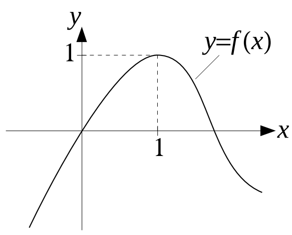
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1 - x^3)$; b) $x^2 e^{2x}$; c) $\log\left[\dfrac{(x-1)^3}{x^4}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(\pi + e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{1+x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin(1/x)$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 10$ relativamente all'intervallo $-3 \leq x \leq 1$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 2 volte la lettera A e 5 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$-\log x \ll \frac{1+x}{x^2} \ll x^3 \ll 2 \quad \text{per } x \to 0^+.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2} f(x) \leq y \leq f(x)$.

8. Disegnare il grafico di $|\arctan x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\arctan x| \geq 2 - x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, 2\pi)$ tali che $\sin(x/2) \leq 1/2$.

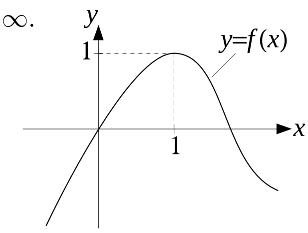
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(1+x^3)$; b) x^3e^{2x}; c) $\log\left[\frac{(x-1)^4}{x^3}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\arctan(1-e^x)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2^x}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^4)}{x^3}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x - 10$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 4$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 4 volte la lettera A e 4 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\log(x+1) \ll \frac{3^x}{2^x} \ll \frac{x^2}{x^5+1} \ll x^2 \quad \text{per } x\to+\infty.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $f(x-1)\le y\le f(x)$.

8. Disegnare il grafico di $|e^x-1|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|e^x-1|\le 2-x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Dire se la disequazione $x^4 - \frac{9}{10} \ge 2\log x$ vale per ogni $x>0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la disequazione $x^4 + a \ge 2\log x$ vale per ogni $x>0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\exp(x^2)}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x\to 0^+$ di $f(x)$.
   b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x\to0^+$ di $f(x)+ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^3(x-2)\,,$$
   per ogni $a>0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).
   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a>0$.
   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a>0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Dire se la disequazione $x^6 - \frac{4}{5} \ge 3\log x$ vale per ogni $x>0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la disequazione $x^6 + a \ge 3\log x$ vale per ogni $x>0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\cos x}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x\to 0^+$ di $f(x)$.
   b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x\to0^+$ di $f(x)+ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^5(x-3)\,,$$

per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Dire se la disequazione $x^2 - \frac{3}{5} \geq 4 \log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 + a \geq 4 \log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{\sin(3x)}}{\exp(x^2)}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^5(x - 9)\,,$$
   per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Dire se la disequazione $x^3 - \frac{1}{3} \geq 6 \log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^3 + a \geq 6 \log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{\sin(3x)}}{\cos x}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^3(x - 6)\,,$$
   per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+1}{3^x-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\sin(2x))^4}{\log(1+2x^4)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos(e^{x-2})$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 di $\log(1-2x^2)$.
3. Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{1/3}\sqrt[3]{1-3x}\,dx$.
4. Dire per quali $a>0$ la serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{1-n^a+3n^{2a}}$ risulta essere finita.
5. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{2a}\,e^{-x}\,dx$ risulta essere finito.
6. Cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x}+x=e^t+2$.
7. Trovare la soluzione di $\dot{x}=(1+x^2)e^t$ che soddisfa $x(0)=1$.
8. Disegnare il grafico di $y=\log|x-1|$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-1}{4^x+1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\log(1+2x))^4}{\sin(2x^4)}$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 di $1-\cos(2x)$.
3. Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{1/4}\sqrt[4]{1-4x}\,dx$.
4. Dire per quali $a>0$ la serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{2-n^a+2n^{3a}}$ risulta essere finita.
5. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{2a}\,\log x\,dx$ risulta essere finito.
6. Cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2x=e^t+2$.
7. Trovare la soluzione di $\dot{x}=(1+x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0)=1$.
8. Disegnare il grafico di $y=|\log(x-1)|$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a\geq0$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x}-2a\dot{x}+4x=4t \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=2$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.
   c) Dire per quali valori di a esiste una soluzione $x(t)$ della (*) tale che $x(t)\gg e^{4t}$ per $t\to+\infty$.
2. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1+\cos x)^a}\,dx$ risulta essere finito.

3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x, y) tali che $9x^2 + y^2 \leq 9$.
   b) Calcolare il volume del solido A ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido B ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle y.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \geq 0$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 9t \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.
   c) Dire per quali valori di a esiste una soluzione $x(t)$ della (*) tale che $x(t) \gg e^{9t}$ per $t \to +\infty$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x, y) tali che $4x^2 + y^2 \leq 4$.
   b) Calcolare il volume del solido A ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido B ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle y.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(1 - x^2)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{2 + x^2}$; b) $\tan(x^2)$; c) $\log\big((x + 1)^{2x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{4x^4} - \cos(2x^2)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).
5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int e^{3\sin x+1}\cos x\, dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.
7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)\log\Big(1 + \frac{1}{n^a}\Big)$ converge ad un valore finito.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-\arctan x \le y \le \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(x^2 - 3)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{1 - x^2}$; b) $\tan(x^3)$; c) $\log\big((x + 1)^{3x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-x^6} - \cos(2x^3)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da due lettere dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).
5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int \frac{\sin(1 - 2\log x)}{x} dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x/t = 0$ che soddisfa $x(1) = 2$.
7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^a + 1)\log\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)$ converge ad un valore finito.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{(x-1)^3} \le y \le \arctan(x - 1)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(2x^2 - 3)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{2x^2 - 1}$; b) $\tan(e^x)$; c) $\log\big((x - 1)^{3x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\log(1 + 2x^2) - 2\sin(x^2)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da tre lettere dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).

5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int e^{1-3\cos x}\sin x\,dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+3t^2x=0$ che soddisfa $x(1)=1$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-n^3)\log\Big(1-\frac{1}{n^a}\Big)$ converge ad un valore finito.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}\le y\le\arctan x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos\big(x^2-\frac{1}{4}\big)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{1+x^2}$; b) $\tan(\log x)$; c) $\log\big((x-1)^{2x}\big)$.

3. Trovare la parte principale per $x\to 0$ di $4\sin(x^2)-\log(1+4x^2)$.

4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).

5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int\frac{\cos(2\log x+2)}{x}dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+3x/t=0$ che soddisfa $x(1)=3$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-n^a)\log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)$ converge ad un valore finito.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\displaystyle -\arctan(x-1)\le y\le\frac{1}{(x-1)^2}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a>0$ consideriamo l'equazione
$$x^3=a(x^2-4)\,. \tag{*}$$
a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per $a=5$.
b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a>0$.
c) Per ogni $a>0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di (*). Determinare il limite e quindi la parte principale di $x(a)$ per $a\to+\infty$.

2. Dato $a\in\mathbb{R}$, sia $x(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale
$$\dot{x}=x(x-2)$$
che soddisfa la condizione iniziale $x(0)=a$.
a) Calcolare $x(t)$ per $a=1$ e disegnarne il grafico.
b) Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'insieme di definizione della soluzione $x(t)$ è tutto $\mathbb{R}$.

3. Dato $a>0$, consideriamo le funzioni
$$f(x):=\frac{ax^2}{x^3+2}\quad\text{e}\quad g(x):=\sin(2/x)\,,$$
e indichiamo con A l'insieme dei punti (x,y) tali che $x\ge 1$ e $f(x)\le y\le g(x)$.
a) Trovare la parti principali di $f(x)$, $g(x)$ e $g(x)-f(x)$ per $x\to+\infty$.

b) Dire per quali a l'insieme A è limitato.

c) Dire per quali a l'insieme A ha area finita.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione
$$2x^3 = a(4 - x^2)\,. \tag{*}$$
a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per $a = 11$.
b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a > 0$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*). Determinare il limite e quindi la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $x(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale
$$\dot{x} = x(x + 4)$$
che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$.
a) Calcolare $x(t)$ per $a = -2$ e disegnarne il grafico.
b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di definizione della soluzione $x(t)$ è tutto $\mathbb{R}$.

3. Dato $a > 0$, consideriamo le funzioni
$$f(x) := \frac{ax}{x^3 + 1} \quad \text{e} \quad g(x) := \sin(1/x^2)\,,$$
e indichiamo con A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$.
a) Trovare la parti principali di $f(x)$, $g(x)$ e $g(x) - f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Dire per quali a l'insieme A è limitato.
c) Dire per quali a l'insieme A ha area finita.

Prima parte, gruppo 1.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq -1$ per $0 \leq x \leq \pi/2$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1+x^2)^5}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^2)}{x^2 \sin(x+x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^5}{1+x}$; b) $3^{-x}+x^5$; c) $\dfrac{1}{\cos^6(1/x)}$; d) $\dfrac{x^4}{3+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{1-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=3t$ che soddisfa $x(0)=1$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2a}}{n^2+2^n}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ per $0 \leq x \leq \pi/2$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^3)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^3)}{x^3 \sin(x-x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^6}{1+x^2}$; b) $\dfrac{1}{3^x+x^5}$; c) $\dfrac{1}{\sin^6(1/x)}$; d) $x^4 \log x$.

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{1-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=3t$ che soddisfa $x(0)=2$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+\sin n}{n^a+n^2}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \left|1 - \dfrac{1}{x^3}\right|$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq 1$ per $0 \leq x \leq \pi$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^2)^5}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-e^{-2x^2}}{x^4 \sin(x+x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^5}{1+x^2}$; b) $\dfrac{1}{\cos^4(1/x)}$; c) $3^{-x}+x^2$; d) $\dfrac{x^3}{2+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{3-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=2t$ che soddisfa $x(0)=3$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log n}{n^a+n^2}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{(|x|-1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq -1$ per $-\pi/2 \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1+x^3)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^2)}{x^4 \sin(x-x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{1}{\cos^6(1/x)}$; b) $\dfrac{x^5}{1+x}$; c) $3^{-x}+x^5$; d) $\dfrac{x^4}{3+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{3-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=2t$ che soddisfa $x(0)=1$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a}}{n^3+3^n}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ con $-\pi/2 \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^2)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1 - e^{-2x^2}}{x^3 \sin(x + x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{1}{\sin^6(1/x)}$; b) $\dfrac{x^6}{1 + x^2}$; c) $\dfrac{1}{3^x + x^5}$; d) $x^4 \log x$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{4-x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = t$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + \sin n}{n^a + n^3}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \left|1 - \dfrac{1}{x^4}\right|$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq 1$ per $-\pi \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1 + x^2)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{e^{-2x^3} - 1}{x \sin(x - x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $3^{-x} + x^2$; b) $\dfrac{x^5}{1 + x^2}$; c) $\dfrac{1}{\cos^4(1/x)}$; d) $\dfrac{x^3}{2 + \log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{4-x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = t$ che soddisfa $x(0) = 3$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \log n}{n^a + n^3}$ converge a un numero finito.

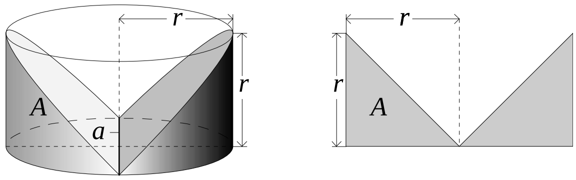
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{(|x| - 1)^3}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Dire se la disequazione $2x^2 + 3x - 2 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $2x^2 + 3x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - \big(\cos(1/x^a)\big)^x$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste ed è finito.

3. Da un cilindro di raggio di base r e altezza r viene rimosso un pezzo tramite un taglio a "V", ottenendo il solido A descritto da due diverse proiezioni assonometriche nella figura sottostante (quella di destra corrisponde alla proiezione ortogonale lungo la direzione dello spigolo del taglio, vale a dire l'asse a nel disegno di sinistra).



a) Disegnare le sezioni piane di A ortogonali allo spigolo del taglio, vale a dire all'asse a nel figura sopra a sinistra, e calcolarne l'area.

b) Calcolare il volume di A.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Dire se la disequazione $3x^2 + x - 2 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $3x^2 + x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - (1 - /(2x^a))^{\sin x}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Dire se la disequazione $2x^2 - 3x + 1 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $2x^2 - 3x + c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - \big(\cos(2/x^a)\big)^{x^2}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Dire se la disequazione $3x^2 - x - 1 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $3x^2 - x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - (1 - 1/x^a)^{x \sin x}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x-\pi) = \sin(x+a)$.
2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^2-4x+5}$ per $-1 \le x \le 3$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cos x}$.
4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 5 ha a disposizione 8 giocatori che possono ricoprire tutti i ruoli incluso quello di portiere. Quante diverse formazioni può schierare?
5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx$.
6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1+x^{2a}}{e^x}\,dx$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \sqrt{t}e^{3x}$ che soddisfa $x(1)=0$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \ge -\dfrac{1}{x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x+a) = \sin(x-\pi)$.
2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{-1}{x^2-4x+6}$ per $-1 \le x \le 1$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+4x^2)-2x^2}{x\cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log x)^x$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x-1}$.
4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 5 ha a disposizione 1 portiere e 7 giocatori che possono ricoprire tutti gli altri i ruoli. Quante diverse formazioni può schierare?
5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx$.
6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{2} \frac{e^x \sin x}{x^{2a}}\,dx$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^{2x}}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0)=0$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $\log(x+1) \le y \le \dfrac{1}{x}+1$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x-\pi/2) = \sin(x+a)$.
2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ per $-3 \le x \le 1$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos x}{\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^{4x}-e^{2x}}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 7 ha a disposizione 9 giocatori che possono ricoprire tutti i ruoli incluso quello di portiere. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^6 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{\cos(2x)}{x^{3a}}dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{t}}$ che soddisfa $x(1)=0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $e^{-x} \le y \le -\dfrac{1}{x}$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x+a) = \sin(x-\pi/2)$.

2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{-1}{x^2+4x+6}$ per $-1 \le x \le 1$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\log(1+5x^2)-2x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x-1}{(x-1)^2}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 7 ha a disposizione 1 portiere e 8 giocatori che possono ricoprire tutti gli altri i ruoli. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a-1}{x^{2a}+1}dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^{3x}}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0)=0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\log(x+1) \ge \dfrac{1}{x}+1$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a>0$ si consideri la funzione
$$f(x) = 2\exp(-ax^2)\,.$$
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2a+8)x = e^{-4t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=4$.
b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^t + o(e^t)$ con $c \ne 0$.
c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^2) - \exp(x^{1/2})$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = -3\exp(-ax^2)\,.$$
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (4a+3)x = e^{-3t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3/2$.
b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t/2} + o(e^{t/2})$ con $c \neq 0$.
c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^{1/2}) - \exp(x^3)$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = -2\exp(-ax^2)\,.$$
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2a+8)x = e^{-4t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 4$.
b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t} + o(e^{t})$ con $c \neq 0$.
c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^{1/3}) - \exp(x^2)$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = 3\exp(-ax^2)\,.$$
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (4a+3)x = e^{-3t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3/2$.

b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t/2} + o(e^{t/2})$ con $c \neq 0$.

c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^3) - \exp(x^{1/3})$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x + \pi/3) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^3)}{\log(2+x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\log(1+x^3)}{x^3 - \sin(x^3)}$.
3. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $2 \le x \le 4$.
4. Quante sono i numeri di 4 cifre che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $x^2 - 1$ e $x + 1$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[3]{1+n^{-2a}} - 1\Big)$ converge.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{2t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} - 1 \le -1/x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x - \pi/6) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\exp(x^4)}{x^2\log(1+2x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+4x^4)}{\log(1+x^2)}$.
3. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $2 \le x \le 4$.
4. Quante sono i numeri di 3 cifre distinte che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $1 - 2x^2$ e $2x - 3$
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[2]{1+n^{-2a}} - 1\Big)$ converge.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{2t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -1$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \ge y \ge 1/x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x - \pi/3) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\log(1-2x^2)}{1-\exp(x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+x^2)}{\log(1+x^3)}$.
3. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.
4. Quante sono i numeri di 4 cifre distinte che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $x^2 + 1$ e $x + 3$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[3]{1+n^{-3a}} - 1\Big)$ converge.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{-t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq -1/x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x + \pi/6) = \cos(x - \alpha)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+4x^2)}{\log(1+x^4)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \sin(x^3)}{x^2\log(1-x^4)}$.

3. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

4. Quante sono i numeri di 3 cifre che iniziano con una cifra dispari?

5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $3 - 2x^2$ e $2x - 1$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[2]{1 + n^{-3a}} - 1\Big)$ converge.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{-t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -2$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} - 1 \geq 1/x^2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a}\,dx$.

2. Usando un trapano con una punta di diametro 5 millimetri, faccio un foro perfettamente centrato che passa da parte a parte una sfera piena di diametro 13 millimetri. Calcolare il volume dell'oggetto così ottenuto.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, e dato p punto del grafico di f, indichiamo con T_p il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per p, e la retta normale al grafico di f in p (vale a dire la retta passante per p e ortogonale alla retta tangente).
   a) Disegnare T_p e calcolarne l'area (in funzione dell'ascissa di p).
   b) Determinare le funzioni f per cui l'area di T_p è la stessa per tutti i punti p del grafico di f.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+3a}\,dx$.

2. Usando un trapano con una punta di diametro 8 millimetri, faccio un foro perfettamente centrato che passa da parte a parte una sfera piena di diametro 17 millimetri. Calcolare il volume dell'oggetto così ottenuto.

3. Uguale al gruppo 1.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-2x}$; b) $\log\left[\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}\right]$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
a) $\frac{1+3^x}{1+2^x}$; b) $x^3 3^{-x}$; c) $\frac{2^x}{\log x}$; d) $2^x + x^2$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{1+e^{-2x}}$.

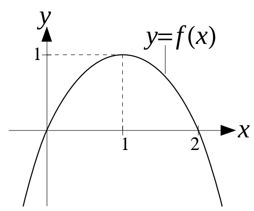
4. Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2(x-1)^2\right) dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_a^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = -1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

8. Disegnare il grafico di $|f(2x)|$ dove f è la funzione in figura.



Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left[\frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}\right]$; b) $x^2 e^{-3x}$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
a) $\frac{1+2^{3x}}{2+2^x}$; b) $x^4 4^{-x}$; c) $3^x \log x$; d) $3^x - x^3$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}$.

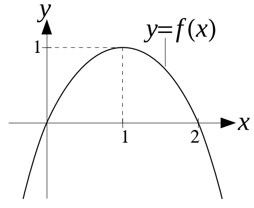
4. Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-3(x+1)^2\right) dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_a^4 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = -1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}$.

8. Disegnare il grafico di $\frac{1}{2} f(x+1)$ dove f è la funzione in figura.



Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{-2x}$; b) $\log\left[\frac{(1+x)^3}{(1-x)^2}\right]$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+2^x}{1+2^{3x}}$; b) $x^{-4}4^x$; c) $3^{-x}\log x$; d) 3^{-x}.

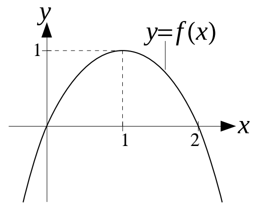
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{1+e^{-3x}}$.

4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-3(x-1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = 1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$.



8. Disegnare il grafico di $|f(x)|-1$ dove f è la funzione in figura.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left[\dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}\right]$; b) x^3e^{-3x}.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+3^x}{2+4^x}$; b) $x^{-3}3^x$; c) $2^{-x}\log x$; d) 2^{-x}.

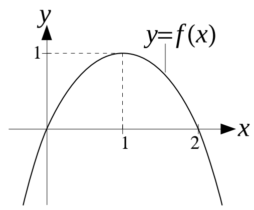
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}$.

4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-2(x+1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = 1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$.



8. Disegnare il grafico di $|f(x)-1|$ dove f è la funzione in figura.

SECONDA PARTE.

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + x = 1 + \sin(at)\,. \tag{*}$$
   a) Per ogni $a > 1$ trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.

2. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\log n}{n^2\log^a n}$.

3. a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^5 - ax^3 + 9x$ è crescente, e per tali a tracciarne approssimativamente il grafico.

   b) Per ogni a per cui f è iniettiva determinare le parti principali della funzione inversa $f^{-1}(y)$ per $y \to 0$ e per $y \to +\infty$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{\log x}{x} = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\log(1+5x^2) - 3x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2^x - 1}{(x-1)^2}$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le prime 2 lettere siano vocali e le ultime 2 siano consonanti.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-ax}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \sin(n^a)}{2^n + n^{2a}}$ converge.
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} + 2x = t^a$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\sin x| - 1$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{\log x}{x^2} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{3x} - e^{4x}}$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le 4 lettere siano tutte diverse.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int x e^{-ax}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \log(n^a)}{2^{-n} + n^{2a}}$ converge.
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} + 3x = t^a$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\cos x - 1|$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $e^x \log x = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2) - x^2}{x \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2\log x)^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le prime 2 lettere e le 3 cifre siano tutte diverse.

4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x e^{ax}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \cos(n^a)}{\log n + n^{3a}}$ converge.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} - x = t^a$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \sin|x|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{\log(1+x)}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{2\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{4x}}{x\cos x}$.

3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le 3 cifre e le ultime 2 lettere siano tutte diverse.

4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int x e^{ax}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + 2^n}{\log n + n^{3a}}$ converge.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} - 2x = t^a$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin|x - \pi|$.

SECONDA PARTE.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x + a\,.$$
a) Che equazione deve soddisfare x affinché la retta tangente la grafico di f nel punto di ascissa x passi per l'origine?

   b) Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ quante sono le rette tangenti al grafico di f che passano per l'origine.

2. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che
$$|x|^{2a} \le y \le (1 + x^2)^a\,.$$
a) Disegnare approssimativamente l'insieme A per $a = 1/2$.

   b) Dire per quali a l'area di A è finita.

3. Tra tutti i coni (retti e a base circolare) iscritti nella sfera di raggio R trovare quello di volume massimo.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{-x}$; b) $\log\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x}}{\log x}$; b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{1-x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x^2)}{2x^2}$.

3. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 5 volte la B.

4. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-1 \le x \le 0$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\int (\sin x + 1)^a \cos x \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{x^a + x^{3a}}{2^x} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 10$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := \frac{1}{(x-1)^2} - 1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \le -x$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)$; b) xe^{-2x}.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\tan(3x^2)}$; b) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$; c) $\lim_{x\to -\infty} x^6 2^x$.

3. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 4 volte la B.

4. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-1 \le x \le 0$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\int_e^{e^2} \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3a}} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -5$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := \frac{1}{(x+1)^3} - 1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \ge x$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; b) $x^3 e^{2x}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 1^+} \log\log x$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{\tan(2x^3)}$; c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{xe^x}$.

3. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 2 volte la lettera A e 5 volte la B.

4. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + 1)^a \cos x \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{\cos(2x)}{x^{2a}} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -10$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x-1)^3} + 1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(1+e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x^3)}{2x^2}$.

3. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 4 volte la lettera A e 4 volte la B.

4. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a - 1}{x^{2a} + 2} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 5$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq -x$.

Seconda parte.

1. a) Risolvere l'equazione differenziale $t\dot{x} + 3x = e^{-t^3}$ (per $t > 0$).
   b) Tra tutte le soluzioni trovare quelle che hanno limite finito per $t \to 0^+$ (ammesso che ce ne siano).

2. Dato $a > 0$, si consideri la funzione $f_a(x) := (x^2 + 2)^a$.
   a) Determinare la parte principale $g_a(x)$ di $f_a(x)$ per $x \to +\infty$ e dire per quali a la funzione f_a è convessa.
   b) Disegnare il grafico di f_a al variare di $a > 0$.
   c) Detto A_a l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $g_a(x) \leq y \leq f_a(x)$, dire per quali a l'area di A_a è finita.

3. a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 (in 0) della funzione $\tan x$.
   b) Per ogni $a > 0$ trovare la parte principale di $f(x) := \tan(x^a) - \tan(\log(1 + x^2))$ per $x \to 0$.

S O L U Z I O N I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. L'insieme di definizione è $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

2. a) $x(1 + 2\log x)$; b) $3x^2\, e^{x^3-1}$; c) $\left[\dfrac{4^{x-1}}{2^{x-2}}\right]' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.

3. a) 0; b) 0; c) 2.

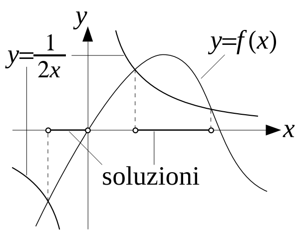
4. La parte principale è $-x^6/2$.

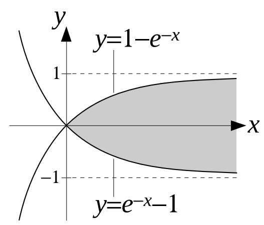
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 40 = 319.200$.

6. $\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. L'insieme di definizione è $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$.

2. a) $x^2(1 + 3\log x)$; b) $2x\, e^{x^2-1}$; c) $\left[\dfrac{9^{x-1}}{3^{x-2}}\right]' = (3^x)' = \log 3 \cdot 3^x$.

3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.

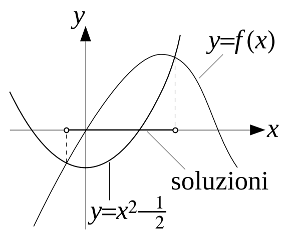
4. La parte principale è $x^{12}/6$.

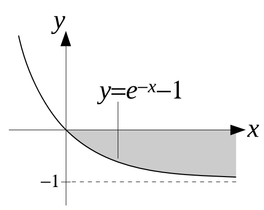
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 30 = 12.600$.

6. $-\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. L'insieme di definizione è $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

2. a) $x^3(1+4\log x)$; b) $3x^2\, e^{x^3+2}$; c) $\left[\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}\right]' = (2^{-x})' = -\log 2 \cdot 2^{-x}$.

3. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

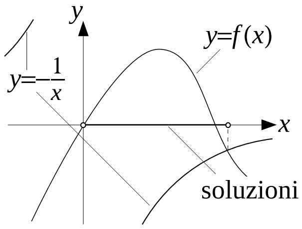
4. La parte principale è $-x^8/2$.

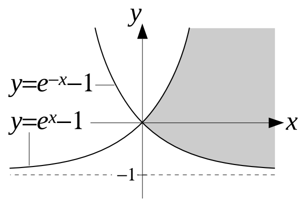
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 30 = 239.400$.

6. $-\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. L'insieme di definizione è vuoto.

2. a) $x^{-2}(1-\log x)$; b) $2x\, e^{x^2+2}$; c) $\left[\dfrac{3^{x+2}}{9^{x+1}}\right]' = (3^{-x})' = -\log 3 \cdot 3^{-x}$.

3. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) 0.

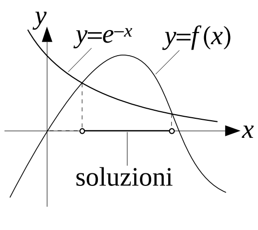
4. La parte principale è $x^9/6$.

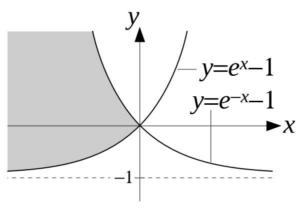
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 40 = 16.800$.

6. $\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$.

2. a) $4x\,\cos(1+2x^2)$; b) $(3x^2-x^3)e^{-x}$;
c) $\left[\log\left(\dfrac{(x+1)^4}{x^3}\right)\right]' = \big(4\log(x+1) - 3\log x\big)' = \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-3}{x(x+1)}$.

3. a) $\pi/2$; b) $+\infty$; c) -2.

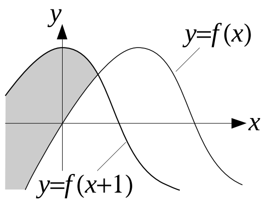
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = -2$ e $x = 0$.

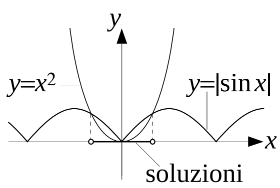
5. $N = \binom{8}{3} = 56$.

6. $x^2 \ll 3 \ll -\log x \ll x^2 + x^{-2}$ per $x \to 0^+$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $\left(0, \frac{1}{12}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{12}\pi, \pi\right)$.

2. a) $4x\ \sin(1 - 2x^2)$; b) $(2x - x^2)e^{-x}$;
   c) $\left[\log\left(\frac{(x+1)^3}{x^4}\right)\right]' = \big(3\log(x+1) - 4\log x\big)' = \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x} = -\frac{x+4}{x(x+1)}$.

3. a) 1; b) 0; c) $-1/2$.

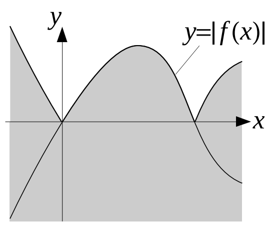
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = 0$ e $x = 2$.

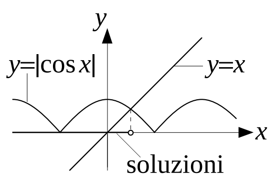
5. $N = \binom{7}{3} = 35$.

6. $\frac{2^x}{3^x} \ll \log(x+1) \ll \frac{x^4}{x^2+1} \ll x^3$ per $x \to +\infty$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$.

2. a) $3x^2\ \sin(1 - x^3)$; b) $(2x + 2x^2)e^{2x}$;
   c) $\left[\log\left(\frac{(x-1)^3}{x^4}\right)\right]' = \big(3\log(x-1) - 4\log x\big)' = \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{4-x}{x(x-1)}$.

3. a) -1; b) 0; c) 1.

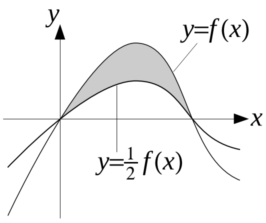
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = -2$ e $x = 1$.

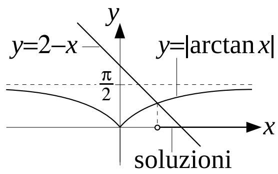
5. $N = \binom{7}{2} = 21$.

6. $x^3 \ll 2 \ll -\log x \ll \dfrac{1+x}{x^2}$ per $x \to 0^+$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. $\left(0, \frac{1}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$.

2. a) $3x^2 \cos(1+x^3)$; b) $(3x^2+2x^3)e^{2x}$;
   c) $\left[\log\left(\dfrac{(x-1)^4}{x^3}\right)\right]' = \big(4\log(x-1) - 3\log x\big)' = \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x+3}{x(x-1)}$.

3. a) $-\pi/2$; b) 0; c) 0.

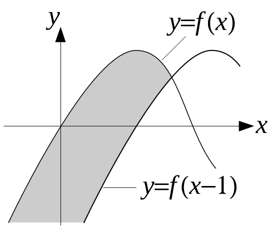
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = 4$ e $x = 2$.

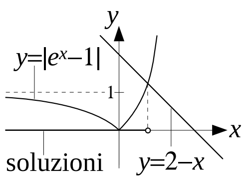
5. $N = \binom{8}{4} = 70$.

6. $\dfrac{x^2}{x^5+1} \ll \log(x+1) \ll x^2 \ll \dfrac{3^x}{2^x}$ per $x \to +\infty$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Risolviamo direttamente il punto b), da cui poi segue la risposta al punto a).
   b) Riscrivendo la disequazione come $a \geq 2\log x - x^4$ otteniamo che è soddisfatta per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo (o meglio dell'estremo superiore dei valori)

relativamente all'insieme $(0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) := 2\log x - x^4$$

L'insieme $(0, +\infty)$ coincide con l'insieme di definizione della funzione f, e studiando il segno della derivata di quest'ultima, vale a dire

$$f'(x) = \frac{2}{x}(1 - 2x^4)\,,$$

si ottiene che $f(x)$ cresce per $x \le 2^{-1/4}$ e decresce altrimenti. Da questo segue che $2^{-1/4}$ è il punto di massimo assoluto di f, e dunque il valore massimo di f è

$$m := f(2^{-1/4}) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1) \simeq -0{,}846\,.$$

a) La disuguaglianza in questione coincide con quella studiata al punto b) per $a = -9/10$, e siccome $-9/10 < m \simeq -0{,}846$, per quanto visto al punto b) la disuguaglianza non vale per ogni $x > 0$.

2. a) Usando lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ otteniamo che

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 + O(x^4) \sim 2x^2 \quad \text{per } x \to 0,$$

e tenendo conto del fatto che $\exp(x^2) \sim 1$ abbiamo che

$$f(x) := \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{\exp(x^2)} \sim \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \quad \text{per } x \to 0^+,$$

ovvero la parte principale di $f(x)$ è $\sqrt{2}x$.

b) Per quanto visto al punto precedente, per $a \ne -\sqrt{2}$ si ha che

$$f(x) + ax = \sqrt{2}x + o(x) + ax \sim (\sqrt{2} + a)x$$

e dunque $(\sqrt{2} + a)x$ è la parte principale cercata.

Per $a = -\sqrt{2}$ la risposta è più complicata, e richiede uno sviluppo piú preciso dei vari elementi che compongono la funzione $f(x)$. Usando gli sviluppi

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^6) \quad \text{e} \quad \sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + O(t^2)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \cos(2x)} &= \sqrt{2x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)} \\ &= \sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{3} + O(x^4)} = \sqrt{2}\,x\Big[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big]\,,\end{aligned}$$

mentre dallo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ otteniamo

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + O(x^4)\,.$$

Mettendo insieme le ultime due formule (e usando ancora una volta il fatto che $\exp(x^2) \sim 1$) otteniamo infine

$$\begin{aligned}f(x) - \sqrt{2}x &= \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)} - \sqrt{2}x\,\exp(x^2)}{\exp(x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,x\big[1 - x^2/6 + O(x^4)\big] - \sqrt{2}x\big[1 + x^2 + O(x^4)\big]}{\exp(x^2)} \\ &= \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3 + O(x^5)}{\exp(x^2)} \sim -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3\,.\end{aligned}$$

3. a) L'equazione della retta R_a è

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = a^2(4a - 6)(x - a) + a^3(a - 2)$$

e per definizione $g(a)$ è il valore di x che risolve l'equazione $y = 0$, vale a dire

$$g(a) = \frac{a(3a - 4)}{2(2a - 3)}$$

per ogni $a \neq 3/2$ (per $a = 3/2$ la retta R_a è orizzontale e non interseca l'asse delle x).

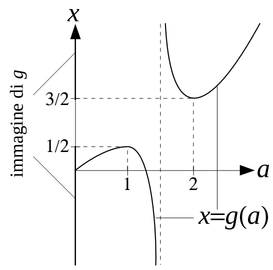
b) Viene chiesto di determinare l'immagine della funzione $g(a)$ definita per $a > 0$ e $a \neq 3/2$. Osserviamo che

$$\lim_{a\to 0^+} g(a) = 0\,, \qquad \lim_{a\to(3/2)^\pm} g(a) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{a\to+\infty} g(a) = +\infty\,.$$

Inoltre studiando il segno della derivata

$$g'(a) = \frac{3a^2 - 9a + 6}{(2a-3)^2} = \frac{3(a-1)(a-2)}{(2a-3)^2}$$

si ottiene che g cresce negli intervalli $(0, 1]$ e $[2, +\infty)$ e decresce in $[1, 3/2)$ e in $(3/2, 2]$. In particolare 1 è un punto di massimo locale (con valore $g(1) = 1/2$) mentre 2 è un punto di minimo locale (con valore $g(2) = 2$). Sulla base di queste informazioni tracciamo il disegno nella figura accanto, da cui risulta chiaro che l'immagine di g è data dall'unione delle semirette $(-\infty, 1/2]$ e $[2, +\infty)$.



SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 3\log x - x^6$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{-1/6}$, e pertanto
$$m := f(2^{-1/6}) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1) \simeq -0{,}846\,.$$
La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -4/5$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-4/5 = -0{,}8 > m$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt{2}x$, e quindi che la parte principale di $f(x) + ax$ è $(\sqrt{2} + a)x$ per $a \neq -\sqrt{2}$, ed $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ per $a = -\sqrt{2}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che
$$g(a) = \frac{(5a-12)a}{3(2a-5)}\,,$$
e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty, 4/3]$ e $[3, +\infty)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 4\log x - x^2$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{1/2}$, e pertanto
$$m := f(2^{1/2}) = 2(\log 2 - 1) \simeq -0{,}614\,.$$
La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -3/5$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-3/5 = -0{,}6 > m$.

2. Usando il fatto che $\sin(3x) \sim 3x$ e che il denominatore nella formula che definisce f tende a 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt[3]{3x} = 3^{1/3}x^{1/3}$. Poiché inoltre $x \ll x^{1/3}$ per $x \to 0$, la parte principale di $f(x) + ax$ è $3^{1/3}x^{1/3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che
$$g(a) = \frac{(5a-36)a}{3(2a-15)}\,,$$
e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty, 4]$ e $[9, +\infty)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 6 \log x - x^3$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{1/3}$, e pertanto
$$m := f(2^{1/3}) = 2(\log 2 - 1) \simeq -0{,}614 \,.$$
La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -1/3$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-1/3 = -0{,}333 > m$.

2. Usando il fatto che $\sin(3x) \sim 3x$ e che il denominatore nella formula che definisce f tende a 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt[3]{3x} = 3^{1/3}x^{1/3}$. Poiché inoltre $x \ll x^{1/3}$ per $x \to 0$, la parte principale di $f(x) + ax$ è $3^{1/3}x^{1/3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che
$$g(a) = \frac{3(a-4)a}{2(2a-9)} \,,$$
e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty, 3/2]$ e $[6, +\infty)$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno cercato di dimostrare la disequazione affidandosi ai disegni dei grafici delle funzioni coinvolte. Questo non è corretto perché i grafici sono molto vicini, e non è possibile capire da un disegno fatto a mano se si toccano o meno.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno cercato di dimostrare la disequazione assegnata confrontando il comportamento delle funzioni coinvolte all'infinito. Questo non è corretto, perché permette solo di dimostrare che la disequazione vale per ogni x da un certo punto in poi, mentre la domanda era se la disequazione vale per ogni x positivo.

- Seconda parte, esercizio 3a). Molti dei presenti hanno utilizzato la variabile x sia per indicare il punto il punto del grafico di cui si considera la retta tangente, sia per indicare la variabile indipendente nell'equazione della retta tangente stessa, cosa che ha creato molta confusione, e ovviamente ha portato a soluzioni non corrette. (Per questa ragione nelle soluzioni scritte sopra si è usata la variabile a per l'ascissa del punto di tangenza e la variabile x per l'equazione della retta tangente).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $+\infty$; b) 8; c) 1.

2. $-2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$.

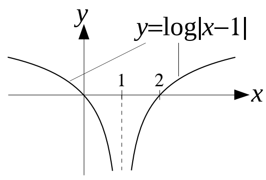
3. Ponendo $t = 1 - 3x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx = \int_0^1 \frac{t^{1/3}}{3}\, dt = \left| \frac{t^{4/3}}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

4. Il termine generale della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{2a-3}$ (a meno di un fattore $1/3$) e pertanto la serie è finita se e solo se $a > 2$.

5. Siccome $x^{2a}e^{-x} \ll e^{-x/2}$ l'integrale esiste ed è finito per tutti i valori di a.

6. $x(t) = \dfrac{e^t}{2} + 2$.

7. Equazione a variabili separabili: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t\, dt$ e quindi $\arctan x = e^t + c$; imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = -1 + \pi/4$ e infine
$$x(t) = \tan\Big(e^t - 1 + \frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $-\infty$; b) -1; c) 8.

2. $2x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

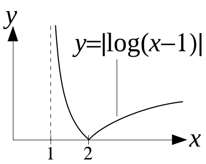
3. Ponendo $t = 1 - 4x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{1/4} \sqrt[4]{1-4x}\, dx = \int_0^1 \frac{t^{1/4}}{4}\, dt = \left| \frac{t^{5/4}}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{5}$.

4. Il termine generale della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{3a-3}$ (a meno di un fattore $1/2$) e pertanto la serie è finita se e solo se $a > 4/3$.

5. Siccome $x^{2a}\log x \gg x^{-1}$ quando $a > -1/2$ e $x^{2a}\log x \ll x^{-1-\delta}$ con $\delta = -a - 1/2 > 0$ quando $a < -1/2$, l'integrale esiste ed è finito se e solo se $a < -1/2$

6. $x(t) = \dfrac{e^t}{3} + 1$.

7. Equazione a variabili separabili: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \sin t\, dt$ e quindi $\arctan x = -\cos t + c$; imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = 1 + \pi/4$ e infine
$$x(t) = \tan\Big(-\cos t + 1 + \frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Cominciamo con la risposta alla domanda b), che include quella alla domanda a) come caso particolare. Poiché la (*) è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la soluzione generale è della forma

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_{\text{om}}(t)$$

Dove $\tilde{x}$ è una soluzione particolare della (*) e x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*). L'equazione caratteristica di quest'ultima è

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0\,, \tag{1}$$

e distinguiamo quindi tre casi sulla base del segno del discriminante $\Delta = 4(a^2 - 4)$.
Caso 1: se $a > 2$, cioè $\Delta > 0$, allora la (1) ha due soluzioni distinte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, per cui

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Caso 2: se $a = 2$, cioè $\Delta = 0$, allora la (1) ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$, per cui

$$x_{\text{om}}(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Caso 3: se $0 \le a < 2$, cioè $\Delta < 0$, allora la (1) ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{4 - a^2}$, per cui

$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\text{t} \tag{4}$$

Cerchiamo ora la soluzione particolare $\tilde{x}$ tra i polinomi di grado 1, vale a dire della forma $\tilde{x}(t) = bt + c$; così facendo la (*) si riduce a $(4b - 4)t + (4c - 2ab) = 0$, e questa identità è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $4b - 4 = 0$ e $4c - 2ab = 0$, vale a dire $b = 1$ e $c = a/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = t + \frac{a}{2}\,. \tag{5}$$

c) Osserviamo che la soluzione particolare in (5) soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{4t}$ per ogni a, e quindi il problema diventa quello di trovare gli a per cui esiste almeno una soluzione $x(t)$ dell'equazione *omogenea* tale che $x(t) \gg e^{4t}$.
Consideriamo i vari casi. Per $a < 2$ la formula (4) implica che $x_{\text{om}}(t) = O(e^{at}) \ll e^{4t}$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2 (ricordo che $a < 2$ e quindi $a < 4$) e quindi nessuno di questi a va bene. Analogamente per $a = 2$ la formula (4) implica che $x_{\text{om}}(t) = O(te^{2t}) \ll e^{4t}$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2, e neanche $a = 2$ va bene.
Nel caso $a > 2$, indichiamo con $\lambda(a) = a + \sqrt{a^2 - 4}$ la maggiore delle due soluzioni dell'equazione caratteristica. Se $\lambda(a) \le 4$ allora la formula (2) implica che $x_{\text{om}}(t) = O(e^{\lambda(a)\,t}) = O(e^{4t})$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2 e quindi a non va bene. Ma se invece $\lambda(a) > 4$ allora la formula (2) implica $x_{\text{om}}(t) \sim c_1 e^{\lambda(a)\,t} \gg e^{4t}$ quando $c_1 \ne 0$, e quindi queste soluzioni hanno la proprietà desiderata.
Da quanto appena detto risulta dunque che gli a cercati sono quelli che soddisfano $a > 2$ e $\lambda(a) = a + \sqrt{a^2 - 4} > 4$. Risolvendo questa disequazione otteniamo infine $a > 5/2$.

2. L'integrale è improprio in π e $-\pi$, e quindi va studiato spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici, per esempio

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx\,.$$

Poiché inoltre la funzione integranda è pari, i due integrali risultano essere uguali; in particolare l'integrale di partenza è finito se e solo se

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx$$

è finito. Utilizzando il cambio di variabile $x = \pi - t$ e il fatto che $\cos(\pi - t) = -\cos t$ trasformiamo questo integrale nel seguente

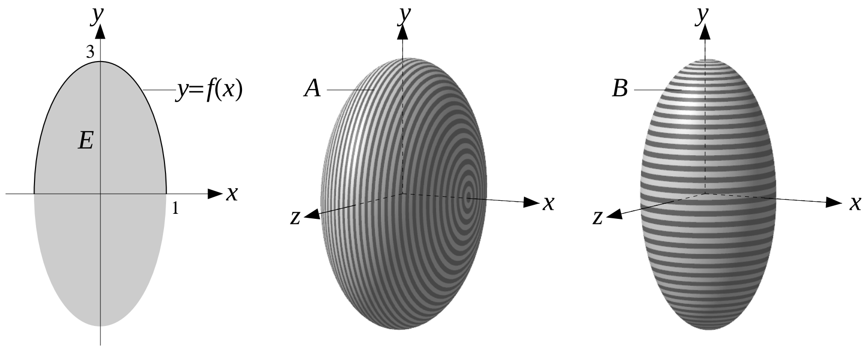
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(1 - \cos t)^a}\, dt\,, \tag{6}$$

che è improprio in 0. Usando ora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $\cos t$, otteniamo che $1 - \cos t \sim t^2/2$ per $t \to 0$ e quindi la funzione integranda in (6) è asintoticamente equivalente (a meno di un fattore 2^a) a $1/t^{2a}$. Per il teorema del confronto asintotico l'integrale in (6), e quindi anche quello di partenza, risultano essere finiti se e solo se $2a < 1$, ovvero $a < 1/2$.

3. a) L'insieme E è un'ellisse con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati, e per la precisione quello parallelo all'asse delle x ha lunghezza 1 mentre quello parallelo all'asse delle y ha lunghezza 3, come si vede nella figura sotto.
In effetti si può disegnare E anche senza usare il fatto che si tratta di un ellisse. Risolvendo la disequazione $9x^2 + y^2 \leq 9$ rispetto alla variabile y si ottiene infatti che E coincide con l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$-f(x) \leq y \leq f(x) \quad \text{dove } f(x) := 3\sqrt{1 - x^2}.$$

Osserviamo che la funzione $f(x)$ è definita per $-1 \leq x \leq 1$, pari, e decrescente per $0 \leq x \leq 1$, e sulla base di queste informazioni possiamo tracciare il grafico di f e quindi anche l'insieme E.



b) Il solido A è ottenuto facendo ruotare il grafico $y = f(x)$ attorno all'asse delle x, e quindi la formula per il volume dei solidi di rotazione ci dà

$$\text{volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} 9(1 - x^2)\, dx = 9\pi \Big| x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 12\pi\,.$$

c) Procediamo come al punto b) scambiando gli assi: risolvendo la disequazione $9x^2 + y^2 \leq 9$ rispetto alla variabile x si ottiene che E è l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$-g(y) \leq x \leq g(y) \quad \text{dove } g(y) := \sqrt{1 - y^2/9};$$

quindi il solido B è ottenuto a partire dalla rotazione del grafico $x = g(y)$ attorno all'asse delle y, e infine

$$\text{volume}(B) = \pi \int_{-3}^{3} \big(g(y)\big)^2\, dy = \pi \int_{-3}^{3} 1 - \frac{y^2}{9}\, dy = \pi \Big| y - \frac{y^3}{27} \Big|_{-3}^{3} = 4\pi\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_{\text{om}}(t)$$

dove la soluzione particolare $\tilde{x}$ è data

$$\tilde{x}(t) = t + \frac{2a}{9}$$

mentre la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ con } \lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{a^2 - 9} & \text{per } a > 3; \\ e^{3t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 3; \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \text{ con } \omega := \sqrt{9 - a^2} & \text{per } 0 \leq a < 3. \end{cases}$$

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che gli a cercati sono quelli per cui $a > 5$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. Analogo al gruppo 1. a) L'insieme E è l'ellisse con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati di lunghezza 2 (quello parallelo all'asse delle x) e 1 (quello parallelo all'asse delle y).
   b) Il solido A è ottenuto facendo ruotare il grafico $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ attorno all'asse delle x e quindi
   $$\text{volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\, dx = 4\pi \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{3}\,.$$
   c) Il solido B è ottenuto a partire dalla rotazione del grafico $x = \sqrt{1 - y^2/4}$ attorno all'asse delle y e quindi
   $$\text{volume}(B) = \pi \int_{-2}^{2} 1 - \frac{y^2}{4}\, dy = \pi \left| y - \frac{y^3}{12} \right|_{-2}^{2} = \frac{8\pi}{3}\,.$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Sorprendentemente, molti dei presenti hanno sbagliato il limite b) del gruppo 1 e il limite c) del gruppo 2.

- Prima parte, esercizio 7. Alcuni alcuni dei presenti hanno indicato solo il valore della costante c, invece che la soluzione dell'equazione come era richiesto. Altri non hanno osservato che l'inversa della funzione arcotangente è la tangente, o peggio ancora hanno scambiato la funzione inversa con il reciproco.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere l'equazione per $a < 2$ molti dei presenti hanno scritto $\omega = \sqrt{a^2 - 4}$, che non è un numero reale (qui mi riferisco al gruppo 1, discorso analogo vale per il gruppo 2). Altri hanno "prudentemente" evitato di scrivere la formula di ω. Infine diverse persone hanno fatto errori gravi nella risoluzione dell'equazione caratteristica, che un'equazione di secondo grado!

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere l'equazione al punto b) diversi dei presenti non hanno calcolato la soluzione particolare, ma si sono limitati a dire che deve essere un polinomio di primo grado.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno avuto difficoltà a impostare correttamente la soluzione del punto c). Molti hanno sbagliato a risolvere la disequazioni $a + \sqrt{a^2 - 4} \geq 4$ (o l'analoga disequazione per il gruppo 2).

- Seconda parte, esercizio 3. Al momento di scrivere i volumi di A e B come integrali, diversi dei presenti hanno omesso il fattore 2 che in un caso era necessario, mentre altri hanno sbagliato il dominio di definizione dell'integrale.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Deve essere $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$, vale a dire $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

2. a) $\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$; b) $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2)} = 2x(1+\tan^2(x^2))$; c) $(2x\log(x+1))' = 2\log(x+1) + \dfrac{2x}{x+1}$.

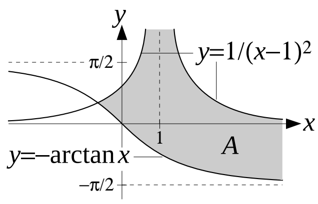
3. $6x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 71.820$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 3\sin x + 1$ si ottiene
$$\int e^{3\sin x+1} \cos x \, dx = \frac{1}{3}\int e^y \, dy = \frac{e^y}{3} + c = \frac{e^{3\sin x+1}}{3} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = ce^{-t^3}$, e ponendo $x(0) = 2$ si ottiene $x = 2e^{-t^3}$.

7. $a > 3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Deve essere $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$, vale a dire $-2 \leq x \leq -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} \leq x \leq 2$.

2. a) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3)} = 3x^2(1+\tan^2(x^3))$; c) $(3x\log(x+1))' = 3\log(x+1) + \dfrac{3x}{x+1}$.

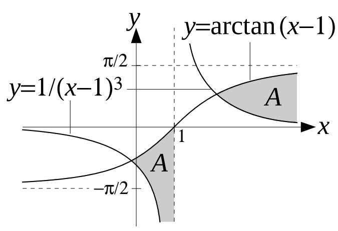
3. x^6.

4. $N = 9 \cdot 21^2 = 3.969$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 2\log x$ si ottiene
$$\int \frac{\sin(1-2\log x)}{x} dx = -\frac{1}{2}\int \sin y \, dy = \frac{\cos y}{2} + c = \frac{\cos(1-2\log x)}{2} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = c/t^2$, e ponendo $x(1) = 2$ si ottiene $x = 2/t^2$.

7. Nessun a.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Deve essere $-1 \leq 2x^2 - 3 \leq 1$, vale a dire $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ e $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

2. a) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$; b) $\dfrac{e^x}{\cos^2(e^x)} = e^x(1+\tan^2(e^x))$; c) $(3x\log(x-1))' = 3\log(x-1) + \dfrac{3x}{x-1}$.

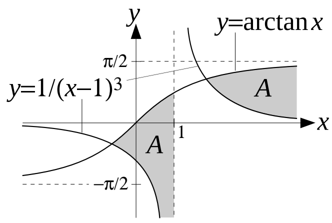
3. $-2x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21^3 = 83.349$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 3\cos x$ si ottiene
$$\int e^{1-3\cos x} \sin x \, dx = \frac{1}{3}\int e^y \, dy = \frac{e^y}{3} + c = \frac{e^{1-3\cos x}}{3} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = ce^{-t^3}$, e ponendo $x(1) = 1$ si ottiene $x = e\, e^{-t^3} = e^{1-t^3}$.

7. $a > 4$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Deve essere $-1 \le x^2 - \frac{1}{4} \le 1$, vale a dire $-\frac{\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\dfrac{1}{x\cos^2(\log x)} = \dfrac{1+\tan^2(\log x)}{x}$; c) $(2x\log(x-1))' = 2\log(x-1) + \dfrac{2x}{x-1}$.

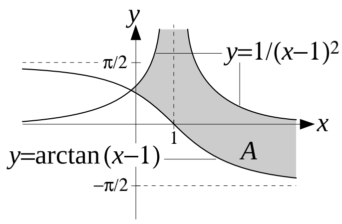
3. $8x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21 \cdot 20 = 3.780$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2\log x + 2$ si ottiene
$$\int \frac{\cos(2\log x + 2)}{x} dx = \frac{1}{2}\int \cos y \, dy = \frac{\sin y}{2} + c = \frac{\sin(2\log x + 2)}{2} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = c/t^3$, e ponendo $x(1) = 3$ si ottiene $x = 3/t^3$.

7. $a < 1$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. Osserviamo che la domanda a) è un caso particolare di b).
   b) Riscriviamo l'equazione (*) come
$$f(x) = 0 \quad \text{con} \quad f(x) := x^3 - ax^2 + 4a \tag{1}$$

e studiamo il grafico di $f(x)$. Osserviamo che questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

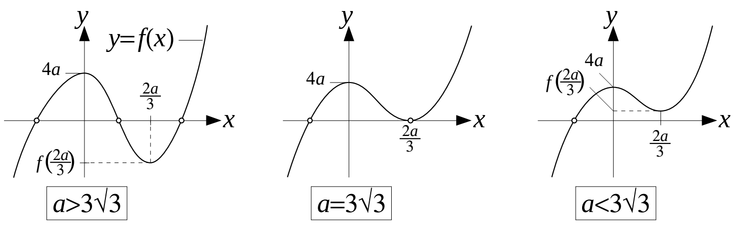
$$f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$$

si ottiene che f decresce per $0 \le x \le 2a/3$ e cresce altrove; in particolare $x = 0$ è un punto di minimo locale, dove la funzione assume il valore $f(0) = 4a$, mentre $x = 2a/3$ è un punto di minimo locale dove la funzione assume il valore

$$f\Big(\frac{2a}{3}\Big) = \frac{4a}{27}(27 - a^2)\,.$$

Nel disegnare il grafico di $f(x)$ dobbiamo distinguere tre casi a seconda del segno di $f(2a/3)$; per farlo osserviamo che questa quantità è negativa, nulla o positiva a seconda che a sia maggiore, uguale o minore del valore critico

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5{,}19\ldots$$



Dal disegno risulta chiaro che

- se $a > 3\sqrt{3}$ l'equazione (1), e quindi anche la (*), ha tre soluzioni;
- se $a = 3\sqrt{3}$ l'equazione (*) ha due soluzioni (di cui una coincide con $2a/3 = 2\sqrt{3}$);
- se $a < 3\sqrt{3}$ l'equazione (*) ha una soluzione.

a) Siccome $5 < 3\sqrt{3}$, per $a = 5$ l'equazione (*) ha una sola soluzione.

c) Dal disegno sopra risulta che per $a > 3\sqrt{3}$ la soluzione $x(a)$ è sempre maggiore del punto di minimo locale $2a/3$, e siccome $2a/3$ tende a $+\infty$ quando $a \to +\infty$, allora anche $x(a)$ tende a $+\infty$. Usando ora il fatto che $x(a)$ risolve l'equazione (*) si ottiene

$$x^3(a) = a(x^2(a) - 4) \sim a\, x^2(a)$$

da cui segue che $x(a) \sim a$ per $a \to +\infty$.

2. a) L'equazione $\dot{x} = x(x-2)$ è a variabili separabili e quindi (per $x \ne 0, 2$) la scriviamo come

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int dt\,. \tag{2}$$

Osserviamo ora che

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\big[\log|x-2| - \log|x|\big] = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{x-2}{x}\Big|\,,$$

e quindi la (2) diventa

$$\frac{1}{2}\log\Big|\frac{x-2}{x}\Big| = t + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

e dunque

$$\frac{x-2}{x} = \pm e^{2t+2c} = \pm e^{2c}e^{2t}\,.$$

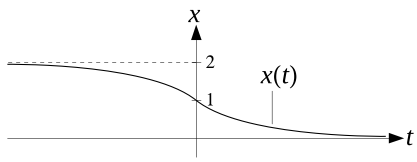
Indicando il numero $\pm e^{2c}$ semplicemente come c ed esplicitando la x otteniamo

$$x(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Imponendo infine che $x(0) = 1$ otteniamo $c = -1$, e dunque

$$x(t) = \frac{2}{1 + e^{2t}}\,.$$

Questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, tende a 0 per $t \to +\infty$ e tende a 2 per $t \to -\infty$; studiando inoltre il segno della derivata si ottiene che $x(t)$ è sempre strettamente decrescente. Sulla base di queste informazioni tracciamo il seguente disegno approssimativo del grafico di $x(t)$.



b) Per $a = 0$ e $a = 2$ si ha che $x(t) = 0$ e $x(t) = 2$ rispettivamente, e in entrambi i casi la soluzione $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per tutti gli altri valori di a otteniamo $x(t)$ imponendo la condizione $x(0) = a$ nella formula (3), vale a dire

$$x(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}} \quad \text{con } c := \frac{a-2}{a} .$$

Osserviamo che questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se il denominatore $1 - ce^t$ non si annulla mai, vale a dire se e solo se $c \le 0$, ovvero $0 < a < 2$. Riassumendo, la soluzione $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $0 \le a \le 2$.

3. a) Per $x \to +\infty$ si che che $f(x) \sim a/x$ e $g(x) \sim 2/x$ (uso il fatto che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$ e il cambio di variabile $t = 2/x$), da cui segue che

$$g(x) - f(x) \sim \frac{2-a}{x} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a \ne 2. \tag{4}$$

Per ottenere la parte principale di $g(x) - f(x)$ nel caso $a = 2$ dobbiamo utilizzare degli sviluppi più precisi sia per $f(x)$ che per $g(x)$. Mettendo in evidenza $2/x$ nell'espressione di $f(x)$ otteniamo

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^3 + 2} = \frac{2}{x}\,\frac{1}{1 + 2/x^3} = \frac{2}{x}\left(1 + 2/x^3\right)^{-1} ,$$

e usando lo sviluppo $(1 + t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con il cambio di variabile $t = 2/x^3$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(1 - 2/x^3 + O(1/x^6)\right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^4} + O\Big(\frac{1}{x^7}\Big) .$$

Usando invece lo sviluppo $\sin t = t - t^3/6 + O(t^6)$ e il cambio di variabile $t = 2/x$ otteniamo

$$g(x) = \sin\Big(\frac{2}{x}\Big) = \frac{2}{x} - \frac{4}{3x^3} + O\Big(\frac{1}{x^6}\Big) .$$

Mettendo insieme questi sviluppi otteniamo infine

$$g(x) - f(x) = -\frac{4}{3x^3} + O\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \sim -\frac{4}{3x^3} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a = 2. \tag{4'}$$

b) Utilizzando gli sviluppi (4) e (4') si ottiene che la funzione $g(x) - f(x)$ è asintoticamente equivalente a una funzione positiva per $a < 2$ e a una funzione negativa per $a \ge 2$.
Ne deduciamo che per $a < 2$ la funzione $g(x) - f(x)$ è positiva "da un certo punto in poi", ovvero esiste $x_0 > 1$ tale che $g(x) - f(x) > 0$ per ogni $x \ge x_0$; quindi $g(x) > f(x)$, e questo significa che l'insieme A contiene punti di ascissa x per ogni $x \ge x_0$. Di conseguenza A è un insieme illimitato.
Invece per $a \ge 2$ la funzione $g(x) - f(x)$ è negativa da un certo punto in poi, e quindi esiste $x_0 > 1$ tale che $g(x) < f(x)$ per ogni $x \ge x_0$, e questo significa che l'insieme A non contiene punti di ascissa x per $x \ge x_0$. Dunque A è compreso tra le rette verticali di ascisse 1 e x_0, e tra i grafici delle funzioni f e g, e in particolare è un insieme limitato.

c) Quando A è limitato, vale a dire per $a \ge 2$, la sua area è sicuramente finita, mentre quando A è illimitato, vale a dire per $a < 2$, la sua area potrebbe essere finita o infinita. In questo caso scriviamo A come unione di due sottoinsiemi: quello dei punti (x, y) con ascissa maggiore di x_0, detto A', e quello dei punti con ascissa minore di x_0, detto A''. Siccome A'' è limitato, la sua area è finita, e quindi bisogna capire se A' ha area finita oppure no. Ma l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_{x_0}^{+\infty} g(x) - f(x)\, dx$$

e siccome $g(x) - f(x)$ è asintoticamente equivalente (a meno di un fattore costante) a $1/x$, questo integrale improprio è infinito. quindi A' ha area infinita e lo stesso vale per A.
Riassumendo, A ha area finita se e solo se $a \ge 2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. b) Analogo al gruppo 1. L'equazione (*) ha tre soluzioni per $a > 6\sqrt{3} = 10{,}39\ldots$, ha due soluzioni per $a = 6\sqrt{3}$, e ha una soluzione per $a < 6\sqrt{3}$.

   a) Siccome $11 > 6\sqrt{3}$, per $a = 11$ l'equazione (*) ha tre soluzioni.

   c) Analogo al gruppo 1. La soluzione $x(a)$ soddisfa $x(a) < -a/3$ e quindi tende a $-\infty$ quando $a \to +\infty$, e per la precisione $x(a) \sim -a$.

2. a) Risolvendo l'equazione come per il gruppo 1 otteniamo
$$x(t) = -\frac{4e^{4t}}{1 + e^{4t}}\,.$$
   Dunque $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, è decrescente, tende a 0 per $t \to -\infty$ e a 4 per $t \to +\infty$.

   b) La soluzione $x(t)$ è definita per ogni t se e solo se $-4 \le a \le 0$.

3. a) Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim a/x^2$ e $g(x) \sim 1/x^2$ e quindi
$$g(x) - f(x) \sim \frac{1-a}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a \neq 1.$$
   Invece per $a = 1$ si ha $f(x) = 1/x^2 - 1/x^5 + O(1/x^8)$ e $g(x) = 1/x^2 - 1/(6x^6) + O(1/x^{10})$, e quindi
$$g(x) - f(x) \sim \frac{1}{x^5}\,.$$
   b) Argomentando come per il gruppo 1 si ottiene che l'insieme A è limitato se e solo se $g(x)-f(x)$ è asintoticamente equivalente a una funzione negativa, vale a dire se e solo se $a > 1$.

   c) A differenza di quello che succede per il gruppo 1 l'area di A risulta essere sempre finita, anche quando A è illimitato.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Una modo alternativo di risolvere l'esercizio consiste nello scrivere l'equazione (*) come
$$g(x) = a \quad \text{con} \quad g(x) := \frac{x^3}{x^2 - 4}$$
  (mi riferisco qui al gruppo 1) e studiare quindi il grafico della funzione $g(x)$.
  Il vantaggio di questo approccio è che la funzione g non dipende da a, e quindi c'è un unico grafico da disegnare (senza dover distinguere vari casi come nella soluzione data sopra). Lo svantaggio è che il grafico di questa funzione è leggermente più complesso di quello considerato nella soluzione data sopra.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno risolto l'equazione usando il seguente "principio": se $ab = c$ allora $a = c$ oppure $b = c$, cosa che però non è assolutamente versa se $c \neq 0$. Si tratta di un errore molto grave.

- Seconda parte, esercizio 3a). Sorprendentemente nessuno dei presenti ha ricavato correttamente la parte principale di $g(x) - f(x)$ per il valore critico di a.

Prima parte, gruppo 1.

1. Disegnando il grafico della funzione $\tan(2x)$ limitatamente all'intervallo $[0, \pi/2]$ si vede che la disequazione è soddisfatta per $x \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big) \cup \big[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\big]$.

2. a) $\dfrac{1-9x^2}{(1+x^2)^6}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}\right]' = \big[2(x-1)^2\big] = 4(x+1)$.

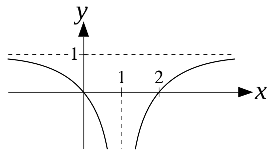
3. $2x$.

4. c $\ll$ d $\ll$ a $\ll$ b.

5. Ponendo $t = 1 - 2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{1-2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1} e^t\, dt = \frac{e}{4}$.

6. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti: la soluzione generale, che può essere ottenuta sommando la soluzione dell'equazione omogenea ad una soluzione particolare, è $x(t) = ae^{-t} + 3t - 3$ con $a \in \mathbb{R}$, e imponendo la condizione iniziale si ottiene infine
$$x(t) = 4e^{-t} + 3t - 3\,.$$

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim n^{2a}/2^n \ll (3/2)^n/2^n = (3/4)^n$ e quindi la serie è finita per ogni $a > 0$ (per confronto con la serie geometrica).

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. $x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{6}\Big] \cup \Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

2. a) $\dfrac{1+11x^3}{(1-x^3)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}\right]' = \big[3(x-1)^3\big]' = 9(x-1)^2$.

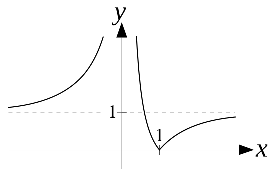
3. $2x^2$.

4. b $\ll$ a $\ll$ d $\ll$ c.

5. Ponendo $t = 1 - 2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{1-2x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int e^t\, dt = -\frac{1}{4}e^t + c = -\frac{1}{4}e^{1-2x^2} + c$.

6. $x(t) = 5e^{-t} + 3t - 3$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \gg 2^n/n^{a+2}$ che tende a $+\infty$ e quindi la serie non è finita per alcun a.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. $x \in \Big[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}\Big) \cup \Big[\dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{4}\Big)$.

2. a) $\dfrac{1+9x^2}{(1-x^2)^6}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}\right]' = \big[4(x+1)\big]' = 4.$

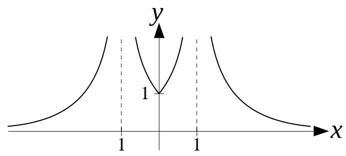
3. $2/x^3$.

4. b $\ll$ c $\ll$ d $\ll$ a.

5. Ponendo $t = 3-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{3-2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{3} e^t\, dt = \frac{e^3}{4}.$

6. $x(t) = 5e^{-t} + 2t - 2$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim 1$ per $a < 2$, $a_n \sim 1/2$ per $a = 2$ e $a_n \sim 1/n^{a-2}$ per $a > 2$ e quindi la serie è finita quando $a - 2 > 1$ cioè per $a > 3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left[-\dfrac{\pi}{8}, 0\right].$

2. a) $\dfrac{1-11x^3}{(1+x^3)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}\right]' = \big[2(x+1)^2\big]' = 4(x+1).$

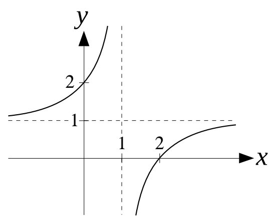
3. $2/x$.

4. a $\ll$ d $\ll$ b $\ll$ c.

5. Ponendo $t = 3-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{3-2x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int e^t\, dt = -\frac{1}{4}e^t + c = -\frac{1}{4}e^{3-2x^2} + c.$

6. $x(t) = 3e^{-t} + 2t - 2$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim n^{3a}/3^n \ll (3/2)^n/3^n = (1/2)^n$ e quindi la serie è finita ogni $a > 0$ (per confronto con la serie geometrica).

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right].$

2. a) $\dfrac{1+7x^2}{(1-x^2)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}\right]' = \big[3(x-1)^3\big]' = 9(x-1)^2.$

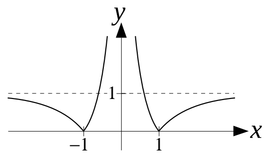
3. $2/x^2$.

4. c $\ll$ b $\ll$ d $\ll$ a.

5. Ponendo $t = 4 - x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{4} e^t\, dt = \frac{e^4}{2}$.

6. $x(t) = 3e^t - t - 1$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \gg 3^n/n^{3+a}$ che tende a $+\infty$ e quindi la serie non è finita per alcun a.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $x \in \Big[-\dfrac{7\pi}{8}, -\dfrac{3\pi}{4}\Big) \cup \Big[-\dfrac{3\pi}{8}, -\dfrac{\pi}{4}\Big)$.

2. a) $\dfrac{1-7x^2}{(1+x^2)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^x}}\right]' = \big[4(x+1)\big]' = 4$.

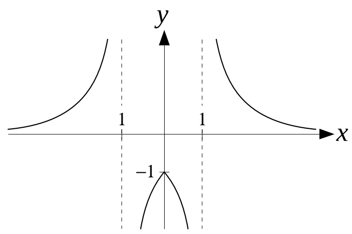
3. $-2x$.

4. c $\ll$ a $\ll$ d $\ll$ b.

5. Ponendo $t = 4 - x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{4-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int e^t\, dt = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + c$.

6. $x(t) = 4e^t - t - 1$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim 1$ per $a < 3$, $a_n \sim 1/2$ per $a = 3$ e $a_n \sim 1/n^{a-3}$ per $a > 3$ e quindi la serie è finita quando $a - 3 > 1$ cioè per $a > 4$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. b) Riscriviamo la disequazione $2x^2 + 3x - c \geq \log x$ come

$$f(x) \geq c \quad \text{con} \quad f(x) := 2x^2 + 3x - \log x\,,$$

e osserviamo che questa disequazione è soddisfatta per ogni $x > 0$ se e solo se il valore minimo m della funzione $f(x)$ tra tutti gli $x > 0$ (supponendo che esista) soddisfa $m \geq c$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{x}$$

otteniamo che la funzione decresce per $x \leq 1/4$ e cresce per $x \geq 1/4$; da questo segue che $x = 1/4$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi i valori di c cercati sono

$$c \leq m = f(1/4) = \frac{7}{8} + 2\log 2 \simeq 2{,}26\,.$$

a) La disequazione $2x^2 + 3x - 2 \geq \log x$ è quella considerata al punto b) per $c = 2$, e poiché $2 < m$, questa disequazione vale per tutti gli $x > 0$.

2. a) Scriviamo la funzione $f(x)$ nella forma

$$f(x) = 1 - \exp(g(x)) \quad \text{con} \quad g(x) := x \log\cos(1/x^a)\,, \tag{1}$$

e osserviamo che, quando x tende a $+\infty$, $h := \cos(1/x^a) - 1$ converge a 0 e quindi

$$\log\cos(1/x^a) = \log(1+h) \sim h = \cos(1/x^a) - 1 \sim -\frac{1}{2x^{2a}}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\cos t - 1 \sim -t^2/2$ per $t \to 0$). Dunque

$$g(x) \sim -\frac{x^{1-2a}}{2} \quad \text{per } x \to +\infty, \tag{2}$$

da cui segue che

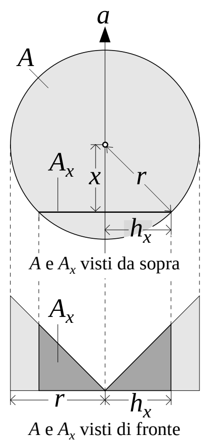
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < 1/2 \\ -1/2 & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 1/2 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}} & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2 \end{cases}. \tag{3}$$

b) Quando $x \geq 1$ si ha che $1/x^a$ è compreso tra 0 e 1, quindi $\cos(1/x^a)$ è strettamente positivo, e pertanto la funzione $f(x)$ è ben definita e continua, da cui segue che l'integrale che ci interessa è improprio solo all'infinito. Inoltre quando x tende a $+\infty$, sappiamo dalla formula (3) che per $a \leq 1/2$ la funzione $f(x)$ tende a un limite strettamente positivo e quindi l'integrale improprio vale $+\infty$. Se invece $a > 1/2$, usando la (1), il fatto che $1 - e^t \sim -t$ per $t \to 0$, e infine la (2) otteniamo

$$f(x) \sim -g(x) \sim \frac{1}{2x^{2a-1}} \quad \text{per } x \to +\infty;$$

applicando quindi il principio del confronto asintotico otteniamo che l'integrale che ci interessa è finito se e solo se $2a - 1 > 1$ ovvero $a > 1$.

3. a) Scegliamo come origine dell'asse a il centro della base del cilindro. Preso allora il punto di coordinata x su questo asse, indichiamo con A_x la sezione corrispondente di A, vale a dire l'intersezione di A con il piano ortogonale all'asse a che passa per il punto x. Come si vede dalla figura accanto, la sezione A_x è data dall'unione di due triangoli rettangoli con base uguale all'altezza h_x, dove



$$h_x = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Da questo segue che

$$\text{area}(A_x) = h_x^2 = r^2 - x^2\,.$$

b) Per quanto visto a lezione il volume di A è uguale all'integrale delle aree delle sezioni A_x per x compreso tra $-r$ e r, vale a dire

$$\begin{aligned} \text{volume}(A) &= \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\,dx \\ &= \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,dx = \Big| r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} r^3\,. \end{aligned}$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \leq m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 3x^2 + x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1/3) = 2/3 + \log 3 \simeq 1{,}76$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 2$, e poiché $2 > m$, non è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove

$$g(x) := \sin x \, \log(1 - 1/(2x^a)) \sim -\frac{\sin x}{2x^a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

b) Poiché $g(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$ abbiamo che $f(x) \sim -g(x)$; poiché inoltre $|\sin x| \le 1$ abbiamo che

$$|f(x)| \sim |g(x)| \le |\log(1 - 1/(2x^a))| \sim \frac{1}{2x^a}\,.$$

Pertanto, usando i vari criteri del confronto, otteniamo che l'integrale improprio di $|f(x)|$ è finito se $a > 1$, da cui segue anche l'integrale improprio di $f(x)$ è finito se $a > 1$. La discussione di quello che succede per $a \le 1$ è più complicata e la omettiamo.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \ge -m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 2x^2 - 3x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1) = -1$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 1$, e poiché $1 = -m$, è soddisfata per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove

   $$g(x) := x^2 \log\cos(2/x^a) \sim -2x^{2-2a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   da cui si ottiene che

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < 1 \\ -2 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{e^2} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

   b) Analogo al gruppo 1: l'integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $a > 3/2$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \le m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 3x^2 - x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1/2) = 1/4 + \log 2 \simeq 0{,}94$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 1$, e poiché $1 > m$, non è soddisfata per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove

   $$g(x) := x\,\sin x\,\log(1 - 1/x^a) \sim -x^{1-a}\sin x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   da cui si ottiene che

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } a \le 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } a \le 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

   b) Analogo al gruppo 2: l'integrale improprio esiste ed è finito se $a > 2$; omettiamo la discussione di quello che succede per $a \le 2$.

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Questo esercizio ha creato difficoltà alla maggior parte dei presenti, presumibilmente perché è stato affrontato per la via meno idonea.

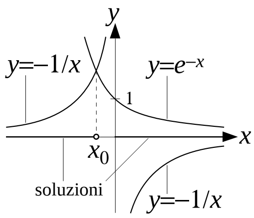
- Prima parte, esercizio 6. Chiaramente è possibile risolvere questo esercizio applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, ma questo comporta calcoli leggermente più complicati rispetto all'approccio suggerito sopra, vale a dire la risoluzione dell'equazione omogenea e la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

- Seconda parte, esercizio 2a). Per alcuni gruppi questo esercizio richiede di studiare varianti più o meno complicate del seguente problema: trovare il limite di $(1+t)^{1/t}$ per t che tende a 0 (la forma esatta dipende dal gruppo, ma il principio è questo).
  L'approccio di molti dei presenti (riportato a questo caso semplice) è stato quello di usare lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + ta + \cdots$ sostituendo poi ad a il valore $1/t$. Anche se in certe occasioni può dare il risultato giusto, questo procedimento non è corretto perché t non è una costante e anzi tende a $+\infty$, e infatti si ottiene come valore del limite 2 mentre quello corretto è e.
  Per quanto ne so, l'unico modo "semplice" di studiare il comportamento asintotico di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$, vale a dire potenze in cui sia la base che l'esponente sono funzioni, consiste nello scriverle come $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log(f(x))$ e quindi studiare il comportamento della funzione $g(x)\log(f(x)$. Questo "trucco" è stato spiegato in più occasioni, ma solo uno tra i presenti lo ha messo in pratica.

- Seconda parte, esercizio 3. Sia a' l'asse contenuto nel piano di base del cilindro, passante per il centro della base e ortogonale ad a: per calcolare il volume di A si possono anche considerare le sezioni di A ortogonali all'asse a', ovvero le intersezioni di A con i piani ortogonali al piano della base e paralleli all'asse a: questa sezioni sono tutte rettangoli, e se si sceglie come origine dell'asse a' il centro della base del cilindro, preso un punto y sull'asse a' la corrsipondente sezione A_y ha altezza $|y|$ e base $2\sqrt{r^2-y^2}$, per cui
  $$\begin{aligned}\text{volume}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A'_y)\,dy &= \int_{-r}^{r} |y|\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy \\ &= \int_0^r 4y\sqrt{r^2-y^2}\,dy = \int_0^{r^2} 2t^{1/2}\,dt = \frac{4}{3}r^3\end{aligned}$$
  (nel penultimo passaggio si usa il cambio di variabile $t = r^2 - y^2$).

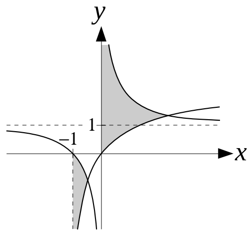
Prima parte, gruppo 1.

1. Va bene qualunque a della forma $a = -\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $\dfrac{1}{10} = f(-1)$.
3. a) $+\infty$; b) non esiste; c) 3.
4. $N = \dbinom{8}{5} = 56$.
5. $\log(5/3) = \log 5 - \log 3$.
6. L'integrale è finito per ogni a.
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\log\left(3 - 2t^{3/2}\right)$.
8. Le soluzioni sono $x \in (-\infty, x_0] \cup (0, +\infty)$ dove x_0 è dato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2.

1. Va bene qualunque a della forma $a = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $-\dfrac{1}{3} = f(1)$.
3. a) 0; b) $+\infty$; c) non esiste.
4. $N = \dbinom{7}{4} = 35$.
5. $\log(5/4) = \log 5 - \log 4$.
6. L'integrale è finito per $a < 1$.
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log(1 - 2\arctan t)$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.

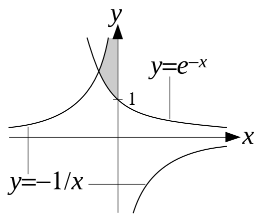


Prima parte, gruppo 3.

1. Va bene qualunque a della forma $a = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $\dfrac{1}{10} = f(1)$.
3. a) 0; b) non esiste; c) 1/2.
4. $N = \dbinom{9}{7} = 36$.
5. $\log(5/2) = \log 5 - \log 2$.
6. L'integrale è finito per $a < 1/3$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log(5 - 4\sqrt{t})$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Va bene qualunque a della forma $a = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. Il valore minimo è $-\dfrac{1}{3} = f(-1)$.

3. a) $1/3$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

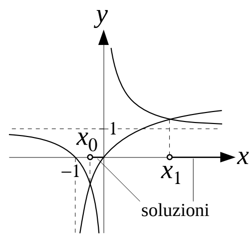
4. $N = \dbinom{8}{6} = 28$.

5. $\log 2$.

6. L'integrale è finito per $a > 1$.

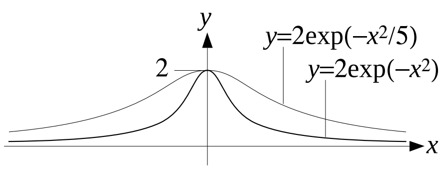
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\log(1 - 3\arctan t)$.

8. Le soluzioni sono $x \in [x_0, 0) \cup (x_1, +\infty)$ dove x_0 e x_1 sono dati nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Per ogni $a > 0$ la funzione $f(x) := 2\exp(-ax^2)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva e pari, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) = -4ax\exp(-ax^2)$ si vede che la funzione cresce per $x \le 0$ e decresce per $x \ge 0$; in particolare 0 è il punto di massimo assoluto, e il valore massimo della funzione è $f(0) = 2$. Sulla base di quanto appena detto tracciamo un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $a = 1$ e $a = 1/5$.



b) Il punto del grafico di f di ascissa x ha ordinata $y = f(x)$ e quindi la distanza d di questo punto dall'origine è data da
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 4\exp(-2ax^2)}\,.$$
Vogliamo trovare per quali x il valore di d è minimo, e trattandosi di una funzione pari ci limitiamo a considerare solo gli $x \ge 0$. Studiamo quindi il segno della derivata di d per $x \ge 0$:
$$d' = \frac{x\big(1 - 8a\exp(-2ax^2)\big)}{\sqrt{x^2 + 4\exp(-2ax^2)}}\,.$$
Il denominatore di questa espressione e il fattore x al numeratore sono sempre positivi, mentre studiando il segno del fattore $1 - 8a\exp(-2ax^2)$ al numeratore si hanno due casi: se $\log(8a) \ge 0$, vale a dire se $a \ge 1/8$, tale fattore è positivo per
$$x \ge x_a := \sqrt{\frac{\log(8a)}{2a}}$$
e negativo altrimenti, mentre se $a \le 1/8$ tale fattore è positivo per ogni $x \ge 0$. Nel primo caso la funzione d decresce per $0 \le x \le x_a$ e cresce altrimenti, da cui segue che x_a è il punto di minimo assoluto, mentre nel secondo caso d risulta essere crescente per $x \ge 0$ e quindi 0 è il

punto di minimo assoluto.
Riassumendo, i punti del grafico di f per cui la distanza d è minima sono quelli di ascissa

$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \le 1/8, \\ \pm x_a & \text{se } a > 1/8. \end{cases}$$

2. a) La (*) è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. La corrispondente equazione caratteristica è $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ e l'unica soluzione è $\lambda = -4$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome il coefficiente -4 nel termine noto della (*) coincide con la soluzione (doppia) dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\tilde{x}(t) = \alpha t^2 e^{-4t} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo l'identità $2\alpha e^{-4t} = e^{-4t}$, che è verificata per $\alpha = 1/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $\frac{1}{2}t^2 e^{-4t}$ mentre la soluzione generale è

$$x(t) = \left(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\right)e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Distinguiamo diversi casi a seconda del segno del discriminante dell'equazione caratteristica. Per $\Delta > 0$ l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 8}$$

e quindi la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se inoltre queste soluzioni sono entrambe diverse da -4, la (*) ammette una soluzione particolare della forma αe^{-4t} (non calcoliamo il valore esatto di α perché non ci serve) e quindi la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se invece λ_1 o λ_2 sono uguali a -4 la soluzione particolare sarà della forma $\alpha t e^{-4t}$. Sia in un caso che nell'altro si vede chiaramente che è possibile trovare una soluzione asintoticamente equivalente a ce^t per $t \to +\infty$ se e solo se λ_1 o λ_2 sono uguali a 1, e quindi i valori di a cercati sono quelli per cui

$$-a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 8} = 1\,;$$

spostando il $-a$ a destra dell'uguale ed elevando al quadrato otteniamo un'equazione di primo grado $-2a - 8 = 2a + 1$ la cui soluzione è

$$a = -9/4\,.$$

Per $\Delta < 0$ la soluzione generale della (*) è invece della forma

$$x(t) = e^{rt}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e quindi non può mai essere asintoticamente equivalente a ce^t.
Resta da considerare il caso $\Delta = 0$, che si verifica per $a = 4, -2$. Per $a = 4$ la soluzione della (*) è data dalla formula (1) e non è mai asintoticamente equivalente a ce^t. Per $a = -2$ la soluzione è della forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e di nuovo non può mai essere asintoticamente equivalente a ce^t.
Riassumendo, l'unico valore di a che soddisfa quanto richiesto è $a = -9/4$.

c) Per $a = -9/4$ le soluzioni dell'equazione caratteristica sono 1 e $7/2$, una soluzione particolare della (*) è $\tilde{x}(t) = \alpha e^{-4t}$ con $\alpha = 2/75$, e infine la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{7t/2} + \frac{2}{75}e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

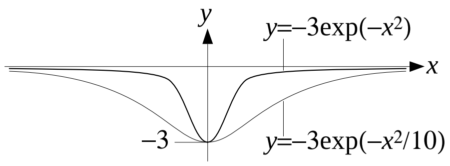
Siccome $7/2$ è maggiore di 1, questa soluzione è asintoticamente equivalente a ce^t se e solo se $c_2 = 0$ e $c_1 = c$. Dunque le soluzioni cercate sono quelle della forma

$$x(t) = ce^t + \frac{2}{75}e^{-4t} \quad \text{con } c \neq 0.$$

3. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ ed vale zero se
$$\exp(x^2) = \exp(x^{1/2}) \;\Leftrightarrow\; x^2 = x^{1/2} \;\Leftrightarrow\; x(x^{3/2} - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,\, x \geq 1\,.$$
Quindi l'integrale che ci interessa è improprio per $x = 0$, $x = 1$ e $x = +\infty$, e per studiarlo lo scomponiamo in integrali impropri semplici come segue:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^{1/2} \cdots + \int_{1/2}^{1} \cdots + \int_1^2 \cdots + \int_2^{+\infty} \cdots\,. \tag{2}$$
Cominciamo a studiare il terzo integrale alla destra dell'uguale, applicando il cambio di variabile $x = 1 + t$ in modo da ricondurci ad un integrale improprio in $t = 0$:
$$\int_1^2 \frac{dx}{f(x)} = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)}\,; \tag{3}$$
osserviamo ora che per $t = 0$ la funzione $f(1+t)$ vale 0 mentre la sua derivata vale $3/2$; quindi il suo sviluppo di Taylor all'ordine 1 è
$$f(1+t) = \frac{3t}{2} + O(t^2)$$
e pertanto per $t \to 0$ si ha
$$f(1+t) \sim \frac{3t}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(1+t)} \sim \frac{2}{3t}\,,$$
da cui segue per il principio del confronto asintotico che l'integrale improprio in (3), ovvero il terzo integrale alla destra dell'uguale in (2), è uguale a $+\infty$.
Con lo stesso ragionamento si dimostra che il secondo integrale alla destra dell'uguale in (2) è uguale a $-\infty$, e ciò è già sufficiente a concludere che l'integrale improprio di partenza non esiste, senza bisogno di studiare i rimanenti integrali in (2).

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è strettamente negativa e pari, tende a 0 per $x \to \pm\infty$, decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$; in particolare 0 è il punto di minimo assoluto, e il quindi il valore di minimo assoluto è $f(0) = -3$. Nella figura sotto è riportato il disegno del grafico di f per $a = 1$ e $a = 1/10$.



b) La distanze cercata è
$$d = \sqrt{x^2 + 9\exp(-2ax^2)}$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che i punti del grafico di f per cui la distanza d è minima sono quelli di ascissa
$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 1/18 \\ \pm x_a & \text{se } a > 1/18 \end{cases} \quad \text{dove} \quad x_a := \sqrt{\frac{\log(18\,a)}{2a}}\,.$$

2. Analogo al gruppo 1. a) La soluzione dell'equazione (*) per $a = 3/2$ è
$$x(t) = \big(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\big)e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
b) I valori di a cercati sono quelli per cui
$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a - 3} = \frac{1}{2} \quad \text{vale a dire} \quad a = -\frac{13}{24}\,.$$
c) La soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -13/24$ è
$$x(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{5t/3} + \frac{3}{49}e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome $5/3$ è maggiore di $1/2$ questa soluzione è asintoticamente equivalente a $ce^{t/2}$ se e solo se $c_2 = 0$ e $c_1 = c$, e dunque le soluzioni cercate sono

$$x(t) = ce^{t/2} + \frac{3}{49}e^{-3t} \quad \text{con } c \neq 0.$$

3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Analogo al gruppo 2.
   b) La distanza d è uguale a quella nel gruppo 1, e quindi anche i punti di minima distanza.
2. Uguale al gruppo 1.
3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Analogo al gruppo 1.
   b) La distanza d è uguale a quella nel gruppo 2, e quindi anche i punti di minima distanza.
2. Uguale al gruppo 2.
3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1b). Al momento di studiare il segno della derivata di d diversi dei presenti hanno avuto difficoltà con lo studio del segno del fattore $1 - 8a\exp(-2ax^2)$, e in particolare pochi si sono accorti del fatto che questo termine è sempre positivo se $a \leq 1/8$ (qui mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale per gli altri gruppi).

- Seconda parte, esercizio 2b). Come spiegato sopra, si tratta di trovare i valori di a per cui 1 risolve l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 2a\lambda + 2a + 8 = 0$$
(mi riferisco al gruppo 1) e il modo usato per risolvere questo problema consiste nello scrivere le soluzioni $\lambda_{1,2}$ di questa equazione in funzione di a e di imporre che siano uguali a 1. Un modo alternativo e più elegante consiste nel sostituire 1 nell'equazione caratteristica, ottenendo
$$1 + 2a + 2a + 8 = 0\,,$$
e cercare quindi gli a per cui tale equazione è effettivamente soddisfatta, vale a dire $a = -9/4$.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti si sono accorti del fatto che questo integrale è improprio in 0 e $+\infty$, ma non che è improprio in 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

2. a) $\dfrac{3}{2}$; b) $+\infty$.

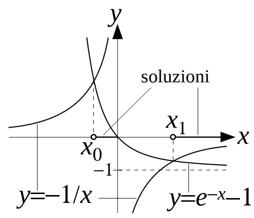
3. Il punto di massimo è 2.

4. $N = 5 \cdot 10^3 = 5000$.

5. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1) - (x^2-1)\, dx = \frac{9}{2}$.

6. Si ha $\sqrt[3]{1+n^{-2a}} - 1 \sim \dfrac{1}{3n^{2a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{2t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{2t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = \frac{e^{2t}}{2} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = -3/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{3 - e^{2t}}\,.$$



8. La soluzioni sono $x_0 \leq x < 0$ e $x \geq x_1$ con x_0 e x_1 come in figura.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

2. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) 2.

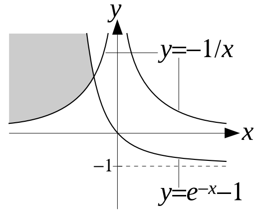
3. Il punto di minimo è 4.

4. $N = 5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$.

5. $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} (1-2x^2) - (2x-3)\, dx = 9$.

6. Si ha $\sqrt[2]{1+n^{-2a}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^{2a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{2t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{2t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = \frac{e^{2t}}{2} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 1/2$. Quindi
$$x(t) = -\frac{2}{1 + e^{2t}}\,.$$



8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. a) 2; b) $\frac{2}{3}$.

3. Il punto di massimo è 1.

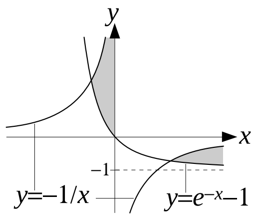
4. $N = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$.

5. $A = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\, dx = \frac{9}{2}$.

6. Si ha $\sqrt[3]{1+n^{-3a}} - 1 \sim \frac{1}{3n^{3a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{3}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{-t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{-t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = -e^{-t} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 1/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{2e^{-t}-1} = \frac{2e^t}{2-e^t}\,.$$

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2. a) $\frac{1}{2}$; b) 0.

3. Il punto di minimo è 0.

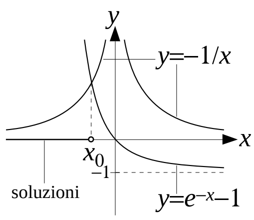
4. $N = 5 \cdot 10^2 = 500$.

5. $A = \int_{-1}^{3} (3-2x^2) - (2x-1)\, dx = 9$.

6. Si ha $\sqrt[2]{1+n^{-3a}} - 1 \sim \frac{1}{2n^{3a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{3}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{-t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{-t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = -e^{-t} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 3/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{2e^{-t}-3} = \frac{2e^t}{2-3e^t}\,.$$

8. La soluzioni sono $x \le x_0$ con x_0 come nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. La funzione $e^x - e$ è strettamente positiva per $x > 1$ e si annulla per $x = 1$. Pertanto la funzione $(e^x - e)^{1+2a}$ è ben definita e strettamente positiva per $x > 1$, mentre per $x = 1$ è ben definita solo se l'esponente $1 + 2a$ è strettamente positivo.
In generale dunque l'integrale che ci interessa è improprio sia in 1 che in $+\infty$, ed esiste sempre, in quanto integrale di una funzione positiva. Resta quindi da capire quando è finito e quando no.

Conviene a questo punto utilizzare il cambio di variabile $x = t + 1$ in modo da riportarsi ad un integrale improprio in 0 e $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a} dx &= \int_0^{+\infty} (e^{t+1} - e)^{1+2a} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(e(e^t - 1)\big)^{1+2a} dt = e^{1+2a} \int_0^{+\infty} (e^t - 1)^{1+2a} dt\end{aligned}$$

Spezziamo ora l'ultimo integrale come somma dell'integrale tra 0 e 1 (improprio in 0) e dell'integrale tra 1 e $+\infty$ (improprio in $+\infty$). Osserviamo quindi che per $t \to +\infty$ si ha $e^t - 1 \sim e^t$ e quindi

$$(e^t - 1)^{1+2a} \sim e^{(1+2a)t} .$$

Ricordiamo ora che

$$\int_0^{+\infty} e^{bt}\, dt < +\infty \quad \text{se e solo se } b < 0,$$

e dunque, per il principio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} (e^t - 1)^{1+2a} dt < +\infty \quad \text{se e solo se } 1 + 2a < 0, .$$

Studiamo ora l'integrale tra 0 e 1: per $t \to 0$ si ha $e^t - 1 \sim t$ e quindi $(e^t - 1)^{1+2a} \sim t^{1+2a}$; pertanto, ricordando che

$$\int_0^1 t^b\, dt < +\infty \quad \text{se e solo se } b > -1$$

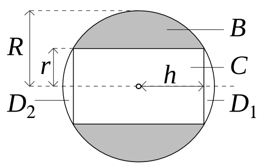
ed usando di nuovo il principio del confronto asintotico, otteniamo che

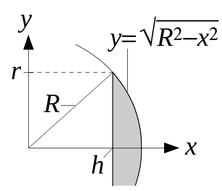
$$\int_0^1 (e^t - 1)^{1+2a} dt < +\infty \quad \text{se e solo se } 1 + 2a > -1. .$$

Mettendo insieme questi risultato otteniamo che l'integrale improprio di partenza è finito se e solo se $-1 < 1 + 2a < 0$, vale a dire

$$-1 < a < -\frac{1}{2} .$$

2. Il volume dell'oggetto ottenuto B ottenuto bucando la sfera S è dato dal volume di S meno il volume del cilindro C e delle due calotte sferiche D_1 e D_2 disegnati nella figura sotto a sinistra (per la precisione la figura riporta il disegno di una sezione assiale).





Detto R il raggio della sfera, r il raggio del cilindro (vale a dire il raggio della punta del trapano), e h la semi-altezza del cilindro, per il teorema di Pitagora si ha

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = 6\,\text{mm} . \tag{1}$$

Pertanto

$$\text{volume}(S) = \frac{4\pi}{3} R^3 , \quad \text{volume}(C) = 2\pi r^2 h = 2\pi (R^2 - h^2) h . \tag{2}$$

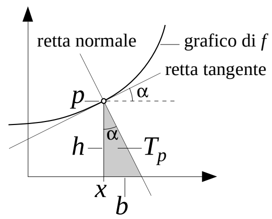
Le due calotte sferiche hanno chiaramente uguale volume, e per calcolarlo le vediamo come solidi di rotazione, come suggerito nella figura sopra a destra:

$$\text{volume}(D_1) = \int_h^R \pi (R^2 - x^2)\, dx = \pi \bigg| R^2 x - \frac{x^3}{3} \bigg|_h^R = \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2 h + h^3) . \tag{3}$$

Mettendo insieme le formule (1-3) otteniamo infine

$$\begin{aligned}\text{volume}(C) &= \text{volume}(S) - \text{volume}(C) - 2\cdot\text{volume}(D_1)\\ &= \frac{\pi}{3}\big(4R^3 - 6R^2h + 6h^3 - 4R^3 + 6R^2h - 2h^3\big)\\ &= \frac{4\pi}{3}h^3 = (904{,}8 \pm 0{,}1)\,\text{mm}^3\,.\end{aligned}$$

3. a) Indichiamo con x l'ascissa del punto p. Come si vede nella figura accanto, l'angolo α corrispondente al vertice p del triangolo T_p è uguale all'angolo formato dalla retta tangente al grafico di f in p e l'asse delle x, ed in particolare la tangente di α è il coefficiente angolare della retta tangente, vale a dire $f'(x)$. Dunque l'altezza e la base del triangolo T_p sono date rispettivamente da $h = f(x)$ e $b = h\tan\alpha = f(x)\,f'(x)$, e quindi



$$\text{area}(T_p) = \frac12 bh = \frac12 f^2(x)\,f'(x)\,.$$

b) Stiamo cercando tutte le funzioni f per cui l'area di T_p assume lo stesso valore, che indichiamo con a, per tutti i punti p, ovvero

$$\frac12 f^2(x)\,f'(x) = a \quad \text{per ogni } x.$$

In altre parole f deve risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili $\frac12 f^2 f' = a$ (quindi la funzione incognita è f e la variabile indipendente è x, contrariamente al solito dove x è la funzione incognita e t la variabile indipendente). Procedendo come visto a lezione si ottiene quindi

$$\frac12\int f^2 df = \int a\,dt\,,\ \text{cioè}\ \frac16 f^3 = ax+b\,,\ \text{cioè}\ f = \sqrt[3]{6ax+6b}\,.$$

Essendo inoltre a e b costanti scelte arbitrariamente, possiamo eliminare il fattore 6 nell'ultimo termine, ottenendo che le funzioni cercate sono tutte e sole quelle della forma

$$f(x) = \sqrt[3]{ax+b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Sostanzialmente uguale al gruppo 1 (cambia solo un esponente): l'integrale esiste sempre, è finito per $-\frac23 < a < -\frac13$, ed è uguale a $+\infty$ altrimenti.

2. Sostanzialmente uguale al gruppo 1 (cambiano solo le misure del diametro della sfera e della punta del trapano: in questo caso $R = 8{,}5$ mm, $r = 4$ mm, quindi $h = 7{,}5$ mm e la formula per il volume trovata prima ci da

$$\text{volume}(B) = (1767{,}1 \pm 0{,}1)\,\text{mm}^3\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. In tutti i gruppi uno dei due limiti era del tipo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^3)}{\log(2+x^2)}\,.$$

Per calcolarlo si noti che $\log(2+x^2) \sim \log(x^2) = 2\log x$ per $x \to +\infty$, ed analogamente $\log(1+x^3) \sim 3\log x$, per cui il limite è uguale a $3/2$. La maggior parte dei presenti ha sbagliato questo esercizio, forse pensando che siccome $2+x^2 \ll 1+x^3$ allora si ha anche $\log(2+x^2) \ll \log(1+x^3)$, mentre invece così non è.

- Seconda parte, esercizio 1. Una soluzione alternativa (proposta da una dei presenti) la si ottiene usando il cambio di variabile $t := e^x - e$: nel caso del gruppo 1 si ottiene infatti

$$\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a} dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{1+2a}}{t+e}}_{g(t)} dt\,,$$

  quindi si spezza l'integrale a destra dell'uguale come somma di due integrali impropri semplici (il primo tra 0 e 1 e l'altro tra 1 e $+\infty$) e si osserva che per $t \to 0^+$ si ha $g(t) \sim t^{2a+1}$ e quindi il primo integrale improprio è finito se e solo se $2a+1 > -1$, cioè $a > -1$, mentre per $t \to +\infty$ si ha $g(t) \sim t^{2a}$ e quindi il secondo integrale improprio è finito se e solo se $2a < -1$, cioè $a < -1/2$.

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti non si è accorta che la funzione da integrare non è definita in 1 quando l'esponente è negativo, e pertanto ha trattato questo integrale come se fosse improprio solo in $+\infty$.

- Seconda parte, esercizio 1. Nella discussione dell'integrale improprio all'infinito alcuni hanno trattato e^{bx} come se fosse x^b, e quindi hanno detto che l'integrale converge se e solo se $b < -1$ (mentre invece basta $b < 0$).

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $(2x - 2x^2)e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}$; b) $\dfrac{2}{1+x} + \dfrac{3}{1-x} = \dfrac{5+x}{1-x^2}$.

2. b $\ll$ a $\ll$ c $\ll$ d.

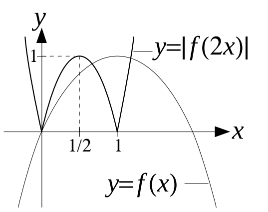
3. $-x^2/2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{2} + 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -2, -1$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = -1$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^t + 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = -e^t + 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 2\frac{1}{1-2/3} = 6$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $-\dfrac{2}{1-x} - \dfrac{3}{1+x} = \dfrac{x-5}{1-x^2}$; b) $(2x-3x^2)e^{-3x} = x(2-3x)e^{-3x}$.

2. b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a.

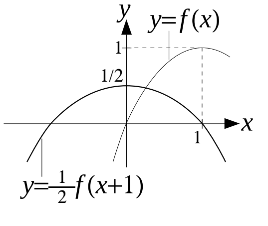
3. $-1/x^2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{3} - 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3(x+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -3, 1$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 1$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^{-t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^{-t} - 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = e^{-t} - 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n = 3\frac{1}{1-3/4} = 12$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $(3x^2 - 2x^3)e^{-2x} = x^2(3-2x)e^{-2x}$; b) $\dfrac{3}{1+x} + \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{5-x}{1-x^2}$.

2. a $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ b.

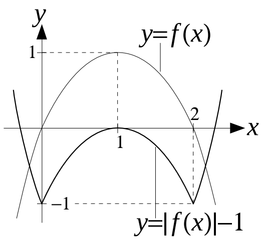
3. $-x^2/12$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{3} + 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3(x-1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = 1, 2$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 2$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^t - 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = e^t - 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-3/4} = 1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $-\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{2}{1+x} = -\dfrac{5+x}{1-x^2}$; b) $(3x^2 - 3x^3)e^{-3x} = 3x^2(1-x)e^{-3x}$.

2. d $\ll$ c $\ll$ a $\ll$ b.

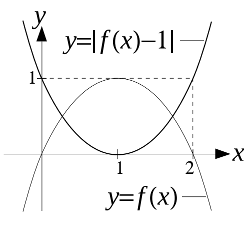
3. $-6/x^2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{2} - 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -1, 3$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 3$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^{-t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^{-t} + 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = -e^{-t} + 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-2/3} = 1$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Procediamo per passi: l'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} + x = 0$, l'equazione caratteristica corrispondente è $\lambda^2 + 1 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda = \pm i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è:
$$x_{\text{om}}(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Osserviamo adesso che il termine noto della (*) non appare nel ricettario dato a lezione, ma si scrive come somma di due termini, 1 e $\sin(at)$, che ci appaiono. Pertanto una soluzione particolare della (*) la otterremo come somme di due soluzioni particolari x_1 e x_2 delle seguenti equazioni
$$\ddot{x} + x = 1\,, \quad \ddot{x} + x = \sin(at)\,.$$
Il termine noto della prima di queste due equazioni è una costante (o polinomio di grado 0) e quindi una soluzione particolare la si trova tra le costanti, e per la precisione
$$x_1(t) = 1\,. \tag{2}$$
Per quanto riguarda la seconda equazione, il ricettario dice di cercare una soluzione particolare tra le funzioni della forma $x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e facendo i dovuti conti otteniamo
$$x_2(t) = \frac{\sin(at)}{1-a^2}\,. \tag{3}$$
Mettendo insieme (1-3) otteniamo infine che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + 1 + \frac{\sin(at)}{1-a^2} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Imponiamo ora che x soddisfi le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; così facendo otteniamo
$$\begin{cases} 0 = x(0) = \alpha_1 + 1 \\ 0 = \dot{x}(0) = \alpha_2 + \frac{a}{1-a^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -\frac{a}{1-a^2} \end{cases}$$
e la soluzione cercata è quindi
$$x(t) = 1 - \cos t + \frac{\sin(at) - a\sin(t)}{1-a^2} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}..$$
b) Rivedendo quanto fatto sopra ci si accorge che la soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x}+x = \sin(at)$ data nella formula (3) non ha senso per $a = 1$. Infatti per $a = 1$ le funzioni della forma $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ sono soluzioni dell'equazione omogenea e pertanto non possono essere anche soluzioni della non omogenea, e di conseguenza la soluzione particolare va cercata tra le funzioni della forma $x(t) = c_1 t \cos t + c_2 t \sin t$. Facendo i dovuti conti si ottiene
$$x_2(t) = -\frac{t}{2} \cos t\,,$$
e la soluzione generale della (*) per $a = 1$ è
$$x(t) = \Big(\alpha_1 - \frac{t}{2}\Big) \cos t + \alpha_2 \sin t + 1 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}..$$

2. Osserviamo innanzitutto che la serie in questione è a termini positivi e quindi ci sono solo due comportamenti possibili: la serie converge ad un numero finito oppure diverge a $+\infty$. Osserviamo inoltre che per $n \to +\infty$ il termine generico soddisfa
$$\frac{n + \log n}{n^2 \log^a n} \sim \frac{1}{n \log^a n}\,.$$
Pertanto, per il principio del confronto asintotico il comportamento della nostra serie coincide con quello di
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^a n}\,,$$
e per il principio del confronto integrale il comportamento di quest'ultima serie coincide con quello dell'integrale improprio
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^a x}\,.$$

Come visto a lezione, applicando il cambio di variabile $t = \log x$ questo integrale diventa

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$$

e pertanto converge ad un numero finito se e solo se $a > 1$.
E lo stesso vale per la serie di partenza.

3. a) Osserviamo che i seguenti fatti sono equivalenti:
   (i) $f(x) = x^5 - ax^3 + 9x$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$;
   (ii) $f'(x) = 5x^4 - 3ax^2 + 9 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   (iii) il valore minimo di f' su $\mathbb{R}$ è maggiore o uguale a 0.

   Dobbiamo dunque calcolare il valore minimo m di f' su tutto $\mathbb{R}$ e poi determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $m \geq 0$. Per trovare il punto di minimo di f' studiamo il segno della derivata $f''(x) = 20\,x^3 - 6ax = x(20\,x^2 - 6a)$. Si presentano due casi: se $a \leq 0$ otteniamo che $x = 0$ è il punto di minimo assoluto, per cui $m = f'(0) = 9$ ed è sempre positivo; se invece $a > 0$ abbiamo che $x = \pm\sqrt{3a/10}$ sono i punti di minimo assoluto, per cui

$$m = f'\big(\pm\sqrt{3a/10}\big) = \frac{9}{20}(20 - a^2)\,,$$

   ed in particolare $m \geq 0$ per $a \leq \sqrt{20}$ (ricordo che $a > 0$ per ipotesi). In conclusione f è crescente su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a \leq \sqrt{20}$.

   b) Osserviamo che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a x^5 per $x \to +\infty$, vale a dire

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^5} = 1\,.$$

   Usando ora il cambio di variabile $y = f(x)$, e tenendo conto che $x \to +\infty$ quando $y \to +\infty$, otteniamo

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(f^{-1}(y))^5} = 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{1/5}}{f^{-1}(y)} = 1$$
$$\Rightarrow\quad f^{-1}(y) \sim y^{1/5} \text{ per } y \to +\infty.$$

   Analogamente, usando il fatto che $f(x) \sim 9x$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$f^{-1}(y) \sim \frac{y}{9} \quad \text{per } y \to 0.$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 5. Stranamente quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente questo esercizio.

- Prima parte, esercizio 6. È anche possibile anche riscrivere l'equazione differenziale in questione come un'equazione a variabili separabili; per esempio per il gruppo 1 si ha $\dot{x} = x - 1$.

- Seconda parte, esercizio 3a). Un modo alternativo per capire quando vale la condizione

$$f'(x) = 5x^4 - 3ax^2 + 9 \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

  è utilizzare il cambio di variabile $x^2 = t$ per riscriverla come

$$5t^2 - 3at + 9 \geq 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0. \tag{4}$$

  Qui c'è un punto delicato: detto $\Delta = 9(a^2 - 20)$ il discriminante del trinomio $5t^2 - 3at + 9$, la condizione $\Delta \leq 0$ è *sufficiente* affinché valga la (4), ma non è *necessaria*. Infatti la (4) vale anche quando $\Delta > 0$ e le radici di $5t^2 - 3at + 9$ sono entrambe negative o nulle.

- Seconda parte, esercizio 3a). Nessuno dei presenti ha risolto correttamente questo esercizio. E nello studiare il segno della derivata, alcuni dei hanno anche detto che la disequazione di secondo grado $5t^2 - 3at + 9 \geq 0$ è soddisfatta (per ogni t) quando il discriminante Δ è *positivo*, invece che negativo...

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $a < -1$.

2. a) $1/2$; b) 0; c) $+\infty$.

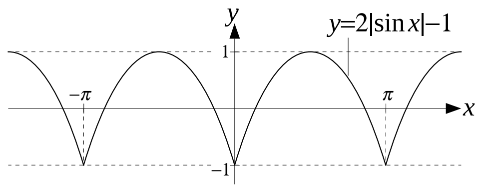
3. $N = 5^2 \cdot 9^3 \cdot 16^2 = 4.665.600$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{-ax} è $-\dfrac{e^{-ax}}{a}$:
$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,dx = \left| -x\frac{e^{-ax}}{a}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{a}\,dx = \left| -\frac{e^{-ax}}{a^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a^2}\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \sin(n^a)}{2^n + n^{2a}} \sim \dfrac{n^a}{2^n} \ll \dfrac{1}{n^2}$, per cui la serie converge per ogni a.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot x = t^{a-1}(a\log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a+2)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = -2$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $a > -2$.

2. a) 0; b) non esiste; c) -1.

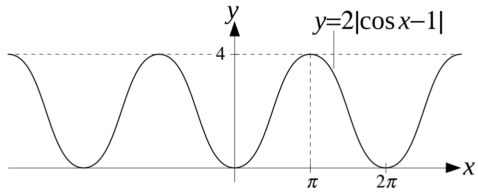
3. $N = (21 \cdot 20) \cdot 9^3 \cdot (19 \cdot 18) = 104.713.560$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{-ax} è $-\dfrac{e^{-ax}}{a}$:
$$\int xe^{-ax}\,dx = -x\frac{e^{-ax}}{a} + \int \frac{e^{-ax}}{a}\,dx = -\frac{xe^{-ax}}{a} - \frac{e^{-ax}}{a^2} + c = -\frac{ax+1}{a^2}e^{-ax} + c\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \log(n^a)}{2^{-n} + n^{2a}} \sim \dfrac{n^a}{n^{2a}} = \dfrac{1}{n^a}$, per cui la serie converge per $a > 1$.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot x = t^{a-1}(a\log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a+3)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = -3$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{-2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Nessun a.

2. a) 2; b) $+\infty$; c) 1.

3. $N = (21 \cdot 20) \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot 21^2 = 93.350.880$.

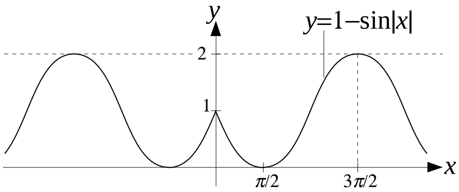
4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{ax} è $\dfrac{e^{ax}}{a}$:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{ax}\,dx = \left| x\frac{e^{ax}}{a} \right|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{a}\,dx = -\left| \frac{e^{ax}}{a^2} \right|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{a^2}\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \cos(n^a)}{\log n + n^{3a}} \sim \dfrac{n^a}{n^{3a}} = \dfrac{1}{n^{2a}}$, per cui la serie converge per $a > 1/2$.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a-1)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = 1$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. $a \leq 1$.

2. a) $+\infty$; b) non esiste; c) -2.

3. $N = 21^2 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot (21 \cdot 20) = 93.350.880$.

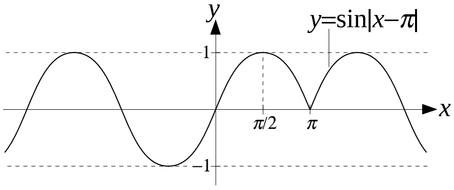
4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{ax} è $\dfrac{e^{ax}}{a}$:

$$\int xe^{ax}\,dx = x\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax} + c\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a + 2^n}{\log n + n^{3a}} \sim \dfrac{2^n}{n^{3a}} \to +\infty$, per cui la serie diverge a $+\infty$ per ogni a.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a-2)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = 2$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Seconda parte.

1. a) Visto che usiamo la lettera x per indicare l'ascissa di un punto del grafico di f, per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto usiamo come variabile indipendente la

lettera t. Così facendo l'equazione è

$$y = f'(x)(t - x) + f(x)\,,$$

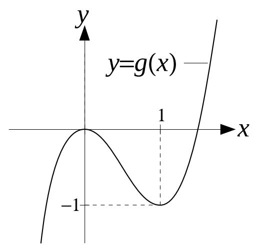
e quindi la retta in questione passa per l'origine se per $t = 0$ otteniamo $y = 0$, vale a dire se $0 = f(x) - x\,f'(x)$. Nel caso specifico questa equazione diventa

$$\underbrace{2x^3 - 3x^2}_{g(x)} = a\,. \tag{1}$$

b) A questo punto il numero di rette tangenti al grafico di f che passano per l'origine è uguale al numero di soluzioni dell'equazione (1).

Per calcolare questo numero al variare di a studiamo il grafico della funzione $g(x)$. Tale funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, e studiando il segno della derivata $g'(x) = 6x(x-1)$ otteniamo che $g(x)$ cresce per $x \le 0$ e per $x \ge 1$, e decresce $0 \le x \le 1$. In particolare 0 è un punto di massimo locale (e $g(0) = 0$) mentre 1 è un punto di minimo locale (e $g(1) = -1$).

Sulla base di quanto appena detto ricaviamo il grafico nella figura accanto, da cui risulta chiaro che



- per $a < -1$ e per $a > 0$ l'equazione (1) ha una soluzione;
- per $a = -1$ e $a = 0$ l'equazione (1) ha due soluzioni;
- per $-1 < a < 0$ l'equazione (1) ha tre soluzioni.

2. a) Per $a = 1/2$ l'insieme A è definito dalle disequazioni

$$|x| \le y \le \sqrt{1 + x^2}\,.$$

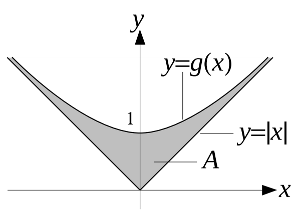
Il grafico della funzione $|x|$ è noto, mentre per quanto riguarda la funzione $g(x) := \sqrt{1+x^2}$, osserviamo che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari, soddisfa $g(x) > |x|$ per ogni x, e per $x \to +\infty$ si ha

$$g(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = x\left[1 + O(1/x^2)\right] = x + O(1/x)$$

(nel primo passaggio abbiamo raccolto x e nel secondo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/2} = 1 + O(t)$ con $t = 1/x^2$). Analogamente si ottiene che $g(x) = -x + O(1/x)$ per $x \to -\infty$, e dunque $g(x) = |x| + O(1/x)$ per $x \to \pm\infty$, il che significa che i grafici di $g(x)$ e $|x|$ sono sempre più vicini quando x tende a $\pm\infty$. Infine, studiando il segno della derivata

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

si ottiene che la funzione cresce per $x \ge 0$ e decresce per $x \le 0$. Sulla base di quanto appena detto tracciamo il disegno sottostante.



b) Siccome $x^2 < x^2 + 1$ per ogni x, elevando alla potenza a otteniamo che $|x|^{2a} < (1 + x^2)^a$ e quindi l'intersezione di A con la retta verticale data dai punti di ascissa x è sempre un intervallo non vuoto (come nel caso $a = 1/2$). Pertanto

$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^a - |x|^{2a}\,dx\,,$$

e usando il fatto che la funzione integranda è pari otteniamo

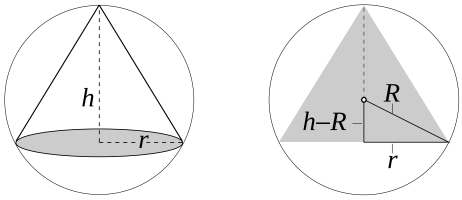
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (1+x^2)^a - x^{2a}\,dx\,. \tag{2}$$

Si tratta ora di capire per quali a questo integrale improprio semplice è finito. A questo scopo calcoliamo la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(1+x^2)^a - x^{2a} = x^{2a}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^a - 1\right] = x^{2a}\left[1+\frac{a}{x^2}+O\Big(\frac{1}{x^4}\Big)-1\right] \sim \frac{a}{x^{2-2a}}$$

(nel primo passaggio abbiamo raccolto x^{2a} e nel secondo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = 1/x^2$). Applicando infine il principio del confronto asintotico otteniamo che l'area di A, ovvero l'integrale improprio in (2), è finita se e solo se $2 - 2a > 1$, vale a dire $a < 1/2$.

3. Indichiamo con h l'altezza di un cono C iscritto nella sfera.



Come risulta chiaro dal disegno sopra, il raggio di base del cono è allora dato da

$$r = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

e pertanto il volume è

$$\text{volume}(C) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)\,.$$

Dobbiamo quindi trovare il punto di massimo della funzione $g(h) := 2Rh^2 - h^3$ tra tutti gli h compresi tra 0 e $2R$ (vale a dire i valori ammissibili per l'altezza di un cono iscritto). Studiando il segno della derivata $g'(h) = 4Rh - 3h^2 = h(4R - 3h)$ otteniamo che la funzione cresce per $h \le \frac{4}{3}R$ e decresce per $h \ge \frac{4}{3}R$, e in particolare $h = \frac{4}{3}R$ è il punto di massimo.
Pertanto il cono cercato è quello di altezza $h = \frac{4}{3}R$ e raggio di base $r = \frac{\sqrt{8}}{3}R$, ed ha volume $V = \frac{31\pi}{81}R^3$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno spezzato l'integrale improprio da calcolare per ottenere l'area come somma di due integrali impropri nel modo seguente

$$\int_0^{+\infty} (1+x^2)^{2a} - |x|^{2a} dx = \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{2a} dx - \int_0^{+\infty} |x|^{2a}\, dx\,.$$

Succede però che i due integrali così ottenuti sono sempre uguali a $+\infty$ (ricordo che $a > 0$ per ipotesi) e quindi questa scomposizione non permette di dire alcunché sull'integrale di partenza (invece molti dei presenti ne hanno dedotto che l'area di A non è finita).

- Seconda parte, esercizio 3. È possibile impostare il problema diversamente, prendendo per esempio come variabile il raggio di base del cono (invece dell'altezza). Questa impostazione è corretta, ma sfortunatamente porta a calcoli nettamente più complicati.

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $(3x^2 - x^3)e^{-x}$; b) $\dfrac{3x^2}{x^3-1} - \dfrac{3x^2}{x^3+1} = \dfrac{6x^2}{x^6-1}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) 0; b) $-\infty$; c) $\dfrac{3}{2}$.

3. $N = \dbinom{8}{3} = 56$.

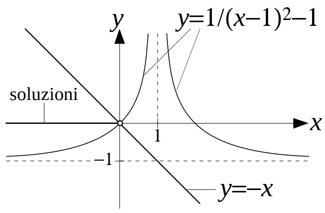
4. Il punto cercato è $x = -\dfrac{1}{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \sin x + 1$ si ottiene

$$\int (\sin x + 1)^a \cos x \, dx = \int y^a \, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} = \frac{(\sin x + 1)^{a+1}}{a+1} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}..$$

6. Ogni $a > 0$.

7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $\dfrac{3x^2}{x^3+1} - \dfrac{3x^2}{x^3-1} = \dfrac{-6x^2}{x^6-1}\Big)$; b) $(1-2x)e^{-2x}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) 0; b) $-\infty$; c) 0.

3. $N = \dbinom{7}{3} = 35$.

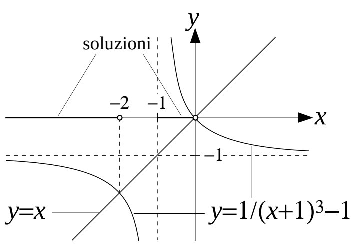
4. Il punto cercato è $x = 0$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \log x - 1$ si ottiene

$$\int_e^{e^2} \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx = \int_0^1 y^a \, dy = \left| \frac{y^{a+1}}{a+1} \right|_0^1 = \frac{1}{a+1} .$$

6. Deve essere $0 < a < 2/3$.

7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 1$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{4x}{x^4-1}$; b) $(3x^2+2x^3)e^{2x}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $-\infty$; b) $\dfrac{3}{2}$; c) $-\infty$.

3. $N = \dbinom{7}{2} = 21$.

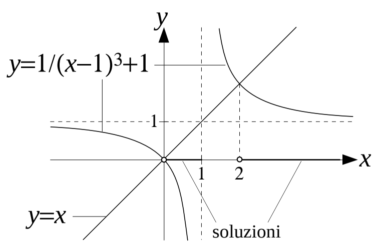
4. Il punto cercato è $x = 1$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \sin x + 1$ si ottiene

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + 1)^a \cos x \, dx = \int_0^2 y^a \, dy = \left| \frac{y^{a+1}}{a+1} \right|_0^2 = \frac{2^{a+1}}{a+1} \, .$$

6. Deve essere $0 < a < 1/2$.

7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $(2x - x^2)e^{-x}$; b) $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\cos 1$; b) $+\infty$; c) 0.

3. $N = \dbinom{8}{4} = 70$.

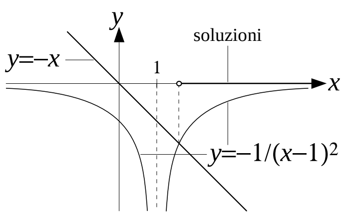
4. Il punto cercato è $x = 0$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \log x - 1$ si ottiene

$$\int \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx = \int y^a \, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} = \frac{(\log x - 1)^{a+1}}{a+1} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \, .$$

6. Deve essere $a > 1$.

7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 1$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

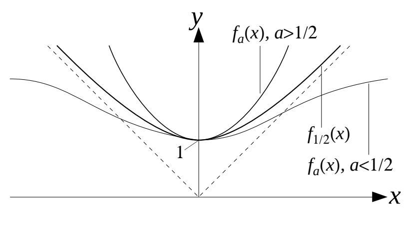
8. 

SECONDA PARTE.

1. a) Dividendo l'equazione per t otteniamo
$$\dot{x} + \frac{3}{t}x = \frac{e^{-t^3}}{t} \,,$$
che è un'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti non costanti). Ora, una primitiva del coefficiente $3/t$ è $3\log t$; moltiplichiamo quindi tutta l'equazione per $\exp(3\log t) = t^3$ e procedendo come al solito otteniamo
$$x(t) = \frac{1}{t^3}\left[\int e^{-t^3} t^2\, dt + c\right] = \frac{3c - e^{-t^3}}{3t^3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$
(la primitiva nel secondo termine è stata calcolata usando il cambio di variabile $s = -t^3$).
b) Affinché il limite della soluzione $x(t)$ per $t \to 0^+$ sia finito è *necessario* che il numeratore nell'ultimo termine di (1) sia nullo in 0, vale a dire $3c = 1$, e dunque l'unica soluzione che *potrebbe* avere limite finito in 0 è
$$x(t) = \frac{1 - e^{-t^3}}{3t^3} \,.$$
Resta da verificare che il limite di tale funzione sia effettivamente zero (la condizione che il numeratore si annulli in zero è necessaria, ma non sufficiente). In effetti
$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - e^{-t^3}}{t^3} = \lim_{s\to 0^-} \frac{e^s - 1}{s} = 1$$
(nel secondo passaggio abbiamo usato nuovamente il cambio di variabile $s = -t^3$).

2. Quando x tende a $+\infty$ abbiamo che
$$f_a(x) = (x^2+2)^a \sim x^{2a}$$
e dunque $g_a(x) := x^{2a}$ è la parte principale cercata.
Ricordo poi che una funzione è convessa se la derivata seconda è sempre positiva (o nulla). Ora
$$f'_a(x) = 2ax(x^2+2)^{a-1}\,, \quad f''_a(x) = 2a((2a-1)x^2+2)(x^2+2)^{a-2}\,, \tag{2}$$
e quindi è chiaro che f''_a è sempre positiva (ovvero f_a è convessa) se e solo se il fattore
$$(2a-1)x^2 + 2$$
è sempre positivo, ovvero se e solo se $2a - 1 \geq 0$, vale a dire $a \geq 1/2$.
b) La funzione $f_a(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre dallo studio del segno della derivata prima calcolata in (2) otteniamo che $f_a(x)$ cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$. Abbiamo inoltre già visto che per $a \geq 1/2$ la funzione f_a è sempre convessa, mentre per $a < 1/2$ lo studio del segno della derivata seconda calcolata in (2) ci mostra che
   - f_a è convessa nell'intervallo $-c_a \leq x \leq c_a$ dove $c_a := \sqrt{2/(1-2a)}$;
   - f_a è concava nelle semirette $x \leq -c_a$ e $x \geq c_a$.

Usando quanto detto (e il fatto che $f_a \sim x^{2a}$ per $x \to +\infty$) otteniamo i grafici nella figura sottostante.



c) Si vede subito che $f_a(x) > g_a(x)$ per ogni $x \geq 0$, ovvero il grafico di f_a giace sopra di quello di g_a. Questo ci dice che l'area dell'insieme A_a è data dall'integrale
$$\text{area}(A_a) = \int_0^{+\infty} f_a(x) - g_a(x)\, dx \,.$$

Questo integrale è improprio all'infinito, ed esiste sempre perché la funzione integranda $f_a - g_a$ è positiva; si tratta quindi di capire per quali a è finito. Cerchiamo dunque la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} f_a(x) - g_a(x) &= (x^2+2)^a - x^2a \\ &= x^{2a}\Big[\Big(1+\frac{2}{x^2}\Big)^a - 1\Big] \\ &= x^{2a}\Big[1+\frac{2a}{x^2}+O\Big(\frac{1}{x^4}\Big) - 1\Big] \sim 2a\,x^{2a-2} \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo raccolto x^{2a} da tutti i termini, nel terzo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$). Utilizzando infine il principio del confronto asintotico per gli integrali impropri otteniamo che l'area di A_a è finita se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{2a-2}\,dx$ è finito, cioè se e solo se $a < 1/2$.

3. a) Il modo più semplice per ottenere questo sviluppo di Taylor è applicare la definizione e calcolare le derivate della funzione $\tan x$ fino a quella di ordine 3. Così facendo si ottiene

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \tag{3}$$

(il resto è $O(x^5)$ e non $O(x^4)$ perché la funzione $\tan x$ è dispari).

b) Osserviamo che, per $x \to 0$,

$$\tan(\log(1+x^2)) \sim \log(1+x^2) \sim x^2 \tag{4}$$

(nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che $\tan t \sim t$ per $t \to 0$ ponendo $t = \log(1+x^2)$, nel secondo abbiamo usato che $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^2$). Analogamente abbiamo che, sempre per $x \to 0$,

$$\tan(x^a) \sim x^a\,,$$

e mettendo insieme questa formula con la (4) otteniamo

$$\tan(x^a) - \tan(\log(1+x^2)) = \begin{cases} x^a + o(x^a) \sim x^a & \text{se } a < 2, \\ -x^2 + o(x^2) \sim -x^2 & \text{se } a > 2. \end{cases}$$

Resta da considerare il caso $a = 2$, per cui i calcoli fatti sopra non sono sufficienti a determinare la risposta. Osserviamo che

$$\tan(\log(1+x^2)) = \log(1+x^2) + O\big(\log(1+x^2))^3\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) \tag{5}$$

(nel primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\tan t = t + O(t^3)$ con $t = \log(1+x^2)$, nel secondo abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ con $t = x^2$). Analogamente si ottiene che

$$\tan(x^2) = x^2 + O(x^6)\,,$$

e mettendo insieme questa equazione con la (5) otteniamo infine

$$\tan(x^2) - \tan(\log(1+x^2)) = \frac{x^4}{2} + O(x^6) \sim \frac{x^4}{2}\,.$$