

CORSO: **Teoria Geometrica della Misura**  
CORSO DI LAUREA: **Matematica (laurea specialistica)**  
ANNO ACCADEMICO: **2003/04**  
DOCENTE: **Giovanni Alberti**

## Programma del corso

(Gli argomenti in corsivo sono stati solo accennati.)

### 1. NOZIONI DI BASE DI TEORIA DELLA MISURA

- 1.1. Misure (esterne) su uno spazio metrico, misurabilità secondo Caratheodory, misurabilità dei Boreliani, regolarità delle misure finite.
- 1.2. Misura e dimensione di Hausdorff. Proprietà essenziali della misura di Hausdorff.
- 1.3. Teoremi di ricoprimento di Besicovitch e di Vitali. Applicazioni dei teoremi di ricoprimento: punti di densità di un insieme, punti di continuità approssimata di una funzione sommabile.
- 1.4. Costruzione di insiemi di dimensione assegnata (frattali autosimili di Hutchinson)
- 1.5. Differenziabilità delle funzioni Lipschitziane (Teorema di Rademacher).
- 1.6. Insiemi rettificabili, spazio tangente approssimato.
- 1.7. *La differenziabilità puntuale (classica o approssimata) implica la rettificabilità del grafico.*

### 2. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI

- 2.1. Formula dell'area per funzioni regolari.
- 2.2. *Versione "orientata" della formula dell'area, grado topologico.*
- 2.3. Formula dell'area per mappe Lipschitziane.
- 2.4. Formula di coarea per mappe regolari e teorema tipo Sard per funzioni di classe  $C^1$ . Estensione a mappe Lipschitziane.
- 2.5. Nozioni di base di algebra multilineare:  $k$ -vettori e  $k$ -covettori. Forme differenziali, differenziale esterno di una  $k$ -forma. Vettori semplici, massa e comassa.
- 2.6. Orientazione di una  $k$ -superficie regolare. Orientazione canonica del bordo. pullback di una  $k$ -forma. Teorema di Stokes.

### 3. CORRENTI

- 3.1. Definizione di corrente e di bordo di una corrente. Massa di una corrente. Correnti normali.
- 3.2. Operazioni di base sulle correnti: prodotto, pushforward secondo una mappa propria, costruzione del cono su una corrente.
- 3.3. Correnti rettificabili (a molteplicità reale e intera). Correnti intere. Correnti poliedrali (reali ed intere).
- 3.4. Distanza e norma flat delle correnti. Proprietà principali.
- 3.5. Teorema di deformazione poliedrale di Federer per correnti intere (con e senza bordo) e per correnti normali (con e senza bordo). *Approssimazione in massa.*
- 3.5. Slicing di una corrente rettificabile e di una corrente di massa finita secondo una funzione  $C^1$ . Dipendenza  $BV$  degli slice rispetto alla distanza flat. Caratterizzazione delle correnti rettificabili a molteplicità intera per slicing (Teorema di B. White).
- 3.7. Teorema di rettificabilità del bordo e di teorema chiusura per le correnti intere (Federer-Fleming). Soluzione debole del problema di Plateau.

APPELLI ED ESAMI. L'esame si compone di un seminario su un argomento scelto in accordo con il docente, e di un breve orale sugli argomenti fondamentali del corso. Le date degli esami vengono concordate singolarmente con lo studente.

BIBLIOGRAFIA. I testi di riferimento sono:

- L. Simon: *Lectures on Geometric Measure Theory*
- F. Morgan: *Introduction to Geometric Measure Theory*
- P. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*
- K. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets*