Versione: 23 settembre 2002

Università degli Studi di Pisa
Corso di laurea in Biologia

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Istituzioni di Matematica
a.a. 1998/99 - 2000/01

docente: Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per il corso di Istituzioni di Matematica del corso di laurea in Scienze Biologiche, da me tenuto negli anni accademici dal 1998/99 al 2001/02. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con sette o otto domande o problemi molto semplici per cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di circa un'ora per la prima parte, e di circa due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questi appunti consta dei testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, i cosiddetti "compitini", in tutte le varianti presentate, mentre la seconda sezione contiene parte delle risposte, con una breve traccia della soluzione. Gli esercizi si basano sui seguenti argomenti, che costituiscno il programma d'esame tipo; tuttavia, a seconda degli anni, alcuni di questi (contrassegnati da un asterisco) sono stati omessi, o trattati in maggiore o minore dettaglio:

- Numeri complessi: notazione cartesiana e notazione esponenziale, calcolo delle radici.
- Elementi di calcolo combinatorio e di probabilità (*).
- Principio di induzione (*).
- Limiti di funzioni reali, operazioni sui limiti, funzioni continue e proprietà fondamentali: teorema di esistenza degli zeri, e del massimo e del minimo (*).
- Definizione di derivata e suo significato geometrico ed analitico. Calcolo delle derivate (derivate delle funzioni fondamentali e regole di derivazione). Sviluppo di Taylor e rappresentazione delle costanti e e π come serie.
- Notazione di Landau, parte principale di un infinitesimo e di un infinito, principio di sostituzione degli infinitesimi nei limiti, calcolo di limiti e parti principali tramite lo sviluppo di Taylor. Teoremi di de l'Hôpital. Significato geometrico di derivata prima e seconda, studio del grafico di una funzione.
- Cenni su serie e successioni (*).
- Elementi di geometria analitica nello spazio, equazione e rappresentazione parametrica di rette e piani nello spazio. Vettori, prodotto scalare e prodotto vettoriale, e loro significato geometrico. Proprietà elementari delle matrici, determinante ed inversa di una matrice quadrata. Discussione e risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.
- Integrale definito e suo significato geometrico. Integrale indefinito o primitiva, teorema fondamentale del calcolo integrale. Metodi per il calcolo delle primitive. Calcolo di volumi noti, aree e lunghezze. Integrali impropri (*).
- Equazioni differenziali ordinarie a variabili separabili, equazioni lineari del primo e del secondo ordine (omogenee e non). Equazione differenziali della meccanica: oscillatore armonico (con o senza attrito e termine forzante), equazione di decadimento e di diffusione.

Concludo con una precisazione sull'uso di questi appunti. Le traccie delle soluzioni date nella seconda parte sono spesso ridotte all'essenziale, e comprenderle può richiedere talvolta un notevole sforzo. Nella fase di preparazione dell'esame, è probabilmente meglio non ricorrere a queste soluzioni se non per confrontarle con quelle ottenute per conto proprio, o quando proprio non si riesce a venire a capo di un esercizio. Infine, è bene ricordare che il livello di difficoltà degli esercizi proposti varia molto, ed alcune delle domande sono decisamente difficili. Non è quindi il caso di allarmarsi se non si riesce a trovare sempre la soluzioni (suggerisco però di fare sempre almeno un tentativo).

Testi 1998/99

Test di verifica, 15 gennaio 1999

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2-4}{x+1} \geq 0$.
2. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(-3,1)$ e raggio 2.
3. Scrivere l'equazione della retta nel piano passante per il punto $(0,1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = 2x$.
4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $y^2 + x^2 - 2x \leq 0$.
5. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 + 4 = 0$.
6. Scrivere nella forma più semplice possibile l'insieme $A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[0, \frac{1}{n}\Big]$.
7. Determinare l'insieme degli $x \in [0,\pi]$ tali che $\sin(2x) \geq 1/2$.
8. Dire quali delle seguenti identità sono vere:

$$\begin{array}{ll} \sin x = \sin(-x) & \qquad \sin x = \cos(x + \pi/2) \\ \sin x = \cos(-x + \pi/2) & \qquad \cos(2x) = \sin(2x + \pi)\ . \end{array}$$

Seconda parte.

1. Dimostrare per induzione su n (intero positivo) che

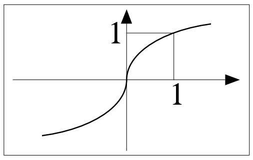
$$b^{n+1} - 1 = (b-1)\Big(\sum_{k=0}^{n} b^k\Big) \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}. \tag{P_n}$$

2. Risolvere, al variare del parametro a in $\mathbb{R}$, la disequazione $\dfrac{x}{1+|x|} > a$.
3. a) Quanti sono i numeri di 3 cifre strettamente decrescenti (lette da destra verso sinistra)?
   b) Più in generale, quanti sono i numeri di n cifre strettamente decrescenti?
4. Risolvere la disequazione: $\sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.
5. a) Estraendo a caso 4 carte da un mazzo di 40, qual'è la probabilità di avere 4 assi?
   b) E la probabilità di estrarre 2 assi e 2 re?
6. Trovare il limite di $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ per n che tende all'infinito. [*Suggerimento: moltiplicare e dividere per* $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.]
7. Risolvere nel campo complesso l'equazione $z^3 = \bar{z}$.

PRIMO COMPITINO, 22 GENNAIO 1999

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Risolvere la disequazione $(x-2)\log(x+4) > 0$.
2. Ordinare i seguenti numeri dal più grande al più piccolo: 10^{1000}, $1000!$, 1000^{100}.
3. Scrivere nella forma più semplice possibile l'insieme $A = \bigcap_{a\in\mathbb{R},\, a>0} (-1, a)$.
4. Disegnare l'ellisse di equazione $x^2/4 + y^2 = 1$, indicando le lunghezze dei semiassi.
5. Disegnare il grafico di $\sin(2x + \pi/2)$, dando le coordinate qualche punto significativo.
6. Scrivere l'equazione di tutte le rette nel piano che passano per l'origine ed intersecano il segmento di estremi $(1,-1)$ e $(1,1)$.
7. Sia f la funzione data nel disegno qui accanto. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > x$. Facoltativo: suggerire una possibile formula per f.



8. Calcolare $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Risolvere la disequazione $(2x-1)\log(x+3) > 0$.
2. Ordinare i seguenti numeri dal più grande al più piccolo 10^{100}, $1000!$, 2^{400}.
3. Scrivere nella forma più semplice possibile l'insieme $A = \bigcap_{a\in\mathbb{R},\ a>0} [-a, 0)$.
4. Disegnare l'ellisse di equazione $x^2 + y^2/4 = 1$, indicando le lunghezze dei semiassi.
5. Disegnare il grafico di $\sin(x/2 + \pi/2)$, dando le coordinate di qualche punto significativo.
6. Scrivere l'equazione di tutte le rette nel piano che passano per l'origine ed intersecano il segmento di estremi $(1,0)$ e $(1,2)$.
7. [*omesso*]
8. Calcolare $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C.

1. Risolvere la disequazione $(3x-1)\log(x+2) > 0$.
2. Ordinare i seguenti numeri dal più grande al più piccolo: 100^{100}, $100!$, 1000^{10}.
3. Scrivere nella forma più semplice possibile l'insieme $A = \bigcup_{a\in\mathbb{R},\ a>0} (0, a)$.
4. Disegnare l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 1$, indicando le lunghezze dei semiassi.
5. Disegnare il grafico di $\cos(x/2)$, dando le coordinate di qualche punto significativo.
6. Scrivere l'equazione di tutte le rette nel piano che passano per l'origine ed intersecano il segmento di estremi $(-1,-1)$ e $(-1,1)$.
7. [*omesso*]
8. Calcolare $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3$.

Primo compitino, 22 gennaio 1999

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha $n! \geq 6^{n-5}$.
   b) Dimostrare che $n! \geq k^{n-k+1}$ per tutti gli interi positivi n, k.
2. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(1, 0)$ e tangente all retta $y = x/2$.
3. Calcolare il limite per n che tende all'infinito di $a_n := \dfrac{n + 1/n}{n^2 + 3}$. [*Conviene mettere in evidenza le giuste potenze di* n *al numeratore ed al denominatore.*]
4. a) Quanti numeri di 5 cifre comprese tra 1 e 7 (inclusi) si possono scrivere?
   b) E se si assume che le cifre debbano essere tutte diverse?
   c) Nel primo caso, qual'è la probabilità che, prendendo a caso uno di questi numeri, la prime tre cifre siano tutte 1, e le rimanenti no?
   d) E qual'è invece la probabilità che tre delle cinque cifre siano 1 (ma non necessariamente le prime tre)?
5. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z (intesi come punti del piano) che soddisfano $|z - 3| \leq |z + 1| \leq |z - i|$. [*Può essere utile ricordare il significato geometrico di* $|z - w|$.]

Seconda parte, gruppo B.

1. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha $n! \geq 5^{n-4}$.
   b) Dimostrare che $n! \geq k^{n+1-k}$ per tutti gli interi positivi n, k.
2. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(1, 0)$ e tangente all retta $y = -x/2$.
3. Calcolare il limite per n che tende all'infinito di $a_n := \dfrac{2n + 1/n^2}{n + 1}$.
4. [*Come per il gruppo A, con le cifre prese tra 1 ed 8 invece che tra 1 e 7.*]
5. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $|z + i| \leq |z + 1| \leq |z + 2|$.

Seconda parte, gruppo C.

1. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha $n! \geq 4^{n-3}$.
   b) Dimostrare che $n! \geq k^{n+1-k}$ per tutti gli interi positivi n, k.
2. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(1, 0)$ e tangente all retta $y = 2x$.
3. Calcolare il limite per n che tende all'infinito di $a_n := \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n + 3}$.
4. [*Come per il gruppo A, con le cifre prese tra 1 ed 6 invece che tra 1 e 7.*]
5. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $|z + 3| \leq |z + 1| \leq |z - i|$.

Primo compitino (bis), 23 gennaio 1999

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\sqrt{x+2}\dfrac{x-3}{x-1} < 0$.
2. Scrivere l'equazione dell'ellisse con semiasse orizzontale 2, semiasse verticale 1, e centro in $(2, 0)$.
3. Trovare tutte le radici cubiche complesse di 8.
4. Scrivere $\sin(3x)$ in termini di $\sin x$ e $\cos x$.
5. Scrivere l'equazione di tutte le rette nel piano che sono parallele alla retta passante per $(0, 1)$ ed $(1, 0)$, ed intersecano il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ed $(1, 1)$.
6. Scrivere nella forma più semplice possibile l'insieme $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} [n, n^2]$.
7. Disegnare il grafico di $(x + 1)^{-2}$, dando le coordinate di qualche punto significativo.

Seconda parte.

1. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$ si ha $2^n \geq 1 + n + n^2/4$.
   b) Dimostrare che $(1 + k)^n \geq 1 + nk + (nk)^2/4$ per tutti gli interi positivi n, k con $n \geq 2$.
2. Scrivere le equazioni di tutte le rette tangenti ad entrambe circonferenze di raggio 1 e centri $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ rispettivamente.
3. Calcolare il limite per n che tende all'infinito di $a_n := \dfrac{1/n + 2/n^2}{3/n^2 + 4/n}$.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z (intesi come punti del piano) che soddisfano $1 \leq |z + 1| \leq |z - 1| \leq 3$. [Può essere utile ricordare il significato geometrico di $|z - w|$.]
5. a) L' 80% degli abitanti di un certo paese ha i capelli scuri, ed un 30% ha gli occhi azzurri. Qual'è la probabilità che, prendendo a caso una persona, questa abbia sia i capelli scuri che gli occhi azzurri?
   b) Da una statistica fatta, risulta però che solo il 15% degli abitanti ha sia i capelli scuri che gli occhi azzurri. Come lo spiegate?
   c) Senza essere a conoscenza di quest'ultima statistica, cosa avreste potuto dire per certo sulla percentuale di persone con capelli scuri ed occhi azzurri?

Secondo compitino, 16 aprile 1999

Prima parte, gruppo A.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto 0 delle funzioni $e^{(x^2)}$ e $\cos(2x)$.
2. a) Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(x) = e^{x^2+2x}$.
   b) Determinare i punti dove si annulla f' e dire se si tratta di massimi o minimi locali o altro.
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/10} \log x$.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Si considerino i due piani dati rispettivamente dalle equazioni $ax + y + 2z + 1 = 0$ e $x + (a-2)y + 2z + 3 = 0$. Determinare per quali valori del parametro reale a essi risultano ortogonali.
6. Scrivere in notazione matriciale il sistema dato dalle equazioni lineari $x + z = 0$, $x + 2y = 0$ e $3y + z = 0$, calcolare il determinante della matrice (ridotta) associata, e dire quante sono le soluzioni.
7. Trovare il dominio della funzione $\sqrt{\log((x+2)^3)}$.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $1 + \sin(2x)$.

Prima parte, gruppo B.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto 0 delle funzioni $x \sin x$ e e^{2x}.
2. a) Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(x) = e^{(-x^2+2x)}$.
   b) Determinare i punti dove si annulla f' e dire se si tratta di massimi o minimi locali o altro.
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x x^{-10}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \log x$.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Si considerino i due piani dati rispettivamente dalle equazioni $x + (2a-4)y + z + 1 = 0$ e $ax + y + z = 0$. Determinare per quali valori del parametro reale a essi risultano ortogonali.
6. Scrivere in notazione matriciale il sistema dato dalle equazioni lineari $x + y = 0$, $y + 2z = 0$ e $-x + 2z = 0$, calcolare il determinante della matrice (ridotta) associata, e dire quante sono le soluzioni.
7. Trovare il dominio della funzione $\sqrt{(x+1)(x-2)^2}$.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $\sin(x - \pi) - 1$.

Prima parte, gruppo C.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto 0 delle funzioni xe^x e $\sin(x^2)$.
2. a) Calcolare le derivate prima e seconda della funzione $f(x) = e^{x^2-2x}$.
   b) Determinare i punti dove si annulla f' e dire se si tratta di massimi o minimi locali o altro.

3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^5$ e $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log x$.

4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Si considerino i due piani dati rispettivamente dalle equazioni $(a+2)x+y+az+15=0$ e $x+2y+z=0$. Determinare per quali valori del parametro reale a essi risultano ortogonali.

6. Scrivere in notazione matriciale il sistema dato dalle equazioni lineari $x+z=0$, $2y+3z=0$ e $x+y=0$, calcolare il determinante della matrice (ridotta) associata, e dire quante sono le soluzioni.

7. Trovare il dominio della funzione $\log\left((x+2)(1-x)\right)$

8. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $1+\cos(x-\pi)$.

Seconda parte, gruppo A.

1. Studiare il grafico di $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x}$, e trovare quindi i numeri reali a per cui
$$ax \geq 1+\log x \quad \text{per ogni } x>0. \tag{$*$}$$

2. Trovare la parte principale per x che tende a 0 della funzione $f(x) = \sin(x^n) - (\sin x)^n$ con $n \geq 2$ intero. Se serve, fare prima il caso $n=2$.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali a e b, esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ ax + 3y + 4z = 0 \\ -4x + 6y - 2z = b\ . \end{cases}$$

4. Determinare la rappresentazione parametrica e quella cartesiana della retta passante per i punti $(0,0,1)$ e $(0,1,0)$. Dimostrare che questa retta interseca l'asse delle y, e determinare l'angolo tra essi compreso.

5. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z (intesi come punti del piano) che soddisfano $2 \leq |z-1| \leq |z+1|$.

6. Un docente vuole attribuire a ciascuno di 7 studenti un esercizio scelto fra 10 a disposizione. In quanti modi può fare ciò se
a) più studenti possono avere lo stesso esercizio;
b) ogni studente deve avere un esercizio diverso.

Seconda parte, gruppo B.

1. Studiare il grafico di $f(x) = \dfrac{1-\log x}{x}$, e trovare quindi i numeri reali a per cui
$$ax \leq 1-\log x \quad \text{per ogni } x>0.$$

2. Trovare la parte principale per x che tende a 0 della funzione $f(x) = \log(1+x^n) - (\log(1+x))^n$ con $n \geq 2$ intero. Se serve, fare prima il caso $n=2$.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali a e b, esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} x + y + z = b \\ ax + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 4 \ . \end{cases}$$

4. Determinare la rappresentazione parametrica e quella cartesiana della retta passante per i punti $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Dimostrare che questa retta interseca l'asse delle x e determinare l'angolo tra essi compreso.

5. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z (intesi come punti del piano) che soddisfano $|z - 1| \leq |z + 1| \leq 2$.

6. [*Come per il gruppo A, con 8 studenti invece che 7.*]

Primo appello, 4 giugno 1999

Prima parte, gruppo A.

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2) \geq 0$.
2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 + 4 = 0$.
3. Disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.
5. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin x - x$.
6. Scrivere l'equazione del piano passante per $(1,0,1)$ e perpendicolare al vettore $(1,-1,2)$.
7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4x^2}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $x'' - x = 0$.

Prima parte, gruppo B.

1. Risolvere la disequazione $e^{2-x^2} \geq 1$.
2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 - 16 = 0$.
3. Disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $x^2 - y \geq 1$.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
5. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $1 - \cos x$.
6. Scrivere l'equazione del piano passante per $(1,0,1)$ e perpendicolare al vettore $(3,1,-1)$.
7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x e^{x^2}\, dx$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $x'' + 4x = 0$.

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x - 1 = \frac{x(2a-x)}{a^2} \ . \tag{$*$}$$

[*Cominciare dal caso $a = 2$, studiando la funzione* $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{a^2}(a^2 + 2ax - x^2)$.]

b) Studiare il comportamento dell'unica soluzione diversa da 0 per $a \to 0$.

2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = 2(1+x^2)t \\ x(0) = 0 \ . \end{cases}$
3. Dire per quali valori del parametro reale a l'equazione differenziale

$$x'' + a(a^2-1)x' + (1-a)x = 0$$

ammette soluzioni periodiche non banali.

4. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 2x - kz = -1 \\ x + y + z = -1 \ . \end{cases}$$

5. a) Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) = x - x^2 \sin(1/x)$.
   b) Calcolare $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$e^x - 1 = \frac{x(2a - x)}{a^2} \ . \qquad (*)$$
   [*Cominciare dal caso* $a = -2$, *studiando la funzione* $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{a^2}(a^2 + 2ax - x^2)$.]
   b) Studiare il comportamento dell'unica soluzione diversa da 0 per $a \to 0$.
2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = 2e^{-x}t \\ x(0) = 0 \ . \end{cases}$
3. Dire per quali valori del parametro reale a l'equazione differenziale
$$x'' + (4 - 5a + a^2)x' + (a - 3)x = 0$$
   ammette soluzioni periodiche non banali.
4. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ -kx + 2y = -1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \ . \end{cases}$$
5. a) Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) = x(1 - \cos(1/x))$.
   b) Calcolare $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Secondo appello, 2 luglio 1999

Prima parte, gruppo A.

1. Determinare il dominio di esistenza della funzione $\sqrt{\log(x^2-3)}$.
2. Lanciando due dadi, qual'è la probabilità di ottenere due numeri uguali?
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\log x)^2$.
4. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Scrivere l'equazione della retta passante per $(1,0)$ e perpendicolare al vettore $(2,1)$.
6. Trovare la primitiva della funzione $xe^{(x^2)}$.
7. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $y = 1/x^2$.

Prima parte, gruppo B.

1. Determinare il dominio di esistenza della funzione $\sqrt{\log(5-x^2)}$.
2. Lanciando due dadi, qual'è la probabilità di ottenere come somma 7?
3. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x}\sqrt{x}$.
4. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Scrivere l'equazione della retta passante per $(2,1)$ e perpendicolare al vettore $(1,0)$.
6. Trovare la primitiva della funzione $x\cos(x^2)$.
7. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $y = 1 + e^{-x}$.

Seconda parte, gruppo A.

1. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale h esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} (1-h)x + (h-3)y = -1 \\ (4-h)y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1\ . \end{cases}$$
2. Per svolgere un certo compito, una classe di 30 ragazzi viene suddivisa in modo casuale in 10 gruppi di 3. Qual'è la probabilità che Andrea e Barbara capitino nello stesso gruppo?
3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $x'' - x = 0$ che soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x'(t)}{e^t} = 1\ ,\ \lim_{t\to-\infty}\frac{x'(t)}{e^{-t}} = -1$$
e se ne disegni il grafico.
4. Dire per quali valori del parametro reale $a > 0$ è finito l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+1)x^{a-1}}{x^4+a}\,dx\ . \tag{$*$}$$
[*Se serve, considerare prima il caso* $a = 1$, *poi il caso* $a > 1$ *ed infine il caso* $a < 1$.]

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale h esplicitando le eventuali soluzioni:
$$\begin{cases} hx + (h+2)y = -1 \\ (3+h)y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1\ . \end{cases}$$

2. Per svolgere un certo compito, una classe di 28 ragazzi viene suddivisa in modo casuale in 7 gruppi di 4. Qual'è la probabilità che Andrea, Barbara e Carlo capitino nello stesso gruppo?

3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $x'' - 4x = 0$ che soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{x'(t)}{e^{-2t}} = \frac{1}{2}$$
e se ne disegni il grafico.

4. Dire per quali valori del parametro reale $a > 0$ è finito l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^3+1)x^{a-2}}{x^4+2a} dx\ . \tag{$*$}$$
[*Se serve, considerare prima il caso* $a = 2$, *poi il caso* $a > 2$ *ed infine il caso* $a < 2$.]

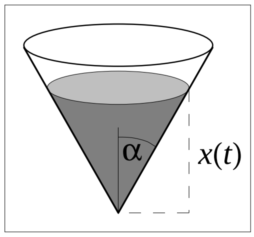
Terzo appello, 3 settembre 1999

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\big(\arctan x - \pi/4\big) \log(x-1) > 0$.
2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{24}}{2^x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin x}$.
3. Trovare l'insieme dei numeri complessi z tali che $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ e tracciarne un disegno approssimativo.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$.
5. Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine e perpendicolare a $(1,-2,1)$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin(x^2)\, dx$.
7. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $y = e^{-x} - 1$.

Seconda parte.

1. a) Determinare, al variare del parametro α in $[-1,1]$, tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale $x'' + 2\alpha x' + x = 0$ che tendono a 0 per $t \to +\infty$.
   b) Per $\alpha = 1$, determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, e studiarla sommariamente.
2. Calcolare la parte principale di $f(x) := (x+1)^a - (x-1)^a$ per $x \to +\infty$ al variare del parametro $a > 0$, cominciando eventualmente dal caso $a = 1/2$.
3. a) Scrivere l'equazione della retta r_t tangente al grafico di $f(x) = \dfrac{3}{3+x^2}$ nel punto di ascissa t.
   b) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta r_t è più vicina al punto $(0,2)$.
   c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta r_t è più vicina al punto $(0,a)$ con $a \geq 0$.
4. Sia dato un recipiente conico come in figura, e al variare del tempo t (misurato in secondi), sia $x(t)$ l'altezza (misurata in centimetri) dell'acqua in esso contenuta. Tenendo conto che, in prima approssimazione, ad ogni istante evapora una quantità d'acqua proporzionale alla superfice esposta all'aria, scrivere l'equazione differenziale che governa il comportamento di x. Di quali dati si ha bisogno per poter effettivamente risolvere questa equazione?



Quarto appello, 23 settembre 1999

Prima parte.

1. Determinare il campo di esistenza della funzione $\sqrt{-\log x^3}$.
2. Dire quale delle seguenti funzioni è più grande per $x \to +\infty$: 10^x, x^{1000}, 2^{4x}.
3. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = -8$.
4. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Disegnare la circonferenza di raggio 1 contenuta nel primo quadrante e tangente ad entrambi gli assi, e scriverne l'equazione.
6. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $x'' + \alpha x = 0$ con $\alpha > 0$.
7. Sia $x(t) = 1 - e^{-t}$ la posizione sull'asse delle x di un certo punto materiale P al variare del tempo t. Determinare la velocità e l'accellerazione di P al variare di t.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Seconda parte.

1. Trovare la massima costante positiva c per cui la disuguaglianza $e^x \geq cx$ è verificata per tutti i numeri reali x.
2. a) Si faccia un disegno approssimativo (nello spazio) della parabola che giace sul piano $z = 1$ ed ha equazione $y = x^2$.
   b) Si determini il fascio delle rette passanti per l'origine che intersecano detta parabola.
   c) Al variare del parametro reale a dire quante rette del fascio suddetto intersecano la retta r di equazioni $z = 2$ e $y = x - a$.
3. Sia f una funzione del tipo $f(x) = x(e^x - 1) + g(x)$, dove l'unico dato a disposizione su g è che $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. Dimostrare che, indipendentemente da g, 0 è un punto di minimo locale per f.

Quinto appello, 3 novembre 1999

Prima parte.

1. Determinare tutte le soluzioni comprese tra 0 e 2π della disequazione $2\sin x \geq 1$.
2. Determinare l'equazione della retta nel piano data in forma parametrica da $x = 2t$, $y = t+1$ (con $t \in \mathbb{R}$).
3. Ridurre a forma cartesiana il numero complesso $(\sqrt{3} + i)^3$.
4. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 (compreso) di e^{x^3}.
6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = 3x/t \\ x(1) = 1 \,. \end{cases}$
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{2t^4 + 3t^2}{t^4 + t^3 + t + 1}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[1 + \sin\left(e^{-1/x^2}\right)\right]$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = 1 + \cos(x + \pi)$.

Seconda parte.

1. a) Dimostrare che per ogni $x \geq 0$ vale la disuguaglianza $e^x - x \geq 1$.
   b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x - ax \geq 1$ per ogni $x \geq 0$.
2. a) Si scriva l'equazione del piano passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 0, 1)$.
   b) Si scriva l'equazione del fascio di piani passante per i punti $(0, 0, 0)$ e $(1, -2, 1)$.
   c) Dato un piano nel fascio appena descritto, si imposti il sistema necessario a determinarne l'intersezione con la retta di equazioni $x - y = 2$ e $z = 2x + 1$. Utilizzare quanto fatto per determinare i piani del fascio paralleli alla retta suddetta.
3. a) Estraendo a caso due numeri interi A e B tra 1 e 100 (compresi), qual'è la probabilità che B sia uguale a $A + 1$?
   b) Cosa cambia se sappiamo non possono venir estratti due numeri A e B uguali?
   c) Cosa cambia sapendo che A viene etratto tra i numeri pari?
   d) Estraendo a caso due numeri interi A e B tra 1 ed n, qual'è la probabilità che B sia uguale a $A + k$ (n e k interi fissati con $1 \leq k < n$)?

Sesto appello, 7 febbraio 2000

Prima parte.

1. Estraendo a caso un numero intero tra 5 e 17 (compresi), qual'è la probabilità che sia dispari?
2. Si determini l'insieme $\big([0,2) \cap (1,3]\big) \cup [0,1]$.
3. Determinare il campo di esistenza di $f(x) = \log(1-x) \cdot \log x$.
4. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $(1,1,0)$, $(0,0,0)$ e $(1,2,-1)$.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \sin(e^{-x})$ e $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$.
7. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = \arctan x + \pi/2$.
9. Disegnare l'insieme dei punti z del piano complesso tali che $z\bar{z} = 1$.

Seconda parte.

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) = \sin(x + x^3) - x$.
2. a) Dire per quali valori del parametro reale $a > 0$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 2ax' + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

ha limite zero all'infinito.
b) Dire per quali valori di a questa soluzione è decrescente per $t > 0$.

3. Dire per quali valori del parametro a il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ay + 3z = 0 \\ y + 2z - x = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni diverse da $(0,0,0)$, e trovare poi quelle che soddisfano la condizione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sesto appello (bis), 18 febbraio 2000

Prima parte.

1. Estraendo a caso un numero intero tra 1 e 18 (compresi), qual'è la probabilità che sia divisibile per 3?
2. Disegnare tre quadrati di lato 4, con assi paralleli agli assi cartesiani, e centri in $(0,0)$, $(2,2)$ e $(-1,-1)$ rispettivamente. Indicare la loro intersezione.
3. Risolvere $\dfrac{\log x}{x-3} > 0$.
4. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $(1,1,0)$ ed ortogonale al vettore $(0,1,1)$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-2}\log x$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi \sin t\, \cos t\, dt$.
7. Calcolare $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = 2e^{-x}$.
9. Calcolare $(1+i)^4$.

Seconda parte.

1. Calcolare, al variare di $a > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} \left[(x+2)^a - x^a\right] .$$
Se serve, partire dal caso $a = 1/2$. [*Suggerimento: raccogliere x^a e usare lo sviluppo di Taylor in* 0 *di* $(1+t)^a$.]
2. Determinare i punti del grafico della funzione $y = (1+x^2)^{-1}$ che minimizzano la distanza dall'origine. [*Suggerimento: detta x l'ascissa di un generico punto del grafico di questa funzione, esprimere la distanza di questo punto dall'origine in funzione di x.*]
3. Sia r la retta nello spazio passante per l'origine e per il punto $(1,a,a^2)$, e sia P il piano di equazione $(2-3a)x - ay + 2z = 1$. Dimostrare che r non giace mai in P, e determinare per quali valori del parametro reale a, r è parallela a P.

Settimo appello, 10 aprile 2000

Prima parte.

1. In un sacchetto ci sono 5 biglie bianche e 7 nere. Quante biglie nere vanno aggiunte per far sì che la probabilità di estrarre a caso una biglia bianca sia $1/3$?
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{-x^2+1}$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z|^3 = |z|$.
4. Determinare la primitiva di $x\,e^x$.
5. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x}$.
6. Determinare l'equazione del piano passante per $(1, 0, \alpha)$, $(2, 1, 0)$, $(2, -3, 0)$.
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2tx$.
8. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Seconda parte.

1. a) Esprimere $\sin(4x)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$. [*Suggerimento: sviluppare l'identità* $e^{i4x} = (e^{ix})^4$.]
   b) Esprimere $\sin(nx)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$ per $n \geq 2$.
   c) Per quali n è possibile esprimere $\sin(nx)$ come un polinomio in $\sin x$ e basta?
2. a) Dati i punti $P_1 = (0, 1, -1/2), P_2 = (1, 1, -1), P_3 = (3, -1, 0)$ e la retta r_λ determinata dalle equazioni $\lambda y + z = 2$ e $x + y + \lambda z = -1$, si scriva l'equazione del piano p passante per P_1, P_2, P_3.
   b) Si scriva il sistema che determina l'intersezione della retta r_λ col piano p, e si dica per quali valori di λ la retta giace sul piano, per quali lo interseca in un punto e per quali non lo interseca affatto.
   c) Si scriva la retta r_λ in forma parametrica per $\lambda = 2$.
3. Dimostrare che $x \log x \geq x - 1$ per ogni $x > 0$. [*Suggerimento: ridursi allo studio di una funzione.*]

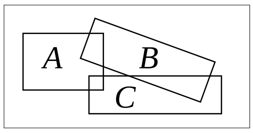
Testi 1999/00

Primo compitino, 10 gennaio 2000

Prima parte, gruppo A.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 3 rosse, 7 nere e 5 bianche, qual'è la probabilità che sia rossa?

2. Siano A, B, C i tre rettangoli "pieni" disegnati nella figura accanto. Determinare l'insieme $(A \cup B) \cap C$.



3. Stimare (con un errore del 10%) il numero di cifre di 2^{1000}.

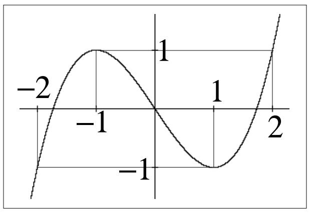
4. Nel piano cartesiano, sia C la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1, e sia P l'intersezione di C con la semiretta che parte dall'origine e forma un angolo θ con l'asse delle ascisse $(0 < \theta < \pi/2)$. Fare un disegno della figura descritta e determinare la distanza tra P e l'origine.

5. Trovare il campo di esistenza della funzione $\log(x^2 - 3x + 2)$.

6. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = \dfrac{1}{x+1}$.

7. Calcolare $(1 - i)^8$.

8. Sia f la funzione data nel disegno accanto. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > x/2$. Facoltativo: suggerire una possibile formula per f.



9. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{10}e^{-x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2}$.

Prima parte, gruppo B.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 4 rosse, 2 nere e 10 bianche, qual'è la probabilità che sia rossa?

2. Siano A, B, C tre rettangoli dati nel corrispondente esercizio per il gruppo A. Determinare $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

3. Stimare (con un errore del 10%) il numero di cifre di 4^{400}.

4. Nel piano cartesiano, sia C la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1, e sia P l'intersezione di C con la semiretta che parte dall'origine e forma un angolo θ con l'asse delle ascisse $(0 < \theta < \pi/2)$. Fare un disegno della figura descritta e determinare la distanza tra P ed il punto $(0, 2)$.

5. Risolvere la disequazione $\dfrac{\log(x+1)}{x+1} > 0$.

6. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = (x-1)^2 - 1$.

7. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = -1$.

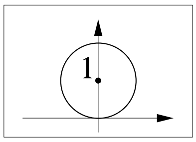
8. Sia f la funzione data nel corrispondente esercizio per il gruppo A. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > -x$. Facoltativo: suggerire una possibile formula per f.

9. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\log x$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+2}$.

Primo compitino, 10 gennaio 2000

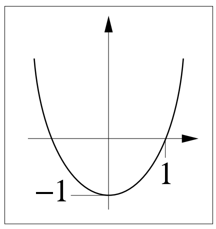
Prima parte, gruppo C.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 3 rosse, 3 nere e 6 bianche, qual'è la probabilità che sia rossa oppure nera?
2. Siano A, B, C tre rettangoli dati nel corrispondente esercizio per il gruppo A. Determinare $(A \cap C) \cup B$.
3. Stimare (con un errore del 10%) il numero di cifre di 2^{400}.
4. Nel piano cartesiano, sia C la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1, e sia P l'intersezione di C con la semiretta che parte dall'origine e forma un angolo θ con l'asse delle ascisse $(0 < \theta < \pi/2)$. Fare un disegno della figura descritta e determinare la distanza tra P e l'origine.
5. Risolvere la disequazione $(x - 1)\arctan(x + 1) < 0$.
6. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = 1 - x^2$.
7. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = 8$.
8. Determinare l'equazione della circonferenza data nella figura accanto.
9. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^{-10}2^x$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+2}$.



Prima parte, gruppo D.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 3 rosse, 3 nere e 6 bianche, qual'è la probabilità che non sia bianca?
2. Siano A, B, C tre rettangoli dati come per il gruppo A. Determinare $A \cap B \cap C$.
3. Stimare (con un errore del 10%) il numero di cifre di 4^{1000}.
4. Nel piano cartesiano, sia C la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1, e sia P l'intersezione di C con la semiretta che parte dall'origine e forma un angolo θ con l'asse delle ascisse $(0 < \theta < \pi/2)$. Fare un disegno della figura descritta e determinare la distanza tra P ed il punto $(2, 0)$.
5. Trovare il campo di esistenza della funzione $\sqrt{1 + \log x}$.
6. Disegnare (approssimativamente) il grafico di $y = e^{-x} - 1$.
7. Calcolare $(1 + i)^8$.
8. Determinare l'equazione della parabola data nella figura accanto.
9. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ e $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{\log x}\right)$.



Seconda parte, gruppo A.

1. a) Quante sono le sigle alfanumeriche di cinque caratteri (scelti cioè tra le 26 lettere dell'alfabeto o tra le cifre da 0 a 9)?

   b) Tra queste, quante sono le sigle i cui primi due caratteri sono lettere, e gli altri cifre?

   c) Estraendo a caso una sigla tra quelle in b), qual'è la probabilità che caratteri siano tutti differenti?

d) Delle sigle descritte in a), quante sono quelle formate da due lettere e tre cifre (in qualunque ordine)?

2. Sia a un numero reale diverso da 1. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k\, a^k = \frac{(na - n - 1)a^{n+1} + a}{(a-1)^2} \ . \qquad (P_n)$$

Se serve, cominciare prima il caso $a = 2$.

3. a) Calcolare, per ogni n intero positivo, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$
b) Similmente, calcolare $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots$
c) Infine calcolare $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \cdots$
[*Suggerimento: per a) sviluppare il binomio* $(1+1)^n$, *per b) considerare in aggiunta lo sviluppo di* $(1-1)^n$, *e per c) anche quello di* $(1+i)^n$.]

4. In un area di ripopolamento vengono immessi ad un certo momento x_0 esemplari di una data specie. In assenza di nemici naturali, e con abbondanti risorse alimentari, il numero degli esemplari risulta moltiplicato alla fine di ogni anno per un certo fattore $a > 1$. Per controllare la crescita della popolazione, alla fine di ogni anno a partire dal secondo, b esemplari vengono trasferiti altrove.
a) Indichiamo con x_n il numero di esemplari presenti alla fine dell'anno n (subito dopo il "trasferimento"). Determinare x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in funzione di x_0, a e b. Suggerire la formula generale di x_n (per $n \geq 2$) e dimostrarla.
b) Supponendo che a sia noto, è possibile scegliere b in modo da controllare la popolazione, cioè impedire che cresca a dismisura, o viceversa che si riduca a zero?

5. a) Scrivere il sistema che dà l'intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + a = 0$ (con a parametro reale) con la retta di equazione $y = 2 - \sqrt{3}\,x$, e quindi risolverlo.
b) Utilizzare quanto fatto al punto a) per determinare il valore di a per cui la circonferenza è tangente alla retta. Verificare il risultato tracciando un disegno.
c) Determinare i valori di a e b per cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + by + a = 0$ è tangente alle rette $y = 2$ ed $y = \sqrt{3}\,x$. Verificare il risultato tracciando un disegno.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Quante sono le sigle alfanumeriche di sei caratteri (alfabeto di 26 lettere e cifre tra 0 e 9)?
b) Quante sono quelle i cui primi tre caratteri sono lettere e gli altri cifre?
c) Estraendo a caso una sigla tra quelle in b), qual'è la probabilità che i caratteri siano tutti differenti?
d) Delle sigle descritte in a), quante sono quelle formate da tre lettere e tre cifre (in qualunque ordine)?

2. [*Come il gruppo A.*]

3. a) Calcolare, per ogni n intero positivo, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$
b) Similmente, calcolare. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$
c) Infine calcolare $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \cdots$

4. [*Come il gruppo A.*]

5. a) Scrivere il sistema che dà l'intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ (con a parametro reale) con la retta di equazione $y = x$, e quindi risolverlo.
   b) Utilizzare quanto fatto in a) per determinare il valore di a per cui la circonferenza è tangente alla retta.
   c) Determinare i valori di a e b per cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + by + a = 0$ è tangente alle rette $y = -2$ e $y = \sqrt{3}\,x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. a) Quante sono le sigle alfanumeriche di cinque caratteri (con alfabeto di 21 lettere e cifre tra 0 e 9)?
   b) Quante sono quelle i cui primi tre caratteri sono lettere e gli altri cifre?
   c) Estraendo a caso una sigla tra quelle in b), qual'è la probabilità che i caratteri siano tutti differenti?
   d) Delle sigle descritte in a), quante sono quelle formate da tre lettere e due cifre (in qualunque ordine)?
2. [*Come il gruppo A.*]
3. a) Calcolare, per ogni k intero positivo, $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots$
   b) Similmente, calcolare $\binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots$
   c) Infine calcolare $\binom{k}{2} + \binom{k}{6} + \binom{k}{10} + \binom{k}{14} + \cdots$
4. [*Come il gruppo A.*]
5. a) Scrivere il sistema che dà l'intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + a = 0$ (con a parametro reale) con la retta di equazione $y = 2 + x$, e quindi risolverlo.
   b) Utilizzare quanto fatto in a) per determinare il valore di a per cui la circonferenza è tangente alla retta.
   c) Determinare i valori di a e b per cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + bx + a = 0$ è tangente alle rette $x = 2$ e $y = x/\sqrt{3}$.

Secondo compitino, 10 aprile 2000

Prima parte, gruppo A.

1. In un sacchetto ci sono 5 biglie bianche e 7 nere. Quante biglie nere vanno aggiunte per far sì che la probabilità di estrarre a caso una biglia bianca sia 1/3?
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{-x^2+1}$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z|^3 = |z|$.
4. Trovare le soluzioni di $(x^2 - 4)\log x \geq 0$.
5. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x}$.
6. Determinare al variare di α l'equazione del piano passante per $(1, 0, \alpha)$, $(2, 1, 0)$, $(2, -3, 0)$.
7. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) = x^2 \sin x - x^3$.
8. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Prima parte, gruppo B.

1. In un sacchetto ci sono 3 biglie bianche e 7 nere. Quante biglie nere vanno aggiunte per far sì che la probabilità di estrarre a caso una biglia bianca sia 1/5?
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{x^2-1}$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z|^3 - 4|z| = 0$.
4. Trovare le soluzioni di $(x^2 - 1)\log(1 + x) \geq 0$.
5. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ e $\lim_{x\to+\infty} x^{10}2^{-x}$.
6. Determinare al variare di α l'equazione del piano passante per $(2, 0, \alpha)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -3, 0)$.
7. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) = xe^{(x^2)} - x$.
8. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Prima parte, gruppo C.

1. In un sacchetto ci sono 2 biglie bianche e 6 nere. Quante biglie bianche vanno aggiunte per far sì che la probabilità di estrarre a caso una biglia bianca sia 2/3?
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Calcolare $(1 - i)^6$.
4. Trovare le soluzioni di $(x^2 + 1)\log(1 + x) \geq 0$.
5. Calcolare $\lim_{x\to 0} x \log x$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^3 + 2x + 1}$.
6. Determinare al variare di α l'equazione del piano passante per $(2, 0, \alpha)$, $(1, 3, 0)$, $(1, -3, 0)$.

Secondo compitino, 10 aprile 2000

7. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) = x(\cos x - 1)$.

8. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Dati i punti $P_1 = (0, 2, -3/2)$, $P_2 = (1, 2, -2)$ e $P_3 = (3, 0, -1)$, si scriva l'equazione del piano p passante per P_1, P_2, P_3.
   b) Si scriva il sistema che determina l'intersezione della retta r_λ determinata dalle equazioni $y + \lambda z = 2$ e $x + \lambda y + z = -1$ col piano $\mathcal{P}$ dato in a), e si dica per quali valori di λ la retta giace sul piano, per quali lo interseca in un punto e per quali non lo interseca affatto.
   c) Si scriva la retta r_λ in forma parametrica per $\lambda = 2$.

2. a) Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:
$$x \log x \geq x - 1 \quad \forall x > 0 \ . \tag{$*$}$$
   [*Suggerimento: ridursi allo studio di una funzione.*]
   b) Determinare per quali valori dei parametri a e b vale la disuguaglianza
$$x \log x \geq ax + b \quad \forall x > 0 \ . \tag{$**$}$$

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin(e^x - 1)}{(\log(1 + x))^2}$.

Recupero del primo compitino

4. a) Esprimere $\sin(5x)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$. [*Sviluppare l'identità* $e^{i5x} = (e^{ix})^5$.]
   b) Esprimere $\sin(nx)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$ per $n \geq 2$.
   c) Esprimere $\sin(5x)$ solo in termini di $\sin x$. Per quali n è possibile esprimere $\sin(nx)$ come un polinomio in $(\sin x)$ e basta?

5. Un giocatore estrae a caso due biglie da un sacchetto che ne contiene n bianche e 4 nere, e vince quando ne estrae una bianca ed una nera. Calcolare la probabilità di vittoria nel caso che n sia 4, e poi per n qualunque. Se in caso di vittoria il banco paga quanto puntato, per quali n è conveniente giocare?

Seconda parte, gruppo B.

1. a) Dati i punti $P_1 = (0, 1, -1/2)$, $P_2 = (1, 1, -1)$ e $P_3 = (3, -1, 0)$, si scriva l'equazione del piano p passante per P_1, P_2, P_3.
   b) Si scriva il sistema che determina l'intersezione della retta r_λ determinata dalle equazioni $\lambda y + z = 2$ e $x + y + \lambda z = -1$ col piano $\mathcal{P}$ dato in a), e si dica per quali valori di λ la retta giace sul piano, per quali lo interseca in un punto e per quali non lo interseca affatto.
   c) Si scriva la retta r_λ in forma parametrica per $\lambda = 2$.

2. a) Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:
$$x \log x \geq 2x - e \quad \forall x > 0 \ . \tag{$*$}$$
   b) Determinare per quali valori dei parametri a e b vale la disuguaglianza
$$x \log x \geq ax + b \quad \forall x > 0 \ . \tag{$**$}$$

3. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \log(\cos x)}{\log(1+x^3)}$.

Recupero del primo compitino

4. a) Esprimere $\cos(4x)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$. [*Sviluppare l'identità* $e^{i4x} = (e^{ix})^4$.]
   b) Esprimere $\cos(nx)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$ per $n \geq 2$.
   c) Esprimere $\cos(4x)$ solo in termini di $\cos x$. Per quali n è possibile esprimere $\cos(nx)$ come un polinomio in $(\cos x)$ e basta?

5. Un giocatore estrae a caso due biglie da un sacchetto che ne contiene n bianche e 3 nere, e vince quando ne estrae una bianca ed una nera. Calcolare la probabilità di vittoria nel caso che n sia 4, e poi per n qualunque. Se in caso di vittoria il banco paga quanto puntato, per quali n è conveniente giocare?

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. a) Dati i punti $P_1 = (1, 0, -1/2)$, $P_2 = (2, 1, -2)$ e $P_3 = (-1, 3, 0)$, si scriva l'equazione del piano p passante per P_1, P_2, P_3.
   b) Si scriva il sistema che determina l'intersezione della retta r_λ determinata dalle equazioni $\lambda x + z = 2$ e $x + y + \lambda z = -1$ col piano $\mathcal{P}$ dato in a), e si dica per quali valori di λ la retta giace sul piano, per quali lo interseca in un punto e per quali non lo interseca affatto.
   c) Si scriva la retta r_λ in forma parametrica per $\lambda = 2$.

2. a) Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:

$$x \log x \geq 3x - 9 \quad \forall x > 0 \; . \tag{$*$}$$

   b) Determinare per quali valori dei parametri a e b vale la disuguaglianza

$$x \log x \geq ax + b \quad \forall x > 0 \; . \tag{$**$}$$

3. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \log(\cos x)}{(\sin x)^3}$.

Recupero del primo compitino

4. a) Esprimere $\cos(4x)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$. [*Sviluppare l'identità* $e^{i4x} = (e^{ix})^4$.]
   b) Esprimere $\cos(nx)$ in termini di $\cos x$ e $\sin x$ per $n \geq 2$.
   c) Esprimere $\cos(4x)$ solo in termini di $\sin x$. Per quali n è possibile esprimere $\cos(nx)$ come un polinomio in $(\sin x)$ e basta?

5. Un giocatore estrae a caso due biglie da un sacchetto che ne contiene n bianche e 3 nere, e vince quando ne estrae una bianca ed una nera. Calcolare la probabilità di vittoria nel caso che n sia 4, e poi per n qualunque. Se in caso di vittoria il banco paga il doppio di quanto puntato, per quali n è conveniente giocare?

PRIMO APPELLO, 2 GIUGNO 2000

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Risolvere la disequazione $(e^x - 1)\sin x \geq 0$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \log(x^2 - 2x + 2)$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x \, dx$. [*Integrare per parti.*]
4. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 0$.
5. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 1}$.
6. Qual'è la probabilità che tirando due dadi non esca neanche un 6?
7. Determinare il fascio di rette (nel piano) che passano per il punto $(0,1)$ ed intersecano il segmento di vertici $(-1,-1)$ e $(1,1)$. Fare un disegno.
8. Sia A il quadrato (pieno) di centro $(-1,1)$ e lati paralleli agli assi e lunghi 2, e sia B l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2 + y^2 \leq 4$. Disegnare $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Risolvere la disequazione $\arctan(2x - 1) \geq 0$.
2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^{-1}$, e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo di f.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2xe^{(x^2)} dx$. [*Usare un cambio di variabile.*]
4. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$.
5. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) = x^3 \sin(1/x)$.
6. Qual'è la probabilità che tirando due dadi non esca né un 6 né un 5?
7. Determinare l'equazione del piano (nello spazio) passante per l'origine e perpendicolare al vettore $(1,-2,3)$.
8. Sia A il quadrato (pieno) di centro $(1,1)$ e lati inclinati a $45°$ e lunghi $\sqrt{2}$, e sia B l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1$. Disegnare $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Dire qual'è la probabilità che tirando n dadi non esca mai il numero 6.
   b) Supponiamo che nel caso che non esca nessun 6 il giocatore riceve n^3 volte la posta che ha puntato. Per quali n il giocatore non va (mediamente) in perdita? e per quali è più conveniente giocare?
2. a) Sia P il piano passante per il punto $(1,0,1)$ ed ortogonale al vettore $(a,0,2)$. Sia R la retta passante per i punti $(1,2,-2)$ e $(-2,-4,4)$. Scrivere il sistema che determina le intersezioni di P ed R.
   b) Discutere il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a, e dire quando la retta è incidente al piano, quando parallela, e quando invece giace sul piano.
   c) Riottenere con un metodo geometrico i risultati del punto b).

3. a) Risolvere quando $a = 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^x + ax \ , \\ x(0) = 0 \ . \end{cases}$$

b) Quando $a \neq 0$, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della soluzione $x(t)$.

4. Determinare al variare del parametro reale a (cominciando eventualmente dal caso $a = 1$) il numero di soluzioni x dell'equazione

$$\int_1^x (t-1)e^{t^2}\,dt = a \ . \tag{$*$}$$

[*Suggerimento: studiare* $f(x) := \int_1^x (t-1)e^{t^2}\,dt$.]

5. a) In un contenitore pieno d'acqua viene disciolta una data quantità di una certa molecola instabile. Più precisamente, di tali molecole se ne decompone una percentuale p (fissa) per unità di tempo. Scrivere l'equazione differenziale che governa il comportamento (al variare del tempo t) della densità $x(t)$ di tali molecole (numero per unità di volume).
b) Sapendo che il numero di molecole dimezza nel tempo di 10^4 secondi, determinare p.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Dire qual'è la probabilità che tirando n monete non esca mai testa.
b) Supponiamo che nel caso che non esca mai testa il giocatore riceve n^2 volte la posta che ha puntato. Per quali n il giocatore non va (mediamente) in perdita? e per quali è più conveniente giocare?

2. a) Sia P il piano passante per il punto $(2, 0, 2)$ ed ortogonale al vettore $(a, 0, 4)$. Sia R la retta passante per i punti $(0, 2, 1)$ e $(0, 1, 2)$. Scrivere il sistema che determina le intersezioni di P ed R.
b) Discutere il numero di soluzioni del sistema al variare del parametro a, e dire quando la retta è incidente al piano, quando parallela, e quando invece giace sul piano.
c) Riottenere con un metodo geometrico i risultati del punto b).

3. a) Risolvere quando $a = 0$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = (1 + x^2) + ax \ , \\ x(0) = 0 \ . \end{cases}$$

b) Per $a \neq 0$, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della soluzione $x(t)$.

4. Determinare al variare del parametro reale a (cominciando eventualmente dal caso $a = 1$) il numero di soluzioni x dell'equazione

$$\int_{-1}^x (t+1)e^{t^2}\,dt = a \ . \tag{2}$$

5. a) In un contenitore pieno d'acqua viene disciolta una data quantità di una certa molecola instabile. Più precisamente, di tali molecole se ne decompone una percentuale p (fissa) per unità di tempo. Scrivere l'equazione differenziale che governa il comportamento (al variare del tempo t) della densità $x(t)$ di tali molecole (numero per unità di volume).
b) Sapendo che il numero di molecole dimezza nel tempo di 10^4 secondi, determinare p.

Secondo appello, 30 giugno 2000

Prima parte, gruppo A.

1. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$.
2. Sapendo che il volume dell'ellissoide di semiassi $1, 2$ e 3 è 8π, dire qual'è il volume dell'ellissoide di semiassi $r, 2r$ e $3r$.
3. Dire per quali valori di $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-a} dx$ risulta finito.
4. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 2^{-x}$.
5. Calcolare (tramite un opportuno cambio di variabile) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx$.
6. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.
7. Sia A un insieme di 5 punti tra cui non ce n'è tre allineati. Quante sono le rette che passano per due distinti punti di A?
8. Disegnare gli insiemi A e B dei punti (x, y) tali che, rispettivamente, $y \geq x^2$ e $x^2 + y^2 \geq 1$. Indicare $A \cap B$.

Prima parte, gruppo B.

1. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.
2. Sapendo che il volume dell'ellissoide di semiassi $1, 1$ e 3 è 4π, dire qual'è il volume dell'ellissoide di semiassi r, r e $3r$.
3. Dire per quali valori di $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} x^{-a} dx$ risulta finito.
4. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^{-x})$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 \log x$.
5. Calcolare (tramite un opportuno cambio di variabile) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{(\log x)^2}{x} \, dx$.
6. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Sia A un insieme di 4 punti tra cui non ce n'è tre allineati. Quante sono le rette che passano per due distinti punti di A?
8. Disegnare gli insiemi A e B dei punti (x, y) tali che, rispettivamente, $x \geq y^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$. Indicare $A \cap B$.

Seconda parte, gruppo A.

1. Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione $x^5 + 2x^3 - 10x + 1 = 0$.
2. a) Scrivere l'equazione del piano P contenente l'asse z ed il punto $(1, \alpha, \alpha^2)$. Scrivere il sistema che determina l'intersezione del piano P con la retta R passante per i punti $(-1, 1, 2)$ e $(1, 0, 1)$.
   b) Determinare per quali valori del parametro α la retta R ed il piano P sono paralleli.

3. a) Dimostrare che per tutti i valori di $a > 0$ ogni soluzione $x(t)$ di
$$\ddot{x} + a\dot{x} + 4x = 0 \qquad (*)$$
converge a 0 per $t \to +\infty$.
b) Dimostrare che vale la stessa conclusione per l'equazione non lineare
$$\ddot{x} + a\dot{x} + 2x^3 = 0 \qquad (**)$$
Per cominciare si dimostri che se $x(t)$ è una soluzione, allora la funzione $\dot{x}^2 + x^4$ è decrescente in t. [*Calcolarne la derivata e usare l'equazione* $(**)$.]
c) Qual'è l'interpretazione fisica di quanto detto?

4. Sia V l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $y^2 + z^2 \leq (1 + x^2)^{-1}$. Far vedere che l'intersezione V_x di V col piano parallelo al piano yz e passante per il punto $(x, 0, 0)$ è un cerchio. Fare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Sia A la parte di piano contenuta nel semipiano $x \geq 1$ e compresa tra le curve $y = 1/x$ e $y = \sin(1/x)$. Dire se l'area di A è finita oppure no.

Seconda parte, gruppo B.

1. Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione $x^5 + 2x^3 - 10x + 2 = 0$.

2. a) Scrivere l'equazione del piano P contenente l'asse z ed il punto $(1, \alpha, -\alpha^2)$. Scrivere il sistema che determina l'intersezione del piano P con la retta R passante per i punti $(1, 0, 3)$ e $(2, 1, -2)$.
b) Determinare per quali valori del parametro α la retta R ed il piano P sono paralleli.

3. a) Dimostrare che per tutti i valori di $a > 0$ ogni soluzione $x(t)$ di
$$\ddot{x} + a\dot{x} + 9x = 0 \qquad (*)$$
converge a 0 per $t \to +\infty$.
b) Dimostrare che vale la stessa conclusione per l'equazione non lineare
$$\ddot{x} + a\dot{x} + 3x^5 = 0 \qquad (**)$$
Per cominciare si dimostri che se $x(t)$ è una soluzione, allora la funzione $\dot{x}^2 + x^6$ è decrescente in t. [*Calcolarne la derivata e usare l'equazione* $(**)$.]
c) Qual'è l'interpretazione fisica di quanto detto?

4. [*Come per il gruppo A.*]

5. [*Come per il gruppo A.*]

Terzo appello, 8 settembre 2000

Prima parte, gruppo A.

1. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1}{2+3i}$ in forma cartesiana.
2. Determinare l'area del parallelogramma generato dai vettori $(2,3)$ e $(1,4)$.
3. Determinare il dominio della funzione $y = \arcsin(\log x)$.
4. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = 2x$, $x(1) = e$.
5. Scrivere la primitiva della funzione $\sqrt[3]{2+x}$.
6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2}{x^3+1/x}$.
7. Tirando n monete, qual'è la probabilità che esca solo testa?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = e^{-x} - 1$.

Prima parte, gruppo B.

1. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1}{2-3i}$ in forma cartesiana.
2. Determinare l'area del parallelogramma generato dai vettori $(2,1)$ e $(1,2)$.
3. Determinare il dominio della funzione $y = \log(\arcsin x)$.
4. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = -x^2$, $x(1) = 1$.
5. Scrivere la primitiva della funzione $3x^2 + 4\sin x$.
6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+2}{x^3+1/x}$.
7. Tirando n dadi, qual'è la probabilità che esca solo il numero cinque?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \log(x+1)$.

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Dimostrare che per ogni x reale positivo si ha $x^4 - 4x + 3 \geq 0$.
   b) Usando la disuguaglianza al punto a), dimostrare che per ogni coppia di numeri reali positivi y ed z si ha $y^4 + 3z^4 \geq 4yz^3$.
   c) Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali positivi x ed y ed ogni $t > 1$ si ha $y^t + (t-1)z^t \geq tyz^{t-1}$.
2. Determinare il valore del parametro a per cui l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di $f(x) = e^x \sin x - x - ax^2$ risulta massimo. Scrivere la parte principale di f per detto valore di a.
3. a) Sia r_1 la retta passante per i punti $(0,0,1)$ e $(a,0,2)$, ed r_2 la retta passante per $(0,1,2)$ e $(1,a,0)$. Scrivere il sistema che determina le intersezioni delle due rette.
   b) Mostrare che per tutti i valori di a le rette r_1 ed r_2 non si intersecano.
   c) Mostrare che per tutti i valori di a le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.
4. Sia C la parte di spazio determinata dalle disequazioni $|x| \leq \cos z$, $|y| \leq \cos z$, $0 \leq z \leq \pi/2$. Osservare che, fissato z, l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano le prime due disequazioni è un quadrato. Determinarne il centro, il lato, e provare quindi a disegnare C. Calcolare infine il volume di C.

TERZO APPELLO, 8 SETTEMBRE 2000

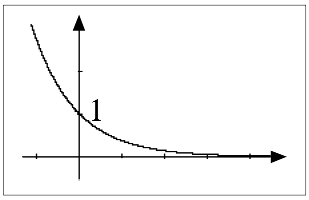
SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Dimostrare che per ogni x reale positivo si ha $x^5 - 5x + 4 \geq 0$.
   b) Usando la disuguaglianza al punto a), dimostrare che per ogni coppia di numeri reali positivi y ed z si ha $y^5 + 4z^5 \geq 5yz^4$.
   c) Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali positivi x ed y ed ogni $t > 1$ si ha $y^t + (t-1)z^t \geq tyz^{t-1}$.
2. Determinare il valore del parametro a per cui l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di $f(x) = \log(1+x)\cos x - x - ax^2$ risulta massimo. Scrivere la parte principale di f per detto valore di a.
3. a) Sia r_1 la retta passante per i punti $(1, 2a, 0)$ e $(0, 1, 2)$, ed r_2 la retta passante per $(2a, 0, 2)$ e $(0, 0, 1)$. Scrivere il sistema che determina le intersezioni delle due rette.
   b) Mostrare che per tutti i valori di a le rette r_1 ed r_2 non si intersecano.
   c) Mostrare che per tutti i valori di a le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.
4. Sia C la parte di spazio determinata dalle disequazioni $|x| \leq \sqrt{\cos z}$, $|y| \leq \sqrt{\cos z}$, $0 \leq z \leq \pi/2$. Osservare che, fissato z, l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano le prime due disequazioni è un quadrato. Determinarne il centro, il lato, e provare quindi a disegnare C. Calcolare infine il volume di C.

QUARTO APPELLO, 17 OTTOBRE 2000

PRIMA PARTE.

1. Scrivere l'equazione della sfera di centro $(1,0,0)$ e raggio 2.
2. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Determinare il dominio della funzione $y = \log\left(\sqrt{x^3+1}\right)$.
4. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\log x$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \cos(e^{-x})$.
5. Calcolare (per parti) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$.
6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} - 2x = 0 \\ x(0) = 0 \ . \end{cases}$
7. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) nel primo quadrante che soddisfano $x + y \leq 2$.
8. Suggerire una formula per la funzione disegnata qui accanto.



SECONDA PARTE.

1. Preso un mazzo di 52 carte francesi disposte in ordine casuale, calcolare la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:
   a) le prime quattro carte del mazzo sono, nell'ordine, l'asso di quadri, poi quello di cuori, quello di fiori, ed infine quello di picche;
   b) le prime quattro carte del mazzo sono i quattro assi (non importa in quale ordine);
   c) gli assi sono tutti di seguito (ma non necessariamente all'inizio del mazzo).
2. Determinare, al variare del parametro a, il limite all'infinito della soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{x} + ax = ae^t \\ x(0) = 1 \ . \end{cases}$$
3. a) Nello spazio, sia r_1 l'asse delle z, e sia $P = (a,b,c)$ un generico punto non appartenente a r_1; scrivere l'equazione del piano s che contiene sia P che la retta r_1.
   b) Sia r_2 la retta passante per il punto $(1,0,0)$ con vettore direttore $(1,-1,3)$; scrivere il sistema che determina le intersezioni di r_2 col piano s, e determinare quindi per quali P l'intersezione non è vuota.
4. Sia C il cilindro (pieno) avente come asse l'asse delle z, e raggio 1, e sia V la parte di questo cilindro compresa tra i piani di equazione $z = x+1$ e $z = 0$. Fare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

Quinto appello, 20 Dicembre 2000

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2-9}{x+1} \geq 0$.
2. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Scrivere l'equazione della retta nel piano passante per il punto $(-1,1)$ e perpendicolare alla retta $y=-x$.
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{20}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(e^{-x^3})$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\,dx$.
6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x}+2x=0 \\ x(0)=1\ . \end{cases}$
7. Lanciando tre monete, qual'è la probabilità di ottenere tre risultati uguali?
8. Disegnare (approssimativamente) il grafico della funzione $y=1/x^2$.

Seconda parte.

1. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$x''+2x'+5x=0\ .$$
b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x''+2x'+5x=2+5t\ , \\ x(0)=0\ , \\ x'(0)=0\ . \end{cases}$$

2. a) Studiare brevemente il grafico della funzione $f(x)=\log x+\dfrac{1}{x}$.
b) Al variare del parametro a, trovare il massimo valore del parametro b per cui vale la disuguaglianza
$$f(x)\geq ax+b \quad \text{per ogni } x>0. \tag{$*$}$$

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 della funzione $\tan x$ in 0. Dire quindi se è finito o infinito l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty}[x\tan(1/x)-1]dx\ .$$

SESTO APPELLO, 14 FEBBRAIO 2001

PRIMA PARTE.

1. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$ in forma cartesiana ed in forma esponenziale.
2. Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Determinare il campo di esistenza della funzione $y = \sqrt{e^x \log(x^2 - 3)}$.
4. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(e^{-x^4})$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(x^4 - x^5)$.
5. Calcolare la primitiva di $y = e^x + e^{-x}$.
6. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = 2e^{-y}x$.
7. Quanti sono i numeri di 4 cifre distinte, tutte comprese tra 1 ed 8?
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

SECONDA PARTE.

1. Trovare la parte principale (per $x \to 0$) di $e^x - \cos x - \sin x$. Calcolare quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x \sin x} \ .$$
2. Disegnare l'insieme S dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $|y| \leq e^{-x}$ e calcolarne l'area.
3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$. Risolvere quindi il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin(2t) \ , \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Settimo appello, 11 aprile 2001

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $(x-1)\log(x-1) \geq 0$.
2. Scrivere la derivata di $f(x) = \log(x + x^2)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. [*Usare il cambio di variabile* $t = \sin x$.]
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-3}\log x$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{(x^3)}$.
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4x = 0$.
7. Tirando 2 dadi, qual'è la probabilità di ottenere 2 sei?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Seconda parte.

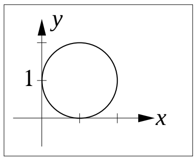
1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} x + y + b^2 z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + bz = 0 \ . \end{cases}$$
Scrivere le corrispondenti matrici ridotta e completa. Calcolare il determinante della matrice ridotta. Discutere il numero di soluzioni al variare di b in $\mathbb{R}$. Trovare tutte le soluzioni per $b = -1$.
2. Dimostrare che per tutti i numeri x positivi vale la disuguaglianza
$$\sqrt{x} \geq \log x \ .$$
[*Suggerimento: studiare la funzione* $f(x) = \sqrt{x} - \log x$.]
3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{x} + x = t^2 + 2 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Testi 2000/01

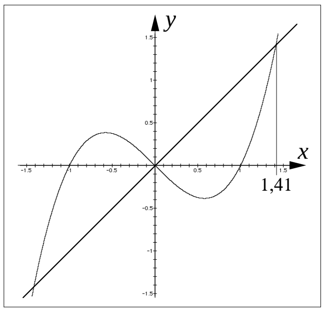
Primo compitino, 10 gennaio 2001

Prima parte, gruppo A.

1. Da un mazzo di 52 carte se ne estraggono 5. Qual'è la probabilità che una sia l'asso di cuori?
2. Risolvere la disequazione $e^{x^2-2x+1} \geq e$.
3. Calcolare la derivata di $\sin(x^4+x)$.
4. Determinare l'equazione del cerchio disegnato nella figura qui accanto.

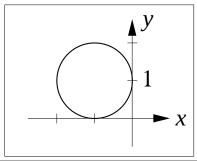


5. Risolvere l'equazione $z^2 - 3iz - 2 = 0$
6. Calcolare $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.
7. Risolvere la disequazione $f(x) \geq x$, dove f è la funzione disegnata nella figura qui accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = e^{-x} - 1$.

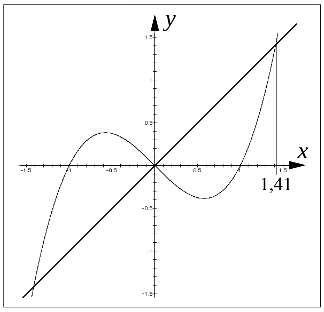


Prima parte, gruppo B.

1. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 5. Qual'è la probabilità che una sia l'asso di cuori?
2. Risolvere la disequazione $e^{x^2+2x+1} \geq e$.
3. Calcolare la derivata di $\cos(x^2+2)$.
4. Determinare l'equazione del cerchio disegnato nella figura qui accanto.

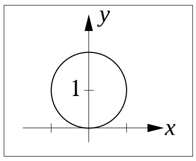


5. Risolvere l'equazione $z^2 + 3iz - 2 = 0$
6. Calcolare $(1+i)^{24}$.
7. Risolvere la disequazione $f(x) \leq x$, dove f è la funzione disegnata nella figura qui accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = \sin(x - \pi/2)$.

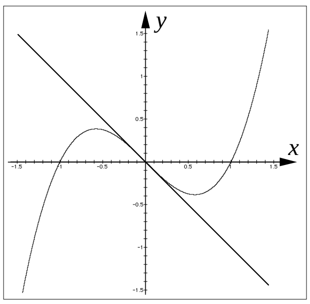


Prima parte, gruppo C.

1. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 10. Qual'è la probabilità che una sia l'asso di cuori?
2. Risolvere la disequazione $\log(x^2+2x+1) \geq 0$.
3. Calcolare la derivata di $e^{x^3+\sin x}$.
4. Determinare l'equazione del cerchio disegnato nella figura qui accanto.



5. Risolvere l'equazione $z^2 - 5iz - 6 = 0$
6. Calcolare $(1+i)^{-24}$.
7. Risolvere la disequazione $f(x) \geq -x$, dove f è la funzione disegnata nella figura qui accanto.
8. Disegnare il grafico di $y = \sin(x + \pi/2)$.



Primo compitino, 10 gennaio 2001

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Al variare del parametro reale t, si scriva l'equazione della retta R_t passante per l'origine che interseca il grafico della funzione $y = e^{(x^4)}$ nel punto di ascissa t. Trovare quindi i valori di t per cui la retta R_t risulta tangente al grafico nel punto in questione.
   b) Si dimostri che se si ripete la costruzione del punto precendente con una generica funzione $f(x)$ al posto di $e^{(x^4)}$, allora i valori di t per cui si ha tangenza sono quelli in cui si annulla la derivata del rapporto $f(t)/t$.
2. a) Dato un mazzo di 40 carte, contare in quanti modi si possono estrarre tre carte (senza tener conto dell'ordine) di cui due – e solo due – sono di cuori. Calcolare quindi la probabilità che estraendo a caso tre carte, due – e solo due – siano di cuori.
   b) Calcolare la probabilità che *almeno* due siano di cuori.
   c) Per $10 \geq n \geq k \geq 0$, calcolare la probabilità che, estraendo n carte, *almeno* k siano di cuori.
3. Trovare i numeri complessi z tali che $z^4 = i\bar{z}$ e disegnarli.
4. Si consideri la sequenza di numeri interi $1, 4, 7, 10, \ldots$. Proporre una formula per la somma S_n dei primi n numeri in questa sequenza, e dimostrarne la validità. [*Suggerimento: si cerchi tra i polinomi di secondo grado.*]

Seconda parte, gruppo B.

1. a) Al variare del parametro reale t, si scriva l'equazione della retta R_t passante per l'origine che interseca il grafico della funzione $y = 1 + x^3/2$ nel punto di ascissa t. Trovare quindi i valori di t per cui la retta R_t risulta tangente al grafico nel punto in questione.
   b) [*Come il gruppo A.*]
2. a) Dato un mazzo di 52 carte, contare in quanti modi si possono estrarre quattro carte (senza tener conto dell'ordine) di cui tre – e solo tre – siano di cuori. Calcolare quindi la probabilità che estraendo a caso quattro carte, tre – e solo tre – siano di cuori.
   b) Calcolare la probabilità che *almeno* tre siano di cuori.
   c) Per $13 \geq n \geq k \geq 0$, calcolare la probabilità che, estraendo n carte, *almeno* k siano di cuori.
3. Trovare i numeri complessi z tali che $z^4 = iz$ e disegnarli.
4. Si consideri la sequenza di numeri interi $1, 5, 9, 13, \ldots$. Proporre una formula per la somma S_n dei primi n numeri in questa sequenza, e dimostrarne la validità.

Seconda parte, gruppo C.

1. a) Al variare del parametro reale t, si scriva l'equazione della retta R_t passante per l'origine che interseca il grafico della funzione $y = x^2 + 1$ nel punto di ascissa t. Trovare quindi i valori di t per cui la retta R_t risulta tangente al grafico nel punto in questione.
   b) [*Come il gruppo A.*]
2. a) Dato un mazzo di 52 carte, contare in quanti modi si possono estrarre tre carte (senza tener conto dell'ordine) di cui due – e solo due – sono di cuori. Calcolare quindi la probabilità che estraendo a caso tre carte, due – e solo due – siano di cuori.
   b) Calcolare la probabilità che *almeno* due siano di cuori.
   c) [*Come il gruppo B.*]

3. Trovare i numeri complessi z tali che $\bar{z}^4 = iz$ e disegnarli.
4. Si consideri la sequenza di numeri interi $2, 6, 10, 14, \ldots$. Proporre una formula per la somma S_n dei primi n numeri in questa sequenza, e dimostrarne la validità.

SECONDO COMPITINO, 2 APRILE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Risolvere la disequazione $(x^2 - 1) \log x \geq 0$.
2. Scrivere la derivata di $f(x) = x \sin(x^2)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. [*Usare il cambio di variabile* $y = \sin x$.]
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-1} \log x$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 + \sin x$.
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $(-1 + i)^4$.
7. Tirando 2 dadi, qual'è la probabilità di ottenere 2 cinque?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = x^{-3}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Risolvere la disequazione $(x^2 - 1)e^x \leq 0$.
2. Scrivere la derivata di $f(x) = \log(x + x^2)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x \log x \, dx$. [*Integrare per parti.*]
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\sin x}$.
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $(1 - i)^{-8}$.
7. Tirando 3 volte di seguito una moneta, qual'è la probabilità di ottenere 3 volte testa?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = x^4$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C.

1. Risolvere la disequazione $(x^4 - 1)(e^x - 1) \geq 0$.
2. Scrivere la derivata di $f(x) = \log(\cos x)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx$. [*Integrare per parti.*]
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \log x$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{(x^3)}$.
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $(1 - i)^{-4}$.
7. Tirando 4 volte di seguito una moneta, qual'è la probabilità di ottenere 4 volte testa?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Secondo compitino, 2 aprile 2001

Prima parte, gruppo D.

1. Risolvere la disequazione $(x^2+1)\log x \geq 0$.
2. Scrivere la derivata di $f(x) = x\, e^{(x^2)}$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. [*Usare il cambio di variabile* $y = \cos x$.]
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^4$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\log(x^2)$.
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $(-1+i)^6$.
7. Tirando 2 dadi, qual'è la probabilità di ottenere 2 tre?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = \sin(x+\pi)$.

Seconda parte, gruppo A.

1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+az=0 \\ x+y+a^2z=0\ . \end{cases}$$
Scrivere le corrispondenti matrici ridotta e completa, e calcolare il determinante della ridotta. Discutere il numero delle soluzioni al variare di a in $\mathbb{R}$ e calcolarle per $a=-1$.
2. a) Dimostrare che per ogni $x>0$
$$\sqrt{x} \geq \log x\ .$$
[*Suggerimento: studiare la funzione* $f(x) = \sqrt{x} - \log x$.]
b) Dire per quali valori del parametro $a>0$ si ha che per ogni $x>0$
$$2a\sqrt{x} \geq \log x\ .$$
3. Determinare la parte principale per x che tende a 0 di
$$f(x) = e^{(x^3-8x^2)} - \cos(4x)\ .$$

Recupero del primo compitino:

4. In un allevamento di 10 mucche, esattamente 2 sono pazze. Si calcoli la probabilità che, tra 4 mucche scelte a caso, ci siano le 2 pazze.
5. Dimostrare che per ogni numero n intero vale
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}. \qquad (P_n)$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + a^2 y + 4z = 0 \ . \end{cases}$$
Scrivere le corrispondenti matrici ridotta e completa, e calcolare il determinante della ridotta. Discutere il numero delle soluzioni al variare di a in $\mathbb{R}$, e calcolarle tutte per $a = 2$.

2. a) Dimostrare che per ogni $x > 0$
$$3\sqrt[3]{x} \geq 2 \log x \ .$$
[*Suggerimento: studiare* $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 2\log x$.]
b) Dire per quali valori del parametro $a > 0$ si ha che per ogni $x > 0$
$$3a\sqrt[3]{x} \geq \log x \ .$$

3. Determinare la parte principale per x che tende a 0 di
$$f(x) = \sin(x^2 + x^3) - \sin^2 x \ .$$

Recupero del primo compitino:

4. In un allevamento di 12 mucche, esattamente 3 sono pazze. Si calcoli la probabilità che, tra 4 mucche scelte a caso, ci siano le 3 pazze.

5. Dimostrare che per ogni numero n intero vale
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3^n}\Big).$$

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} ax + y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ a^2 x + y + 9z = 0 \ . \end{cases}$$
Scrivere le corrispondenti matrici ridotta e completa e calcolare il determinante della ridotta. Discutere il numero delle soluzioni al variare di a in $\mathbb{R}$, e calcolarle tutte per $a = 1$.

2. a) Dimostrare che per ogni $x > 0$
$$6\sqrt[3]{x} \geq 5 \log x \ .$$
[*Suggerimento: studiare* $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5\log x$.]
b) Dire per quali valori del parametro $a > 0$ si ha che per ogni $x > 0$
$$3a\sqrt[3]{x} \geq \log x \ .$$

3. Determinare la parte principale per x che tende a 0 di
$$f(x) = \sin(4x^2 + x^3) - \sin^2(2x) \ .$$

Recupero del primo compitino:

4. In un allevamento di 10 mucche, esattamente 3 sono pazze. Si calcoli la probabilità che, tra 4 mucche scelte a caso, ci siano le 3 pazze.

5. Dimostrare che per ogni numero n intero vale
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} = 2\Big(1 - \frac{2^n}{3^n}\Big).$$

Seconda parte, gruppo D.

1. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax-ay+z=0 \\ a^2x+a^2y+z=0 \end{cases}$$
Scrivere le corrispondenti matrici ridotta e completa. Calcolare il determinante della matrice ridotta. Discutere il numero di soluzioni al variare di a in $\mathbb{R}$. Trovare tutte le soluzioni per $a=-1$.

2. a) Dimostrare che la disuguaglianza
$$4\sqrt{x} \geq 5\log x$$
vale per tutti i numeri x positivi. [*Suggerimento: studiare la funzione* $f(x)=5\sqrt{x}-5\log x$.]
b) Dire per quali valori del parametro $a \in (0,+\infty)$ la disequazione
$$2a\sqrt{x} \geq \log x$$
è soddisfatta per ogni $x>0$.

3. Determinare la parte principale per x che tende a 0 di
$$f(x)=e^{(x^3-2x^2)}-\cos(2x).$$

Recupero del primo compitino:

4. In un allevamento di 10 mucche, esattamente 2 sono pazze. Si calcoli la probabilità che, tra 5 mucche scelte a caso, ci siano le 2 pazze.

5. Dimostrare che per ogni numero n intero vale
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{1}{3}\Big(2+\frac{(-1)^n}{2^n}\Big).$$

PRIMO APPELLO, 1 GIUGNO 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Risolvere la disequazione $e^x \log(x+1) \geq 0$.
2. Calcolare $(1+\sqrt{3}i)^{10}$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int e^{\sin x} \cos x \, dx$.
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{\log x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$.
5. Calcolare il prodotto vettoriale $(1,2,3) \times (1,2,0)$.
6. Risolvere il problema di Cauchy $\dot{x} - 3x = 0$, $x(0) = 1$.
7. Lanciando un dado tre volte, qual'è la probabilità che la seconda volta esca un numero dispari?
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x-2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Risolvere la disequazione $(1+x^4)\log(x-1) < 0$.
2. Calcolare $(1-\sqrt{3}i)^{10}$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int 6(\sin x)^5 \cos x \, dx$.
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x + \sin x$.
5. Calcolare il prodotto vettoriale $(1,0,-2) \times (2,1,3)$.
6. Risolvere il problema di Cauchy $\dot{x} + 5x = 0$, $x(0) = 1$.
7. Lanciando un dado tre volte, qual'è la probabilità che la prima volta esca un numero pari?
8. Disegnare sommariamente la curva di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. Sia S l'insieme dei punti nello spazio che soddisfano $0 \leq z \leq 1$ e
$$x^2 + y^2 \leq z.$$
a) Descrivere la sezione di S ad altezza z (con $z \in (0,1)$) e calcolare il volume di S.
b) Provare a disegnare S.
c) Al variare di $\alpha \in (0,2)$, sia S_α l'insieme dei punti tali che $\alpha x^2 + (2-\alpha)y^2 \leq z \leq 1$. Determinare per quale α risulta minimo il volume di S_α. [*Può essere utile ricordare che l'area di un'ellisse di semiassi a e b è πab.*]

2. a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$.
b) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \ . \end{cases}$$

3. Sia π il piano di equazione $x + 2y + 3z = 7$ e P il punto di coordinate $(0, 0, 0)$.
   a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per P e perpendicolare a π.
   b) Si determini il punto di intersezione tra r e π.
   c) Detta s la retta di equazioni $2x - y - 4 = 0$ e $x - 2z - 2 = 0$, dire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

4. a) Dimostrare che per ogni $x > 0$
   $$e^{x/2} \geq x \ . \qquad (*)$$
   [*Suggerimento: studiare la funzione* $f(x) = e^{x/2} - x$.]
   b) Se sostituiamo il termine di destra in $(*)$ con $2x$, la disuguaglianza continua a valere per tutti gli x?

5. a) In quanti modi diversi posso ordinare un mazzo di 40 carte?
   b) In quanti di questi ordinamenti le prime tre carte del mazzo risultano essere, nell'ordine, l'asso, il due ed il tre di quadri? Calcolare quindi la probabilità che si verifichi un simile evento.
   c) Calcolare la probabilità che le prime tre carte del mazzo siano l'asso, il due ed il tre di quadri (ma non necessariamente in questo ordine).

Seconda parte, gruppo B.

1. Sia S l'insieme dei punti nello spazio che soddisfano $0 \leq z \leq 1$ e
   $$x^2 + y^2 \leq z^2.$$
   a) Descrivere la sezione di S ad altezza z e calcolare il volume di S.
   b) Provare a disegnare S.
   c) Al variare di $\alpha \in (0, 2)$, sia S_α l'insieme dei punti tali che $\alpha x^2 + (2 - \alpha)y^2 \leq z^2$. Determinare per quale α risulta minimo il volume di S_α.

2. a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.
   b) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 5e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \ . \end{cases}$$

3. Sia π il piano di equazione $2x + 5y + z = 8$ e P il punto di coordinate $(0, 0, 0)$.
   a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per P e perpendicolare al piano π.
   b) Si determini il punto di intersezione tra r e π.
   c) Detta s la retta di equazioni $3x - z - 9 = 0$ e $y - 5z - 1 = 0$, dire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

4. a) Dimostrare che per ogni $x > 0$
   $$e^{x} \geq 2x \ . \qquad (*)$$
   [*Suggerimento: studiare la funzione* $f(x) = e^{x} - 2x$.]
   b) Se sostituiamo il termine di destra in $(*)$ con ex, la disuguaglianza continua a valere per tutti gli x?

5. a) In quanti modi diversi posso ordinare un mazzo di 40 carte?
   b) In quanti di questi ordinamenti le prime quattro carte del mazzo risultano essere, nell'ordine, l'asso, il due ed il tre ed il quattro di picche? Calcolare quindi la probabilità che si verifichi un simile evento.
   c) Calcolare la probabilità che le prime quattro carte del mazzo siano l'asso, il due ed il tre ed il quattro di picche (ma non necessariamente in questo ordine).

Secondo appello, 3 luglio 2001

Prima parte.

1. Mettere i seguenti numeri in ordine crescente: 10^{300}, 100^{100}, 2^{2000}.
2. Dire quali delle seguenti identità sono vere
$$\tan(x+\pi) = \tan x \qquad -\cos x = \cos(-x) \qquad \sin(x-\pi) = -\sin x \ .$$
3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$. [*Usare un cambio di variabile.*]
4. Risolvere la disequazione $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0$.
5. Dire per quali valori del parametro a la funzione $x = t^a$ risolve l'equazione $\dot{x} + x^2 = 0$.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2(1+x^2)t$.
7. Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
8. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) = x^3 + 4x^4(1+x)$.

Seconda parte.

1. Trovare tutte le coppie di funzioni $x(t)$ e $y(t)$ tali che
$$\begin{cases} \dot{x} = y \ , \\ \dot{y} = -x \ . \end{cases}$$
[*Ridursi ad un'equazione differenziale in cui appare solo x (oppure solo y).*]
2. Siano a, b due numeri reali positivi.
a) Calcolare l'area compresa tra la parabola di equazione $y = -ax^2 + bx$ e l'asse delle x.
b) Per ogni b trovare il valore di a per cui la parabola $y = -ax^2 + bx$ è tangente alla retta $y = 1 - x$. Disegnate questa parabola per $b = 0$, $b = 1$ e $b \simeq +\infty$.
c) Tra tutte le parabole di cui al punto b), trovare quella per cui l'area compresa tra essa e l'asse delle x risulta massima.
3. Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni del sistema
$$\begin{cases} (a+2)y + az + 1 = 0 \\ (3+a)y - x = 0 \\ x - y + 3z = 1 \ . \end{cases}$$
4. Sia $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. Tra tutti i punti del grafico di f, trovare quello la cui distanza dall'origine è minima.
5. Disegnare l'insieme dei punti z del piano complesso che soddisfano
$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq |z - i| \ .$$
[*Può essere utile ricordare che $|z - w|$ rappresenta la distanza tra due punti z e w nel piano complesso.*]

Terzo appello, 10 settembre 2001

Prima parte.

1. Determinare il campo di esistenza della funzione $\sqrt{1-\log x}$.
2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4\dot{x}+5=0$.
3. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\log x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin x}{x}$.
5. Dire per quali valori del parametro a la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ è invertibile, e scriverne l'inversa.
6. Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4x=e^{-t}$.
7. Dare (anche con un disegno) tre insiemi A, B, C tali che l'intersezione di tutti e tre è vuota ma l'intersezione di due qualunque non è vuota.
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $y=1+\sin(x+\pi)$.

Seconda parte.

1. Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte simultaneamente 5. Qual'è la probabilità che:
a) le 5 carte siano tutte dello stesso segno (colore);
b) 4 carte siano dello stesso colore, ma la rimanente sia di un colore diverso (colore fallito);
c) tra le 5 carte ci siano quattro assi (poker d'assi);
d) tra le 5 carte ce ne siano quattro uguali (poker);
e) (difficile) tra le 5 carte ci siano una coppia e un tris.
2. È dato il piano p di equazione $3x+4z=5$, e la retta r di equazioni $x=0$ e $z=0$.
a) Si discuta la posizione relativa del piano p e della retta r;
b) Si trovi la distanza minima tra il piano p e la retta r, e l'insieme dei punti di minima distanza;
c) Si determini la retta perpendicolare a p e passante per il punto $(1,1,1)$.
3. Trovare per quali valori del parametro a l'equazione $x^5-5x^3+10x=a$ ha una sola soluzione.

Quarto appello, 4 ottobre 2001

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\arcsin(x/2) > 0$.
2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3x^2 t^2$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int 2x\,\sin(x^2)\,dx$.
4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{\log x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(x\,e^x + \pi/2)$.
5. Dire per quali valori del parametro a la matrice $\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ è invertibile, e scriverne l'inversa.
6. Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = e^{-t}$.
7. Quante sono i numeri di cinque cifre (non necessariamente distinte) che non cominciano per zero?
8. Disegnare sommariamente l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Seconda parte.

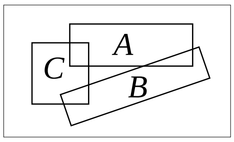
1. Si sceglie a caso un numero intero m tra 1 e 90 (compresi) e poi un altro intero n, sempre compreso tra 1 e 90, e non necessariamente distinto da m.
   a) Qual'è la probabilità che sia n sia uguale a $m + 1$?
   b) Come cambia il risultato se m viene etratto solo tra i numeri pari?
2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di
   $$f(x) := e^{x^2(1-x^2)} - 1 - x^2 \ ,$$
   e calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-2} f(x)$.
3. Studiare (fin dove possibile) la funzione $f(x) := x\,\log x$, e dire quindi per quali valori del parametro reale a l'equazione $\log x = a/x$ ha una sola soluzione.

Testi 2001/02

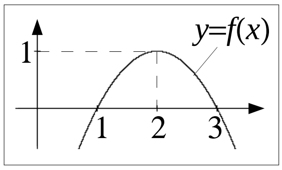
Compitino di prova, 18 ottobre 2001

Prima parte, gruppo A.

1. Dire quali delle seguenti identità sono vere e quali no:
$$\sin x = \cos(x + \pi/2) \quad \sin x = -\sin(x + \pi) \quad \sin x = \cos(\pi - x)\ .$$
2. Risolvere $x(x^2 - 3x + 2) > 0$.
3. Siano A, B, C i rettangoli (pieni) disegnati nella figura accanto. Indicare l'insieme $A \cap B \cap C$.



4. Qual'è il volume della sfera di raggio r?
5. Determinare il campo di esistenza di $\log(\log x)$.
6. Aggiungere nella figura accanto il grafico della funzione $y = x - 1$ e risolvere la disequazione $f(x) \geq x - 1$.



7. Disegnare il grafico di $1 + \sin(2x)$.
8. Disegnare approssimativamente l'insieme dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $1/x \leq y \leq \sqrt{x}$.

Prima parte, gruppo B.

1. Dire quali delle seguenti identità sono vere e quali no:
$$\sin x = -\cos(x + \pi/2) \quad \sin x = -\cos(x + \pi) \quad \cos x = \cos(\pi - x)\ .$$
2. Risolvere $\dfrac{x^2 - 1}{x + 3} > 0$.
3. Siano dati A, B, C come nell'esercizio 3 del gruppo A. Indicare l'insieme $(A \cup B) \cap C$.
4. Qual'è il volume del parallelepipedo di lati r, $4r$ e $r/3$?
5. Determinare il campo di esistenza di $\arcsin(\log x)$.
6. Nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A, aggiungere il grafico della funzione $y = x - 1$ e risolvere la disequazione $f(x) \leq x - 1$.
7. Disegnare il grafico di $(x - 1)^3$.
8. Disegnare approssimativamente l'insieme dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Prima parte, gruppo C.

1. Dire quali delle seguenti identità sono vere e quali no:
$$\cos x = \sin(x + \pi/2) \quad \cos x = -\cos(x + \pi) \quad \cos x = \sin(\pi - x)\ .$$
2. Risolvere $x(x^2 + 3x + 2) > 0$.
3. Siano dati A, B, C come nell'esercizio 3 del gruppo A. Indicare l'insieme $A \cup (B \cap C)$.
4. Qual'è il volume del clindro con raggio di base r ed altezza $2r$?
5. Determinare il campo di esistenza di $\log(-\log x)$.
6. Nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A, aggiungere il grafico della funzione $y = 3 - x$ e risolvere la disequazione $f(x) \geq 3 - x$.
7. Disegnare il grafico di $e^{-x} - 1$.
8. Disegnare approssimativamente l'insieme dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $x \leq y \leq x^2$.

Compitino di prova, 18 ottobre 2001

Prima parte, gruppo D.

1. Dire quali delle seguenti identità sono vere e quali no:

$$\cos x = -\sin(x + \pi/2) \quad \cos x = -\cos(\pi - x) \quad \sin x = \sin(\pi - x)\ .$$

2. Risolvere $\dfrac{x^2+1}{x-3} > 0$.
3. Siano dati A, B, C come nell'esercizio 3 del gruppo A. Indicare l'insieme $A \cap (B \cup C)$.
4. Qual'è il volume del cilindro con raggio di base r ed altezza r?
5. Determinare il campo di esistenza di $\log(1 - x^2)$.
6. Nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A, aggiungere il grafico della funzione $y = 3 - x$ e risolvere la disequazione $f(x) \leq 3 - x$.
7. Disegnare il grafico di $\dfrac{1}{x+1}$.
8. Disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $x > 0$ e $x^2 \leq y \leq 1/x$.

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Per quali valori del parametro reale a si ha che $t^2 + 1 \geq at$ per tutti i numeri reali t?
   b) Dire per quali valori di a si ha che $x^2 + y^2 \geq axy$ per tutti i numeri reali x, y.
2. a) Trovare il raggio della circonferenza di centro $(0, 1)$ e tangente alla retta $y = x/2$.
   b) Scrivere l'equazione di detta circonferenza.
3. a) Sia P un punto sul mare, situato ad un'altezza h dall'acqua. Detto R il raggio della terra, calcolare qual'è la massima distanza d a cui un oggetto al livello del mare è ancora visibile da P (distanza dell'orizzonte).
   b) Trovare una formula approssimativa più semplice da utilizzare quando h è molto più piccolo di R. Calcolare d per $h = 100\,\text{m}$.
4. Carlo deve misurare con precisione la durata (compresa tra i due e i tre minuti) di un segnale acustico che può riprodurre a piacere. Non avendo un cronometro a disposizione, ma solo un orologio digitale che segna i minuti e non i secondi, Carlo decide di seguire questa procedura: fa partire il segnale in un momento scelto a caso, e prende la differenza tra l'ora segnata dall'orologio all'inizio del segnale acustico e quella segnata alla fine. Non soddisfatto del risultato, Carlo ripete la procedura diverse volte, prendendo poi la media dei tempi così ottenuti. È vero che questo porta ad un risultato più preciso? E quale dovrebbe essere il numero di tentativi da fare per arrivare ad una precisione dell'ordine di un secondo?

Seconda parte, gruppo B.

1. a) Per quali valori del parametro reale a si ha che $t^2 + 4 \geq at$ per tutti i numeri reali t?
   b) Dire per quali valori di a si ha che $x^2 + 4y^2 \geq axy$ per tutti i numeri reali x, y.
2. a) Trovare il raggio della circonferenza di centro $(1, 0)$ e tangente alla retta $y = x/2$.
   b) Scrivere l'equazione di detta circonferenza.

   [*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

COMPITINO DI PROVA, 18 OTTOBRE 2001

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. a) Per quali valori del parametro reale a si ha che $t^2 + 9 \geq at$ per tutti i numeri reali t?
   b) Dire per quali valori di a si ha che $x^2 + 9y^2 \geq axy$ per tutti i numeri reali x, y.
2. a) Trovare il raggio della circonferenza di centro $(2, 0)$ e tangente alla retta $y = x/3$.
   b) Scrivere l'equazione di detta circonferenza.

   [*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. a) Per quali valori del parametro reale a si ha che $t^2 + 1 \geq 4at$ per tutti i numeri reali t?
   b) Dire per quali valori di a si ha che $x^2 + y^2 \geq 4axy$ per tutti i numeri reali x, y.
2. a) Trovare il raggio della circonferenza di centro $(0, 2)$ e tangente alla retta $y = x/3$.
   b) Scrivere l'equazione di detta circonferenza.

   [*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

PRIMO COMPITINO, 6 NOVEMBRE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 5 bianche, 2 nere e 6 rosse, qual'è la probabilità che NON sia bianca?
2. Risolvere $(x^2+1)\log(x-2)<0$.
3. Disegnare la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,0)$ e scriverne l'equazione.
4. Calcolare la derivata di $x^2e^{1+x^2}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4+\sin x\,dx$.
6. Disegnare il grafico di $-e^{-x}$.

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Scrivere le derivate delle seguenti funzioni: e^{2x}, x^a con $a\neq 0$, $\tan x$.
8. Calcolare, con un opportuno cambio di variabile, $\displaystyle\int 3x^2\sin(x^3)\,dx$.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Mettere in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{5}{1-2i}$.

8'. Disegnare il numero complesso $-\sqrt{3}+i$ nel piano cartesiano e scriverlo in forma esponenziale.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 10 bianche, 3 nere e 8 rosse, qual'è la probabilità che NON sia nera?
2. Risolvere $e^x(x^2-1)<0$.
3. Disegnare la retta con coefficiente angolare -1 passante per il punto $(2,1)$ e scriverne l'equazione.
4. Calcolare la derivata di xe^{-x^2}.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x+\cos x\,dx$.
6. Disegnare il grafico di $-\sqrt{x}$.

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Scrivere le derivate delle seguenti funzioni: e^{-x}, $1/x^2$, $\sqrt[3]{x}$.
8. Calcolare, con un opportuno cambio di variabile, $\displaystyle\int 2x\cos(x^2)\,dx$.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Mettere in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{5}{1+2i}$.

8'. Disegnare il numero complesso $\sqrt{3}+i$ nel piano cartesiano e scriverlo in forma esponenziale.

PRIMO COMPITINO, 6 NOVEMBRE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO C.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 3 bianche, 6 nere e 4 rosse, qual'è la probabilità che NON sia rossa?
2. Risolvere $e^x - 2 < 0$.
3. Disegnare la retta passante per i punti $(-1, 1)$ e $(1, 3)$ e scriverne l'equazione.
4. Calcolare la derivata di xe^{x-x^2}.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4 + 3x^{21}\,dx$.
6. Disegnare il grafico di $1 + \sin(x + \pi)$.

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Scrivere le derivate delle seguenti funzioni: $\tan x$, e^{ax} con $a \in \mathbb{R}$, $\log(x^2)$.
8. Calcolare, con un opportuno cambio di variabile, $\displaystyle\int 4x^3 \cos(x^4)\,dx$.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Mettere in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{5}{-1+2i}$.

8'. Disegnare il numero complesso $-\sqrt{3}-i$ nel piano cartesiano e scriverlo in forma esponenziale.

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. Estraendo a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 1 bianca, 3 nere e 8 rosse, qual'è la probabilità che NON sia nera?
2. Risolvere $(x^2 + 4)(e^x - 1) < 0$.
3. Disegnare la retta con coefficiente angolare 0 passante per il punto $(1, 2)$ e scriverne l'equazione.
4. Calcolare la derivata di $(x^3 + 1)e^{-x}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x + \cos x\,dx$.
6. Disegnare il grafico di $-1 + \sin(2x)$.

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Scrivere le derivate delle seguenti funzioni: $\log(x^3)$, $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sqrt[4]{x}$.
8. Calcolare, con un opportuno cambio di variabile, $\displaystyle\int 2x \sin(x^2)\,dx$.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Mettere in forma cartesiana il numero complesso $\dfrac{10}{-1+2i}$.

8'. Disegnare il numero complesso $\sqrt{3}-i$ nel piano cartesiano e scriverlo in forma esponenziale.

PRIMO COMPITINO, 6 NOVEMBRE 2001

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Disegnare la retta $x = 4$ e le curve $y = 1/x$ e $y = \sqrt{x}$.
   b) Disegnare l'insieme S dei punti (x, y) nel primo quadrante tali che $x \leq 4$ e $1/x \leq y \leq \sqrt{x}$.
   c) Calcolare l'area di S.

2. a) Quanti numeri di cinque cifre comprese tra 1 e 8 si possono scrivere?
   b) Tra i numeri di cui al punto a), quanti sono quelli con cifre tutte diverse?
   c) Qual'è la probabilità che, estraendo un numero a caso tra quelli del punto b), le cifre siano ordinate in senso crescente (da sinistra a destra)?

3. a) Quante diverse parole di 20 caratteri si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C, D?
   b) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che non contengono nessuna coppia di lettere consecutive uguali?
   c) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che soddisfano la seguente proprietà: la A e la B non sono mai seguite da una C e la C e la D non sono mai seguite da una A.
   d) Tra le parole del punto a), quante sono quelle in cui non appaiono mai due A consecutive? [*Difficile!*]

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

4. a) Scrivere l'equazione della retta r che passa per l'origine ed ha coefficiente angolare m.
   b) Quale condizione si deve imporre su m per far sì che r intersechi il grafico della funzione $f(x) = e^{x^2+x}$ nel punto di ascissa t?
   c) Per quali valori di t la retta definita nel punto b) risulta anche tangente al grafico di f nel punto di ascissa t?
   d) Determinare tutte le rette che passano per l'origine e sono tangenti al grafico di f in un qualche punto.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

4'. a) Dato $z = x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso $x-iy$. Se $\rho e^{i\theta}$ è la forma esponenziale di z, qual'è quella di $\bar{z}$?
   b) Risolvere l'equazione $z^3 = 4\bar{z}$ e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Disegnare la retta $x = 2$ e le curve $y = 1/x$ e $y = x^2$.
   b) Disegnare l'insieme S dei punti (x, y) nel primo quadrante tali che $x \leq 2$ e $1/x \leq y \leq x^2$.
   c) Calcolare l'area di S.

2. a) Quanti numeri di cinque cifre comprese tra 1 e 7 si possono scrivere?
   b) Tra i numeri del punto a), quanti sono quelli con cifre tutte diverse?
   c) Qual'è la probabilità che, estraendo un numero a caso tra quelli del punto b), le cifre siano ordinate in senso crescente (da sinistra a destra)?

3. a) Quante diverse parole di 20 caratteri si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C, D, E?
   b) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che non contengono nessuna coppia di lettere consecutive uguali?
   c) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che soddisfano la seguente proprietà: la A e la B non sono mai seguite da una C e la C, la D e la E non sono mai seguite da una A.

d) Tra le parole del punto a), quante sono quelle in cui non appaiono mai due A consecutive? [*Difficile!*]

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

4. a) Scrivere l'equazione della retta r che passa per l'origine ed ha coefficiente angolare m.
b) Quale condizione si deve imporre su m per far sì che r intersechi il grafico della funzione $f(x) = e^{x^2-x}$ nel punto di ascissa t?
c) Per quali valori di t la retta definita nel punto b) risulta anche tangente al grafico di f nel punto di ascissa t?
d) Determinare tutte le rette che passano per l'origine e sono tangenti al grafico di f in un qualche punto.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

4'. a) Dato $z = x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso $x-iy$. Se $\rho e^{i\theta}$ è la forma esponenziale di z, qual'è quella di $\bar{z}$?
b) Risolvere l'equazione $z^3 = 4\bar{z}$ e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

Seconda parte, gruppo C.

1. a) Disegnare la retta $x = 4$ e le curve $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.
b) Disegnare l'insieme S dei punti (x, y) nel primo quadrante tali che $x \leq 4$ e $\sqrt{x} \leq y \leq x^2$.
c) Calcolare l'area di S.

2. a) Quanti numeri di quattro cifre comprese tra 1 e 8 si possono scrivere?
b) Tra i numeri del punto a), quanti sono quelli con cifre tutte diverse?
c) Qual'è la probabilità che, estraendo un numero a caso tra quelli del punto b), le cifre siano ordinate in senso crescente (da sinistra a destra)?

3. a) Quante diverse parole di 30 caratteri si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C, D?
b) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che non contengono nessuna coppia di lettere consecutive uguali?
c) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che soddisfano la seguente proprietà: la A e la B non sono mai seguite da una A e la C e la D non sono mai seguite da una B.
d) Tra le parole del punto a), quante sono quelle in cui non appaiono mai due A consecutive? [*Difficile!*]

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

4. a) Scrivere l'equazione della retta r che passa per l'origine ed ha coefficiente angolare m.
b) Quale condizione si deve imporre su m per far sì che r intersechi il grafico della funzione $f(x) = 2e^{x^2+x}$ nel punto di ascissa t?
c) Per quali valori di t la retta definita nel punto b) risulta anche tangente al grafico di f nel punto di ascissa t?
d) Determinare tutte le rette che passano per l'origine e sono tangenti al grafico di f in un qualche punto.

Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

4'. a) Dato $z = x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso $x-iy$. Se $\rho e^{i\theta}$ è la forma esponenziale di z, qual'è quella di $\bar{z}$?
b) Risolvere l'equazione $z^3 = 4\bar{z}$ e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

PRIMO COMPITINO, 6 NOVEMBRE 2001

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. a) Disegnare la retta $x = 3$ e le curve $y = 1/x$ e $y = x^3$.
   b) Disegnare l'insieme S dei punti (x, y) nel primo quadrante tali che $x \leq 3$ e $1/x \leq y \leq x^3$.
   c) Calcolare l'area di S.
2. a) Quanti numeri di quattro cifre comprese tra 1 e 7 si possono scrivere?
   b) Tra i numeri del punto a), quanti sono quelli con cifre tutte diverse?
   c) Qual'è la probabilità che, estraendo un numero a caso tra quelli del punto b), le cifre siano ordinate in senso crescente (da sinistra a destra)?
3. a) Quante diverse parole di 30 caratteri si possono scrivere usando solo le lettere A, B, C, D, E?
   b) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che non contengono nessuna coppia di lettere consecutive uguali?
   c) Tra le parole del punto a), quante sono quelle che soddisfano la seguente proprietà: la A e la B non sono mai seguite da una D e la C, la D e la E non sono mai seguite da una B.
   d) Tra le parole del punto a), quante sono quelle in cui non appaiono mai due A consecutive? [*Difficile!*]

Solo per gli studenti del nuovo ordinamento:

4. a) Scrivere l'equazione della retta r che passa per l'origine ed ha coefficiente angolare m.
   b) Quale condizione si deve imporre su m per far sì che r intersechi il grafico della funzione $f(x) = e^{2x(2x-1)}$ nel punto di ascissa t?
   c) Per quali valori di t la retta definita nel punto b) risulta anche tangente al grafico di f nel punto di ascissa t?
   d) Determinare tutte le rette che passano per l'origine e sono tangenti al grafico di f in un qualche punto.

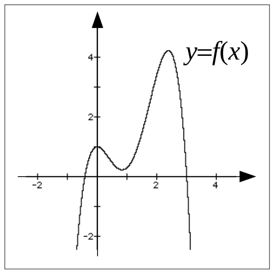
Solo per gli studenti del vecchio ordinamento:

4'. a) Dato $z = x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso $x-iy$. Se $\rho e^{i\theta}$ è la forma esponenziale di z, qual'è quella di $\bar{z}$?
   b) Risolvere l'equazione $z^3 = 4\bar{z}$ e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

SECONDO COMPITINO, 4 DICEMBRE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Estraendo un numero intero a caso tra 1 e 20 (compresi), qual'è la probabilità che sia divisiabile per 3?
2. Usando il teorema di de l'Hôpital, calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1+x)}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3}$ e $\lim_{x\to+\infty} \log(e^x + x^2)$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$ [*usare un cambio di variabile*].
5. Scrivere la derivata di e^{x^2-1}, trovare i punti in cui si annulla e dire si si tratta di punti di massimo, minimo, o altro.
6. Sia f la funzione nella figura accanto. Indicare (nel disegno) le soluzioni della disequazione $f(x) \geq x$.



Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $e^x + x^{10}$.
8. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: e^{2x}, $x\sqrt[3]{x}$, $\log\log x$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Calcolare $(1+i)^{10}$.

8'. Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

9'. Scrivere lo sviluppo di Taylor (illimitato) in 0 di e^x e $\sin x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Estraendo un numero intero a caso tra 1 e 22 (compresi), qual'è la probabilità che sia divisiabile per 5?
2. Usando il teorema di de l'Hôpital, calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x}$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\int x\cos(x^2)\, dx$ [*usare un cambio di variabile*].
5. Scrivere la derivata di e^{2x-x^2}, trovare i punti in cui si annulla e dire si si tratta di punti di massimo, minimo, o altro.
6. Sia f come nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A. Indicare (nel disegno) l'insieme dei punti (x,y) tali che $2 \leq y \leq f(x)$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $x + \log^2 x$.
8. Calcolare le derivate di: $\sin^2 x + \cos^2 x$, e^{x^2}, $x(\log x + 1)$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

PRIMA PARTE, GRUPPO C.

1. Estraendo un numero intero a caso tra 1 e 30 (compresi), qual'è la probabilità che sia divisiabile per 7?
2. Usando il teorema di de l'Hôpital, calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{e^x - 1}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log x}$ e $\lim_{x\to 0} \sin(\pi e^{-x})$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int 2xe^x\,dx$ [*integrare per parti*].
5. Scrivere la derivata di $\log(1-x^2)$, trovare i punti in cui si annulla e dire si si tratta di punti di massimo, minimo, o altro.
6. Sia f come nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A. Indicare (nel disegno) le soluzioni della disequazione $f(x) \geq 2$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $x^2\big(x - \dfrac{2}{x}\big)$.
8. Calcolare le derivate di: $e^x e^{2-x}$, e^{x^2}, $\cos(\log x)$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. Estraendo un numero intero a caso tra 1 e 17 (compresi), qual'è la probabilità che sia divisiabile per 5?
2. Usando il teorema di de l'Hôpital, calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{e^x - 1}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$ e $\lim_{x\to+\infty} 1 + \log\log x$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x\log x\,dx$ [*integrare per parti*].
5. Scrivere la derivata di $\log(2x - x^2)$, trovare i punti in cui si annulla e dire si si tratta di punti di massimo, minimo, o altro.
6. Sia f come nella figura dell'esercizio 6 del gruppo A. Indicare (nel disegno) l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \leq y \leq f(x)$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $2^x + 4^x$.
8. Calcolare le derivate di: $e^x e^{1-x}$, $\sqrt{1+x^2}$, $\log\log x$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Sia $f(x) = \dfrac{2+\log x}{x}$. Calcolare i limiti di f in 0^+ e $+\infty$.

b) Disegnare il grafico di f e dire quante solo le soluzioni dell'equazione $f(x) = 4$.
c) Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
d) Trovare i valori massimi e minimi assunti da f nell'insieme di definizione, e poi nella semiretta $[1, +\infty)$.

2. a) Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'area dell'insieme A_a dei punti (x, y) tali che $|y| \le a - x^2$.
b) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x, y, z) tali che $x \ge 1$ e $|y| \le \dfrac{1}{x} - z^2$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia dato un parallelepipedo con lati di lunghezza x, y e 1.
a) Determinarne l'area della superficie totale A ed il volume V (in funzione di x e y).
b) Tra tutti i parallelepipedi con $A = 1$, qual'è quello di volume massimo? e quello di volume minimo?

Per gli studenti del vecchio ordinamento (uno a scelta tra i due):

3'. Si trovi la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) = e^{-2x^2} - \cos(2x)$.

3". Si consideri il sistema $\begin{cases} x + a^2 y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + ay + z = 0\ . \end{cases}$
Scriverne le matrici ridotta e completa. Calcolare il determinante della matrice ridotta. Discutere il numero di soluzioni al variare di a in $\mathbb{R}$. Trovare tutte le soluzioni per $a = -1$.

Recupero del primo compitino:

4. In un sacchetto sono contenute 11 biglie di colore bianco o nero.
a) Sapendo che il numero della bianche è 4, calcolare la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino entrambe nere.
b) Sapendo che la probabilità che, estraendo due biglie a caso, siano entrambe nere è $3/11$, calcolare quante sono le biglie bianche.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Sia $f(x) = \dfrac{3 + \log x}{x}$. Calcolare i limiti di f in 0^+ e $+\infty$.
b) Disegnare il grafico di f e dire quante solo le soluzioni dell'equazione $f(x) = 4$.
c) Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
d) Trovare i valori massimi e minimi assunti da f nell'insieme di definizione, e poi nell'intervallo $[1, e]$.

2. a) Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'area dell'insieme A_a dei punti (x, y) tali che $|y| \le a - x^4$.
b) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x, y, z) tali che $x \ge 1$ e $|y| \le \dfrac{1}{x} - z^4$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia dato un parallelepipedo con lati di lunghezza x, y e 2.
a) Determinarne l'area della superficie totale A ed il volume V (in funzione di x e y).
b) Tra tutti i parallelepipedi con $A = 1$, qual'è quello di volume massimo? e quello di volume minimo?

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

Recupero del primo compitino:

4. In un sacchetto sono contenute 11 biglie di colore bianco o nero.
   a) Sapendo che il numero della bianche è 4, calcolare la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino di colori diversi.
   b) Sapendo che la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino di colori diversi è 6/11, calcolare quante sono le biglie bianche.

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. a) Sia $f(x) = \dfrac{2 - \log x}{x}$. Calcolare i limiti di f in 0^+ e $+\infty$.
   b) Disegnare il grafico di f e dire quante solo le soluzioni dell'equazione $f(x) = 4$.
   c) Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
   d) Trovare i valori massimi e minimi assunti da f nell'insieme di definizione, e poi nella semiretta $[1, +\infty)$.
2. a) Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'area dell'insieme A_a dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq a - x^2$.
   b) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x, y, z) tali che $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq \dfrac{2}{x} - z^2$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia dato un parallelepipedo (a base quadrata) con lati di lunghezza x, x e y.
   a) Determinarne l'area della superficie totale A ed il volume V (in funzione di x e y).
   b) Tra tutti i parallelepipedi con $A = 1$, qual'è quello di volume massimo? e quello di volume minimo?

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

Recupero del primo compitino:

4. In un sacchetto sono contenute 15 biglie di colore bianco o nero.
   a) Sapendo che il numero della bianche è 4, calcolare la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino di colori diversi.
   b) Sapendo che la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino di colori diversi è 8/15, calcolare quante sono le biglie bianche.

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. a) Sia $f(x) = \dfrac{3 - \log x}{x}$. Calcolare i limiti di f in 0^+ e $+\infty$.
   b) Disegnare il grafico di f e dire quante solo le soluzioni dell'equazione $f(x) = 4$.
   c) Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
   d) Trovare i valori massimi e minimi assunti da f nell'insieme di definizione, e poi nell'intervallo $[1, e]$.
2. a) Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'area dell'insieme A_a dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq a - x^4$.
   b) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x, y, z) tali che $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq \dfrac{2}{x} - z^4$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia dato un parallelepipedo (a base quadrata) con lati di lunghezza x, x e y.
   a) Determinarne l'area della superficie totale A ed il volume V (in funzione di x e y).

b) Tra tutti i parallelepipedi con $A = 2$, qual'è quello di volume massimo? e quello di volume minimo?

Per gli studenti del vecchio ordinamento: uguale al gruppo A.

Recupero del primo compitino:

4. In un sacchetto sono contenute 15 biglie di colore bianco o nero.
   a) Sapendo che il numero della bianche è 4, calcolare la probabilità che, estraendo due biglie a caso, risultino entrambe nere.
   b) Sapendo che la probabilità che, estraendo due biglie a caso, siano entrambe nere è $4/15$, calcolare quante sono le biglie bianche.

PRIMO APPELLO, 7 GENNAIO 2002

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Risolvere la disequazione $(x-2)\log x < 0$.
2. Disegnare il grafico di $y = \log(x+1)$.
3. Calcolare $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.
4. Trovare la primitiva di $2x\,e^x$ [*per parti*].
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{10^x}{x^{1000}}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Tirando due dadi, qual'è la probabilità che la somma sia 3?
8. Per quali valori del parametro reale a i vettori $(1, a, 0)$ e $(a, -3, a^3)$ sono ortogonali?

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3x$.

8'. Scrivere in forma esponenziale (o trigonometrica) il numero complesso $1 - i$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. Risolvere la disequazione $e^x(x^2-1) > 0$.
2. Disegnare il grafico di $y = 2e^{-x}$.
3. Calcolare $\int_2^{+\infty} x^3 + 3x^2 + 2\,dx$.
4. Trovare la primitiva di $2x\,e^{x^2}$ [*per cambio di variabile*].
5. Calcolare $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x)}$ e $\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\log x$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Tirando due dadi, qual'è la probabilità che la somma sia 4?
8. Per quali valori del parametro reale a i vettori $(0, a+1, a)$ e $(4, a-1, 1-a)$ sono ortogonali?

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - x = 0$.

8'. Scrivere in forma esponenziale (o trigonometrica) il numero complesso $-1 + i$.

Prima parte, gruppo C.

1. Risolvere la disequazione $(e^x - 1)x^2 < 0$.
2. Disegnare il grafico di $y = -(x+1)^2$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.
4. Trovare la primitiva di $2x \log x$ [*per parti*].
5. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.
6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Tirando due dadi, qual'è la probabilità che la somma sia 11?
8. Per quali valori del parametro reale a i vettori $(a, 1, 2)$ e $(2, a, -3)$ sono ortogonali?

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + x = 0$.

8'. Scrivere in forma esponenziale (o trigonometrica) il numero complesso $-2i$.

Prima parte, gruppo D.

1. Risolvere la disequazione $(e^x - e)x < 0$.
2. Disegnare il grafico di $y = \sin(x + \pi)$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.
4. Trovare la primitiva di $2x \log(x^2)$ [*per parti*].
5. Calcolare $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \log x$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Tirando due dadi, qual'è la probabilità che la somma sia 12?
8. Per quali valori del parametro reale a i vettori $(1, a, 1)$ e $(a, 1, a)$ sono ortogonali?

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3x = 0$.

8'. Scrivere in forma esponenziale (o trigonometrica) il numero complesso -2.

Primo appello, 7 gennaio 2002

Seconda parte, gruppo A.

Ripartizione degli esercizi. Terzo compitino: esercizi 1, 3. Nuovo ordinamento: esercizi 1, 4, 5. Vecchio ordinamento: esercizi 2, 4, 6.

1. a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il determinante e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 3 & a \\ a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   b) Scrivere in forma matriciale il sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$, e risolverlo.

2. a) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema $\begin{cases} ax + 2z = 3 \\ 3y + az = -1 \\ (a+1)x + 4z = 6 \end{cases}$.

   b) Risolverlo esplicitamente per $a = 1$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di e^x e calcolare la parte principale (per $x \to 0$) di $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2} - 2$. Calcolare quindi $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.

4. a) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x) := x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ e calcolarne il valore minimo.

   b) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = a$.

5. Si estraggono quattro carte da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano:
   a) il 2, il 3, il 4 ed il 5 di picche, in questo ordine.
   b) un 2, un 3, un 4 ed un 5, in questo ordine.
   c) un 2, un 3, un 4 ed un 5, ma non necessariamente in questo ordine.

6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 5e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$.

Seconda parte, gruppo B.

Ripartizione degli esercizi: come per il gruppo A

1. a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il determinante e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & a+1 \end{pmatrix}$.

   b) Scrivere in forma matriciale il sistema $\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, e risolverlo.

2. [*Uguale al gruppo A.*]

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $\log(1+x)$ e calcolare la parte principale (per $x \to 0$) di $f(x) = \log(1+x^3) + \log(1-x^3)$. Calcolare quindi $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.

4. a) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x) := x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ e calcolarne il valore minimo.

   b) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = a$.

5. Si estraggono quattro carte da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che escano:
   a) il 2, il 3, il 4 ed il 5 di picche, in questo ordine.
   b) un 2, un 3, un 4 ed un 5, in questo ordine.

c) un 2, un 3, un 4 ed un 5, ma non necessariamente in questo ordine.

6. [*Uguale al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

Ripartizione degli esercizi: come per il gruppo A

1. a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il determinante e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & a-1 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   b) Scrivere in forma matriciale il sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$, e risolverlo.

2. [*Uguale al gruppo A.*]

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di e^x e calcolare la parte principale (per $x \to 0$) di $f(x) = e^{x^3} + e^{-x^3} - 2$. Calcolare quindi $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.

4. a) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x) := -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 1$ e calcolarne il valore massimo.
   b) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 = a$.

5. Si estraggono tre carte da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano:
   a) il 3, il 4 ed il 5 di picche, in questo ordine.
   b) un 3, un 4 ed un 5, in questo ordine.
   c) un 3, un 4 ed un 5, ma non necessariamente in questo ordine.

6. [*Uguale al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

Ripartizione degli esercizi: come per il gruppo A

1. a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il determinante e l'inversa di $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & a-1 \\ 3 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & a \end{pmatrix}$.

   b) Scrivere in forma matriciale il sistema $\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, e risolverlo.

2. [*Uguale al gruppo A.*]

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $\log(1+x)$ e calcolare la parte principale (per $x \to 0$) di $f(x) = \log(1+x^2) + \log(1-x^2)$. Calcolare quindi $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.

4. a) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x) := -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2$ e calcolarne il valore massimo.
   b) Discutere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $-x^4 - 4x^3 - 4x^2 = a$.

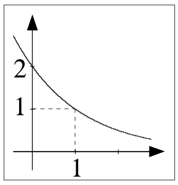
5. Si estraggono tre carte da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che escano:
   a) il 3, il 4 ed il 5 di picche, in questo ordine.
   b) un 3, un 4 ed un 5, in questo ordine.
   c) un 3, un 4 ed un 5, ma non necessariamente in questo ordine.

6. [*Uguale al gruppo A.*]

Secondo appello, 4 febbraio 2002

Prima parte, gruppo A.

1. Quanti numeri di tre cifre è possibile scrivere usando solo cifre dispari?
2. Determinare il campo di esistenza di $\log(1 + x^3)$,
3. La funzione nella figura accanto è del tipo $y = a2^{bx}$. Determinare a e b.
4. Calcolare $\int x \sin x \, dx$ [*per parti*].
5. Calcolare le derivate di xe^{x^2}, $\cos(3 - x)$, $\tan x$.



Per gli studenti del nuovo ordinamento:

6. Trovare la parte principale ed il limite per $x \to +\infty$ di $x^2 - 2\log(x^4)$.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n in zero di $\sin x$.
8. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

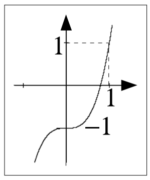
6'. Scrivere l'equazione del piano passante per $(0, 1, 0)$ ed ortogonale al vettore $(3, -1, -2)$.

7'. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 \sin t$.

8'. Trovare le radici cubiche (complesse) di -8.

Prima parte, gruppo B.

1. Quanti numeri di tre cifre è possibile scrivere usando solo cifre dispari tutte diverse tra di loro?
2. Determinare il campo di esistenza di $\log(1 - x^3)$,
3. La funzione nella figura accanto è del tipo $y = ax^3 + b$. Determinare a e b.
4. Calcolare $\int 5(2 + x)^4 \, dx$ [*cambio di variabile*].
5. Calcolare le derivate di $\cos(3 - x)$, $\dfrac{x + 1}{x^2}$, $x \log x$.



Per gli studenti del nuovo ordinamento:

6. Trovare la parte principale ed il limite per $x \to +\infty$ di $\dfrac{2}{x} - \log x$.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n in zero di $\log(1 + x)$.
8. Calcolare $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

6'. Scrivere l'equazione del piano passante per $(0, 1, 0)$ ed ortogonale al vettore $(3, -1, -2)$.

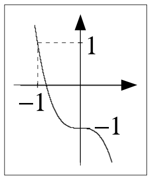
7'. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 \sin t$.

8'. Trovare le radici cubiche (complesse) di -8.

Secondo appello, 4 febbraio 2002

Prima parte, gruppo C.

1. Quanti numeri di quattro cifre è possibile scrivere usando solo cifre dispari tutte diverse tra di loro?
2. Determinare il campo di esistenza di $\log(1 + x^2)$,
3. La funzione nella figura accanto è del tipo $y = ax^3 + b$. Determinare a e b.



4. Calcolare $\int (x-1)^{1/2}\, dx$ [*cambio di variabile*].
5. Calcolare le derivate di $\dfrac{x+1}{x^2}$, xe^{-x}, $\sin(3x)$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

6. Trovare la parte principale ed il limite per $x \to +\infty$ di $e^x - (\log x)^2$.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n in zero di $\cos x$.
8. Calcolare $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

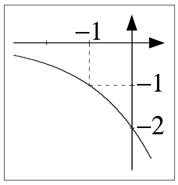
6'. Scrivere l'equazione del piano passante per $(0,1,0)$ ed ortogonale al vettore $(3,-1,-2)$.

7'. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 \sin t$.

8'. Trovare le radici cubiche (complesse) di -8.

Prima parte, gruppo D.

1. Quanti numeri di quattro cifre è possibile scrivere usando solo cifre dispari?
2. Determinare il campo di esistenza di $\log(1 - x^2)$,
3. La funzione nella figura accanto è del tipo $y = a2^{bx}$. Determinare a e b.



4. Calcolare $\int \sin^2 x \, \cos x \, dx$ [*cambio di variabile*].
5. Calcolare le derivate di xe^{-x}, $\log(\log x)$, $\sin x \, cosx$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

6. Trovare la parte principale ed il limite per $x \to +\infty$ di $-x + e^{-x}$.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n in zero di e^x.
8. Calcolare $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

6'. Scrivere l'equazione del piano passante per $(0,1,0)$ ed ortogonale al vettore $(3,-1,-2)$.

7'. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 \sin t$.

8'. Trovare le radici cubiche (complesse) di -8.

SECONDO APPELLO, 4 FEBBRAIO 2002

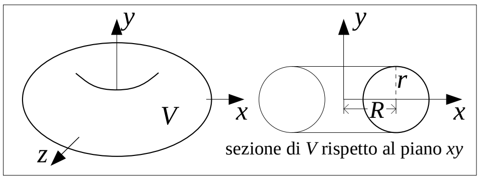
SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. Un sacchetto contiene 100 biglie, di cui n sono bianche e le restanti sono nere.
   a) Calcolare la probabilità che, estraendo 4 volte una biglia, almeno una volta sia bianca.
   b) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso 4 biglie, almeno una sia bianca.

2. a) Disegnare (sommariamente) il grafico della funzione $g(x) = x + x^{-2}$.
   b) Sia $f(x)$ il quadrato della distanza tra l'origine ed il punto sul grafico di g di ascissa x. Calcolare f e trovarne il valore minimo.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Calcolare il volume della "ciambella" V nella figura accanto per $R = 2$ e $r = 1$. [*Se serve, usare le tavole degli integrali.*]



Per gli studenti del vecchio ordinamento:

3'. Si consideri l'equazione differenziale omogenea $\ddot{x}+a\dot{x}+\omega^2 x = 0$, dove a ed ω sono parametri reali positivi.
   a) Dimostrare che tutte le soluzioni di questa equazione tendono a 0 per $t \to +\infty$.
   b) Determinare per quali valori di a e w la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ è decrescente per $t \geq 0$.
   c) Calcolare il limite per $t \to +\infty$ delle soluzioni di $\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Un sacchetto contiene 1000 biglie, di cui n sono bianche e le restanti sono nere.
   a) Calcolare la probabilità che, estraendo 4 volte una biglia, almeno una volta sia bianca.
   b) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso 4 biglie, almeno una sia bianca.

2. a) Disegnare (sommariamente) il grafico della funzione $g(x) = x - x^{-2}$.
   b) Sia $f(x)$ il quadrato della distanza tra l'origine ed il punto sul grafico di g di ascissa x. Calcolare f e trovarne il valore minimo.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia V la "ciambella" nell'esercizio 3 del gruppo A. Calcolarne il volume per $R = 3$ e $r = 1$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

3'. Si consideri l'equazione differenziale omogenea $\ddot{x}+a\dot{x}+\omega^2 x = 0$, dove a ed ω sono parametri reali positivi.
   a) Dimostrare che tutte le soluzioni di questa equazione tendono a 0 per $t \to +\infty$.
   b) Determinare per quali valori di a e w la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ è decrescente per $t \geq 0$.
   c) Calcolare il limite per $t \to +\infty$ delle soluzioni di $\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. Un sacchetto contiene 100 biglie, di cui n sono bianche e le restanti sono nere.
   a) Calcolare la probabilità che, estraendo 5 volte una biglia, almeno una volta sia bianca.
   b) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso 5 biglie, almeno una sia bianca.

2. a) Disegnare (sommariamente) il grafico della funzione $g(x) = x + x^{-4}$.

b) Sia $f(x)$ il quadrato della distanza tra l'origine ed il punto sul grafico di g di ascissa x. Calcolare f e trovarne il valore minimo.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia V la "ciambella" nell'esercizio 3 del gruppo A. Calcolarne il volume per $R = 4$ e $r = 1$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

3'. Si consideri l'equazione differenziale omogenea $\ddot{x}+a\dot{x}+\omega^2 x = 0$, dove a ed ω sono parametri reali positivi.
a) Dimostrare che tutte le soluzioni di questa equazione tendono a 0 per $t \to +\infty$.
b) Determinare per quali valori di a e w la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ è decrescente per $t \geq 0$.
c) Calcolare il limite per $t \to +\infty$ delle soluzioni di $\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. Un sacchetto contiene 1000 biglie, di cui n sono bianche e le restanti sono nere.
a) Calcolare la probabilità che, estraendo 5 volte una biglia, almeno una volta sia bianca.
b) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso 5 biglie, almeno una sia bianca.

2. a) Disegnare (sommariamente) il grafico della funzione $g(x) = x - x^{-4}$.
b) Sia $f(x)$ il quadrato della distanza tra l'origine ed il punto sul grafico di g di ascissa x. Calcolare f e trovarne il valore minimo.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

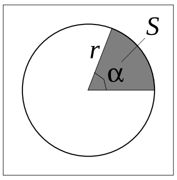
3. Sia V la "ciambella" nell'esercizio 3 del gruppo A. Calcolarne il volume per $R = 1$ e $r = 1$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

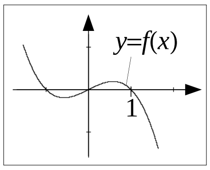
3'. Si consideri l'equazione differenziale omogenea $\ddot{x}+a\dot{x}+\omega^2 x = 0$, dove a ed ω sono parametri reali positivi.
a) Dimostrare che tutte le soluzioni di questa equazione tendono a 0 per $t \to +\infty$.
b) Determinare per quali valori di a e w la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ è decrescente per $t \geq 0$.
c) Calcolare il limite per $t \to +\infty$ delle soluzioni di $\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 1$.

Terzo appello, 3 giugno 2002

Prima parte.

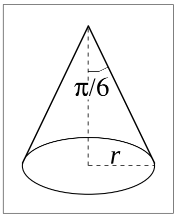


1. Calcolare l'integrale indefinito $\int 3\sqrt{x} + e^{x/2}dx$.
2. Calcolare l'area del settore circolare S in figura (in funzione di r e α).
3. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x$.
4. Quante sigle di due caratteri è possibile scrivere usando le 21 lettere dell'alfabeto e le cifre da 1 a 9 (incluse)?



5. Risolvere la disequazione $f(x) \leq x - 1$, con f data in figura.
6. Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:



7. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine 5 di e^{-x}.
8. Calcolare l'altezza ed il volume del cono in figura (in funzione di r)

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

7'. Risolvere il problema di Cauchy $2\dot{x} = e^t/x$, $x(0) = 2$.

8'. Calcolare $(2 + i)(1 - i)$.

Seconda parte.

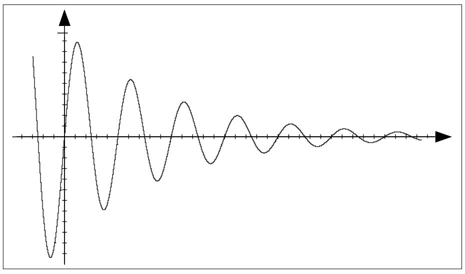
1. a) Dato un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza x e y, calcolare y in funzione di x sapendo che il perimetro del triangolo è 4. Quali sono i valori di x ammissibili?
   b) Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 4, qual'è quello di area massima?
2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e risolvere il sistema $\begin{cases} 5x + y + 2z = 0 \\ 2x - 5z = 3 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Sia S l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$, $|y|e^x \leq 1$. Disegnare sommariamente S e calcolarne l'area.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

3'. Dare un esempio di equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti che ammetta soluzioni simili alla funzione in figura. Motivare la risposta.



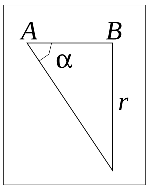
QUARTO APPELLO, 8 LUGLIO 2002

PRIMA PARTE.

1. Quanti sono i numeri di quattro cifre, tutte distinte, che non contengono lo zero, il tre ed il sette?
2. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = e^{-x} - 1$.
3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 + \cos x$, e $\lim_{x\to 0} e^{-x^{-2}}$.
4. Determinare il campo di esistenza di $\sqrt{1 + \log x}$.
5. Calcolare la primitiva di $f(x) = 8\sin(4x) + \dfrac{2}{x^2}$.
6. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

7. Calcolare il prodotto scalare $(1, a, 3 + a) \cdot (2, a, 0)$. Per quali valori di a esso risulta nullo?
8. Scrivere la lunghezza del segmento AB in figura in funzione della lunghezza r e dell'angolo α.



Per gli studenti del vecchio ordinamento:

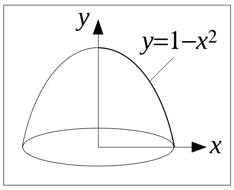
7. Risolvere l'equazione $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ con dato iniziale $x(1) = 1$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dimostrare che $e^x \geq 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Per quali valori del parametro a si ha $e^x \geq ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

2. a) Trovare un vettore $v = (x, y, z)$ che sia perpendicolare a $w = (1, -1, 0)$.
   b) Determinare tutti i vettori v di lunghezza 1 che sono perpendicolari a w.
   c) Disegnare l'insieme di questi vettori nello spazio xyz.
3. Calcolare il volume del solido di rotazione disegnato in figura.



Per gli studenti del vecchio ordinamento:

2'. Risolvere il problema ai dati inizioli $\begin{cases} \ddot{x} + x = e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$.

3'. Determinare al variare del parametro reale a il numero delle soluzioni di $\begin{cases} x + az = 1 \\ ax - y + 3az = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$.

Quinto appello, 11 settembre 2002

Prima parte.

1. Disegnare l'insieme dei punti nel piano tali che $y \leq x^2 - 1$.
2. Determinare il campo di esistenza di $\log(2 - e^x)$.
3. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} x^2 \log x$, e $\lim_{x \to 0} \sin(x + x^4 - \sin(x))$.
4. Calcolare la derivata di $e^{2x} e^{-x}$ e $\sin(3x + x^2)$.
5. Per quali valori del parametro a i vettori $(a, -a, 2)$ e $(a, 3, 1)$ sono ortogonali?
6. Tirando tre dadi, qual'è la probabilità che escano tre numeri uguali?
7. Disegnare il grafico di $f(x) = (x-1)^2$ ed indicare le soluzioni della disequazione $f(x) \geq x$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

8. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

8'. Risolvere l'equazione $\dot{x} = 2e^{-x} t$ con dato iniziale $x(0) = 0$.

Seconda parte.

1. Determinare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 3 di $e^{x^3 - 2x^2}$ e calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3 - 2x^2} - \cos(2x)}{x^3} \ .$$
2. Disegnare il grafico della funzione $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2$, e determinarne i punti di minimo e massimo, assoluti e relativi.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Disegnare approssimativamente l'insieme dei punti del piano tali che $x^2 - 1 \leq y \leq 2(1 - x^2)$ e calcolarne l'area.

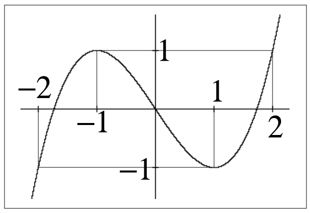
Per gli studenti del vecchio ordinamento:

3. Dire per quali valori del parametro reale $a > 0$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x'' - 2x' - ax = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -2 \end{cases}$$
converge a 0 all'infinito.

Sesto appello, 23 settembre 2002

Prima parte.

1. Disegnare l'insieme dei punti nel piano tali che $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.
2. Risolvere $\log(2 - e^x) > 0$.
3. Sia f la funzione data nel disegno accanto. Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > 1$.



4. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x - x^3 \, dx$.
5. Calcolare la derivata di $f(x) := \arctan x + \arctan(1/x)$.
6. Quanti sono i numeri di quattro cifre che contengono solo le cifre 1, 2, 5, 7 e sono pari?
7. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

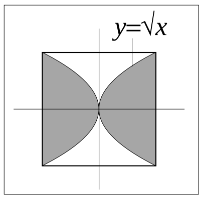
8. Per quali valori del parametro a i vettori $(2, -a, a+1)$ e $(a, 3, 1)$ sono ortogonali?

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

8'. Risolvere l'equazione $z^4 = -16$ (con z complesso).

Seconda parte.

1. Scegliendo un punto a caso nel quadrato di lato 2 e centro l'origine dato in figura, qual'è la probabilità che questo appartenga all'area in grigio?



2. Per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione $f(x) := ax^2 + 1 - \cos x$ risulta convessa su tutto $\mathbb{R}$? e per quali risulta invece positiva?

Per gli studenti del nuovo ordinamento:

3. Risolvere il sistema $\begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ 2x + 5z = 3 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$, calcolando l'inversa della matrice associata.

Per gli studenti del vecchio ordinamento:

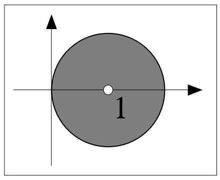
3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $x' - 2x = e^t + 2e^{2t}$.

Soluzioni 1998/99

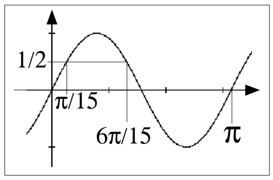
Test di verifica, 15 gennaio 1999

Prima parte.

1. $x \in [-2, -1) \cup [2, +\infty)$.
2. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ovvero, semplificando, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$.
3. Le rette per $(0,1)$ sono date dall'equazione $y - 1 = m(x - 0)$ ed il coefficiente angolare m deve essere $-1/2$, per cui $y = -x/2 + 1$, ovvero $2y + x - 2 = 0$.
4. La disequazione si riscrive come $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, e descrive il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1, interno compreso (figura accanto).



5. Si tratta delle radici quarte di -1, cioè $z = \dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$.
6. $A = \{0\}$, cioè l'insieme il cui unico elemento è zero.
7. $x \in [\pi/12, 5\pi/12]$. Infatti è sufficiente disegnare il grafico della funzione $\sin(2x)$, che non è altro che il grafico di $\sin x$ "compresso" orizzontalmente di un fattore 2 (figura accanto).



8. È vera solo la terza.

Seconda parte.

1. L'identità (P_0) è $b - 1 = b - 1$, che è chiaramente vera. Supponendo vera l'identità (P_n) per un certo n, vogliamo dedurne la (P_{n+1}), cioè
$$b^{n+2} - 1 = (b-1)\Big(\sum_{k=0}^{n+1} b^k\Big) \,. \qquad (P_{n+1})$$
Per ottenere ciò basta sommare ad entrambe i membri di (P_n) il termine $(b-1)b^{n+1}$ e semplificare.
2. Per $x \geq 0$ la disequazione diviene $x > a(1+x)$, mentre per $x < 0$ diviene $x > a(1-x)$. Ora si discutono questi due sistemi di disequazioni separatamente.
3. Fissate tre cifre distinte, c'è un solo modo di ordinarle in modo decrescente, e quindi il problema diventa contare in quanti modi diversi si possono scegliere tra cifre distinte tra le 10 a disposizione. La risposta è dunque $C_{10,3} = \binom{10}{3}$. Per il caso generale la risposta è invece $C_{10,n} = \binom{10}{n}$.
4. Si comincia con la sostituzione $y = 1/(1+x^2)$ (per cui, se x varia in $\mathbb{R}$, allora y varia tra 0 ed 1) e si risolve la disequazione $\sin y \geq 1/2$ con $0 \leq y \leq 1$. Si ottiene $y \geq \pi/6$, che diventa $|x| \leq \sqrt{6/\pi - 1}$.
5. a) Se non teniamo conto dell'ordine in cui le carte vengono servite, ovviamente si ha una sola mano favorevole (quattro assi, appunto) su un numero totale di mani possibili uguale a $C_{40,4} = \binom{40}{4}$, e quindi la probabilità è
$$P = 1 \Big/ \binom{40}{4} = \frac{4! \cdot 36!}{40!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} \simeq 1{,}1 \cdot 10^{-5} \,.$$
b) Più complicato: si tratta di contare le mani favorevoli, cioè tutti i differenti modi di avere due re e due assi (sempre senza tenere conto dell'ordine). Si noti che ci sono 6 modi diversi di estrarre due assi (indicando i segni con C, F, P e Q, le possibili combinazioni sono CF,

CP, CQ, FP, FQ, PQ), e lo stesso vale per i due re. Quindi le mani favorevoli sono $6 \cdot 6 = 36$, e

$$P = \frac{36}{\binom{40}{4}} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \; .$$

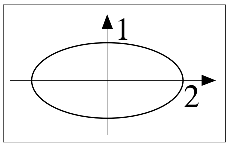
6. $a_n = \dfrac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \dfrac{1}{+\infty+\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

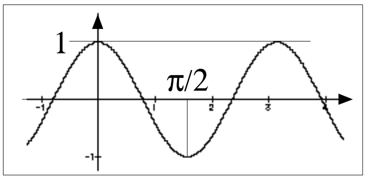
7. In forma esponenziale l'equazione diventa $\rho^3\, e^{3i\theta} = \rho\, e^{-i\theta}$ che da luogo al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 0, 1 \\ \\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad z = 0, \pm 1, \pm i \; .$$

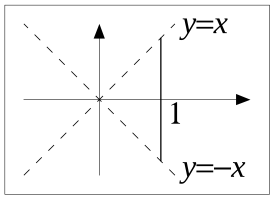
Primo compitino, 22 gennaio 1999

Prima parte, gruppo A.

1. $x \in (-4,-3) \cup (2,+\infty)$.
2. $1000! > 10^{1000} > 1000^{100}$. La prima disuguaglianza segue dal fatto che $1000!$ è il prodotto di mille fattori che vanno da 1 a 1000, mentre 10^{1000} è il prodotto di mille fattori tutti uguali a 10; la seconda disuguaglianza si ottiene scrivendo 1000^{100} come potenza di 10.
3. $(-1,0]$.
4. 

5. 

6. Le rette passanti per l'origine hanno equazione $y = mx$ con m qualunque. La seconda condizione implica che per $x = 1$ si deve avere $y \in [-1,1]$, e quindi $-1 \le m \le 1$ (figura accanto).



7. $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$. Una possibile formula è $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
8. $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ e quindi $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 = e^{3i\pi/2} = -i$.

Prima parte, gruppo B.

1. $x \in (-3,-2) \cup (1/2,+\infty)$.
2. $1000! > 2^{400} > 10^{100}$. La prima disuguaglianza segue dal fatto che $1000!$ è il prodotto di mille fattori che vanno da 1 a 1000, mentre 2^{400} è il prodotto di quattrocento fattori tutti uguali a 2; la seconda disuguaglianza si ottiene scrivendo $2^{400} = 16^{100}$.
3. Si tratta dell'insieme vuoto!
6. $y = mx$ con il coefficiente angolare m in $[0,2]$.
8. $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}$ e quindi $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 = e^{-3i\pi/2} = i$.

[*Le risposte 4, 5, 7 sono state omesse.*]

Prima parte, gruppo C.

1. $x \in (-2,-1) \cup (1/3,+\infty)$.
2. $100^{100} > 100! > 1000^{10}$.
3. $(0,+\infty)$.
6. $y = mx$ con $-1 \le m \le 1$.
8. $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} = e^{3i\pi/4}$ e quindi $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = e^{9i\pi/4} = \dfrac{1+i}{2}$.

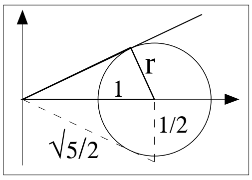
[*Le risposte 4, 5, 7 sono state omesse.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Si ha $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot n \geq 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 6^{n-5}$. In alternativa si può procedere per induzione: dobbiamo far vedere che se è vera la $n! \geq 6^{n-5}$, allora è vera anche la $(n+1)! \geq 6^{n-4}$. Moltiplicando entrambe i membri della prima disuguaglianza per $(n+1)$ otteniamo $(n+1)! \geq (n+1) \cdot 6^{n-5}$ che è maggiore o uguale a 6^{n-4} fintantoché $n \geq 5$. A questo punto basta verificare a mano i casi $n = 1, \ldots, 5$, che sono ovvi!

   La parte b) dell'esercizio si risolve allo stesso modo.

2. Nella figura accanto, il triangolo tratteggiato e quello continuo sono simili, e quindi $r : 1 = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2}$. Dunque $r = 1/\sqrt{5}$, e pertanto l'equazione della circonferenza è $(x-1)^2 + y^2 = 1/5$.



3. $a_n = \dfrac{n(1+1/n^2)}{n^2(1+3/n^2)} = \dfrac{1+1/n^2}{n(1+3/n^2)} \to \dfrac{1}{+\infty \cdot 1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

4. a) 7^5. b) $D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ (l'ordine delle cifre conta!)

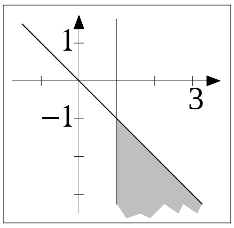
   c) Il numero dei casi favorevoli è dato dal numero dei modi di scegliere le ultime due cifre (quelle diverse da 1), cioè 6^2, quindi

$$P = \frac{6^2}{7^5} \simeq 0,2\% \ .$$

   d) Il numero dei casi favorevoli è dato dal numero dei modi di scegliere le due cifre diverse da 1, cioè 6^2, moltiplicato per il numero di modi di scegliere le posizioni di queste due cifre (su cinque posizioni a disposizione) e cioè $C_{5,2} = \binom{5}{2}$. Quindi

$$P = \frac{6^2 \cdot \binom{5}{2}}{7^5} = \frac{360}{16807} \simeq 2\% \ .$$

5. Siccome $|z-w|$ indica la distanza tra z e w (intesi come punti del piano), i punti z per cui $|z-3| \leq |z+1|$ sono quelli più vicini a $(3,0)$ che a $(-1,0)$, cioè quelli nel semipiano a sinistra della retta $x = 1$, mentre i punti z per cui $|z+1| \leq |z-i|$ sono quelli più vicini a $(-1,0)$ che a $(0,1)$, cioè quelli nel semipiano al di sotto della retta $y = -x$. I punti che soddisfano entrambe le disequazioni sono quelli nell'intersezione dei due semipiani (l'area in grigio nella figura).



SECONDA PARTE, GRUPPO B.

2. Si procede come per il gruppo A, e si ottiene $(x-1)^2 + y^2 = 1/5$.

3. $a_n = \dfrac{n(2+1/n^3)}{n(1+1/n)} = \dfrac{2+1/n^3}{1+1/n} \to \dfrac{2}{1} = 2.$

4. Si procede come per A: a) 8^5; b) $D_{8,5} = \dfrac{8!}{3!}$; c) $P = \dfrac{7^2}{8^5} \simeq 0,15\%$; d) $P = \dfrac{7^2 \cdot \binom{5}{2}}{8^5} \simeq 1,5\%$.

[*Le risposte 1 e 5 sono state omesse.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

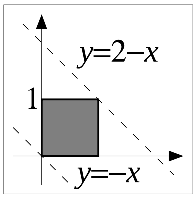
2. Si procede come per il gruppo A, e si ottiene $(x-1)^2 + y^2 = 4/5$.
3. $a_n = \dfrac{n^2(1+n^{-3/2})}{n(1+3/n)} = \dfrac{n(1+n^{-3/2})}{1+3/n} \to \dfrac{+\infty \cdot 1}{1} = +\infty$.
4. Si procede come per A: a) 6^5; b) $D_{6,5} = 6!$; c) $P = \dfrac{5^2}{6^5} \simeq 0,3\%$; d) $P = \dfrac{5^2 \cdot \binom{5}{2}}{6^5} \simeq 3\%$.

[*Le risposte 1 e 5 sono state omesse.*]

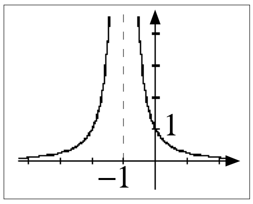
Primo compitino (bis), 23 gennaio 1999

Prima parte.

1. $x \in (1, 3)$.
2. $\frac{1}{4}(x-2)^2 + y^2 = 1$ ovvero $x^2/4 + y^2 - x = 0$.
3. $z = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$.
4. $\sin(3x) = \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$.
5. Le rette parallele a quella data hanno equazione $y = -x + q$ con q reale, e dovendo intersecare il quadrato in questione, come si vede nella figura qui accanto si ha $0 \le q \le 2$.

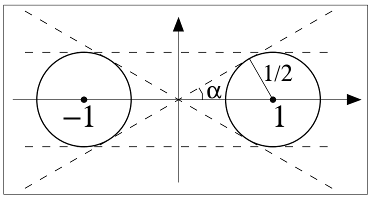


6. Si tratta dell'insieme vuoto!
7. Si tratta della traslazione a sinistra di 1 della funzione $1/x^2$ (figura accanto).

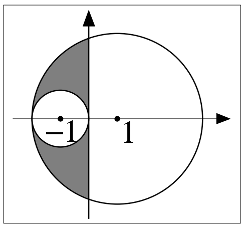


Seconda parte.

1. Ci limitiamo al caso generale. Lo sviluppo della potenza del binomio dà
$$(1+k)^n = 1 + \binom{n}{1}k + \binom{n}{2}k^2 + \binom{n}{3}k^3 + \cdots \ge 1 + nk + \frac{n(n-1)}{2}k^2$$
e si vede che quest'ultima espressione è maggiore o uguale a $1 + nk + n^2k^2/4$ per $n \ge 2$.
2. A parte le due ovvie rette orizzontali, dal disegno qui accanto si vede che (a meno del segno) il coefficiente angolare m delle altre due, cioè la tangente dell'angolo α, è $m = 1/\sqrt{3}$, e quindi le due rette sono $y = \pm x/\sqrt{3}$.



3. $a_n = \dfrac{1 + 2/n}{4 + 3/n} \to \dfrac{1}{4}$.
4. $|z+1|$ e $|z-1|$ indicano rispettivamente la distanza del punto z da $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Quindi la disuguaglianza $1 \le |z+1|$ è soddisfatta dai punti z esterni alla circonferenza di centro $(-1, 0)$ e raggio 1, $|z-1| \le 3$ è soddisfatta dai punti z interni alla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 3, mentre $|z+1| \le |z-1|$ è soddisfatta dai punti nel semipiano a sinistra dell'asse $x = 0$. L'intersezione di questi tre insiemi da la risposta (in grigio nella figura qui accanto).

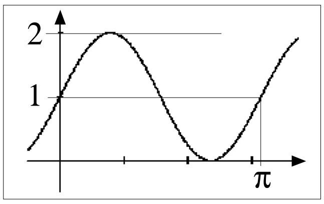


5. a) $P = \dfrac{80}{100} \cdot \dfrac{30}{100} = 24\%$. b) I due eventi NON sono indipendenti! c) $P \ge 10\%$.

Secondo compitino, 16 aprile 1999

Prima parte, gruppo A.

1. $1+x^2$ e $1-2x^2$ rispettivamente.
2. $f'(x) = 2(x+1)e^{x^2+2x}$, $f''(x) = (4(x+1)^2+2)e^{x^2+2x}$. Quindi $f'(x) \geq 0$ per $x \geq -1$, e pertanto -1 è un punto di minimo assoluto.
3. $+\infty$ e 0 rispettivamente.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. I vettori normali $(a,1,2)$ e $(1,a-2,2)$ devono essere ortogonali, cioè $0 = (a,1,2)\cdot(1,a-2,2)$, cosa che si verifica per $a=-1$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 5$, la soluzione è unica.
7. $x \geq -1$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ "compresso" orizzontalmente di un fattore 2 e traslato in alto di 1 (figura accanto).



Prima parte, gruppo B.

1. x^2 e $1+2x+2x^2$ rispettivamente.
2. $f'(x) = 2(1-x)e^{-x^2+2x}$, $f''(x) = (4(1-x)^2-2)e^{-x^2+2x}$, f' si annulla solo in 1, che è un punto di massimo assoluto.
3. $+\infty$ e 0 rispettivamente.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
5. $a=1$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$, le soluzioni sono infinite.
7. $x \geq -1$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato in basso di 1 e a destra di π.

Prima parte, gruppo C.

1. $x+x^2$ e x^2 rispettivamente.
2. $f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$, $f''(x) = (4(x-1)^2+2)e^{x^2-2x}$, f' si annulla solo in 1, che è un punto di minimo assoluto.
3. 0 entrambi.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

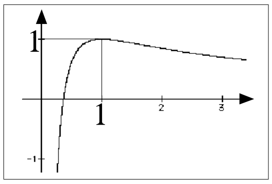
5. $a = -2$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -5$, la soluzioni è unica.

7. $-2 < x < 1$.

8. Si tratta del grafico di $\cos x$ traslato in alto di 1 e a destra di π.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.



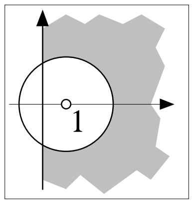
1. La funzione è definita per $x > 0$ ed ha derivata $f'(x) = \frac{-\log x}{x^2}$ positiva per $x < 1$. Quindi f cresce per $x < 1$ e poi decresce; 1 è dunque il punto di massimo assoluto, ed il valore massimo assunto da f è $f(1) = 1$. Questa significa che la disuguaglianza $(*)$ è vera per ogni $x > 0$ se e solo se si prende $a \geq 1$.

2. Usando gli sviluppi di Taylor $\sin t = t + O(t^3) = t - t^3/6 + O(t^5)$ si ha
$$f(x) = x^n + O(x^{3n}) - (x - x^3/6 + O(x^5))^n \ .$$
Sviluppando l'ultima potenza ci si accorge che, a parte x^n e $nx^{n-1}(-x^3/6)$, tutti gli altri termini sono di ordine $n+4$ o più, per cui
$$f(x) = x^n + O(x^{3n}) - \Big(x^n - \frac{n}{6}x^{n+2} + O(x^{n+4})\Big) = \frac{n}{6}x^{n+2} + O(x^{n+4}).$$

3. Per $a \neq 8$ il determinante della matrice incompleta è non nullo, quindi per il teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione
$$\begin{cases} x = \frac{3+b}{8-a} \\ y = b+1 \\ z = \frac{12b+7a+12}{16-2a} \end{cases} .$$
Per $a = 8$ e $b \neq -3$, i ranghi della matrice completa e di quella incompleta sono diversi, e quindi il sistema non ammette soluzioni (teorema di Rouché-Capelli). Infine, per $a = 8$ e $b = -3$ la matrice incompleta e quella completa hanno rango due, per qui il sistema ammette ∞^1 soluzioni, e più precisamente
$$\begin{cases} x \text{ qualunque} \\ y = -\frac{2}{5} \\ z = \frac{3-20x}{10} \end{cases} .$$

4. La formula per la rappresentazione parametrica dà
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ z(t) = 1 - t \ , \end{cases}$$
da cui si deducono le equazioni $x = 0$ e $z = 1 - y$. Dunque la retta giace sul piano yz, e dall'equazione $z = 1 - y$ si deduce che l'angolo formato con l'asse y è $\pi/4$.

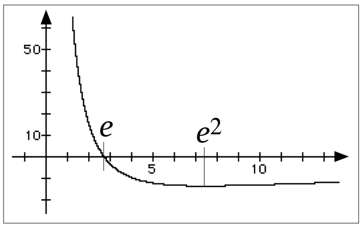
5. Siccome $|z-w|$ indica la distanza tra z e w, la prima disequazione è soddisfatta da tutti i punti che distano più di 2 da $(1,0)$, ovvero quelli all'esterno del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 2. Viceversa, la seconda disequazione è soddisfatta dai punti più vicini a $(1,0)$ che a $(-1,0)$, cioè quelli a destra dell'asse delle y. Le soluzioni sono date dall'intersezione di questi due insiemi (in grigio nella figura qui accanto).



6. a) 10^7; b) $D_{10,7} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4$.

Seconda parte, gruppo B.

1. Procedendo come per il gruppo A si dimostra che f ha minimo assoluto in e^2, dove assume valore $-1/e^2$ (vedi figura), e quindi la disuguaglianza risulta valida per ogni $x>0$ se e solo se $a < -1/e^2$.



2. Usando gli sviluppi $\log(1+t) = t + O(t^2) = t - t^2/2 + O(t^3)$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + O(x^{2n}) - \big(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\big)^n \\ &= x^n + O(x^{2n}) - \big(x^n - \frac{n}{2}x^{n+1} + O(x^{n+2})\big) = \frac{n}{2}x^{n+1} + O(x^{n+2}). \end{aligned}$$

3. Per $a \neq 2$ la soluzione è unica

$$\begin{cases} x = \frac{4(2-b)}{3(a-2)} \\ y = \frac{b+4}{3} \\ z = \frac{2a(2-b)}{3(a-2)} \end{cases}.$$

Per $a=2$ e $b \neq 2$ non c'è nessuna soluzione. Per $a=2$ e $b=2$ ci sono ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} x \text{ qualunque} \\ y = 2 \\ z = -x . \end{cases}$$

4. Procedendo come per il gruppo A, si ottiene la parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 1-y \end{cases}$$

L'angolo è $\pi/4$.

6. a) 10^8; b) $C_{10,8} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3$.

PRIMO APPELLO, 4 GIUGNO 1999

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. $x \le -1$ oppure $x \ge 1$.
2. Si tratta delle quattro radici quarte di -4, cioè $z = \pm 1 \pm i$.
3. Si tratta dell'interno della circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 2.
4. $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $\sin x - x = -x^3/6 + O(x^5)$.
6. $[(x, y, z) - (1, 0, 1)] \cdot (1, -1, 2) = 0$, ovvero $x - y + 2z = 3$.
7. $\frac{1}{2} \arctan(2x) + c$ (tramite il cambio di variabile $2x = t$).
8. $x = ae^{-t} + be^t$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

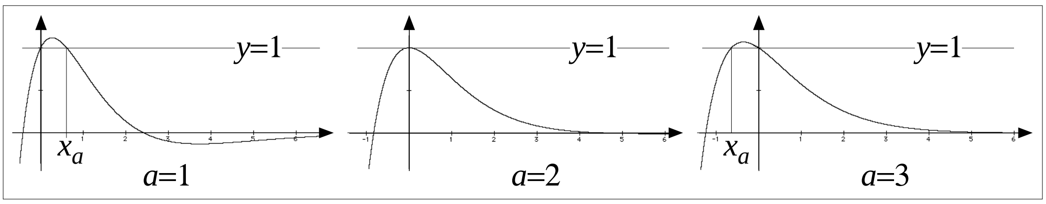
1. $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.
2. Si tratta delle quattro radice quarte di 16, cioè $z = \pm 2, \pm 2i$.
3. Si tratta dell'insieme dei punti del piano che giacciono sotto la parabola $y = x^2 - 1$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
5. $1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + O(x^4)$.
6. $3x + y - z = 2$.
7. $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$ (tramite il cambio di variabile $x^2 = t$).
8. $x = a \cos(2t) + b \sin(2t)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) L'equazione $(*)$ si riscrive come $f(x) = 1$. La funzione f è definita su $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = 0^-$. Inoltre f si annulla in $a \pm \sqrt{2}|a|$ (ma in due delle nelle figure sotto quasi non si vede!). La derivata

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{a^2} (x^2 - 2(a + 1)x + 2a - a^2)$$

si annulla in $y_a = a + 1 - \sqrt{2a^2 + 1}$ e $z_a = a + 1 + \sqrt{2a^2 + 1}$. Studiando il segno di f' si ottiene che f cresce per $x < y_a$ e per $x > z_a$, decresce per $y_a < x < z_a$. Quindi y_a è un punto di massimo assoluto (con valore positivo) mentre z_a è un punto di minimo locale (con valore negativo). Essendo $f(0) = 1$, l'equazione $f(x) = 1$ ammette un altra soluzione x_a che risulta positiva per $\bar{x}_a > 0$ (cioè per $0 < a < 2$), negativa per $\bar{x}_a < 0$ (cioè per $a < 0$ e $a > 2$), e coincide con 0 per $\bar{x}_a = 0$ (cioè per $a = 2$).



b) Parte difficile. Si osservi che x_a è sempre compresa tra 0 ed una delle due soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, cioè $a \pm \sqrt{2}|a|$, e quindi tende a 0 per $a \to 0$. Per ottenere una stima più precisa ragioniamo così: siccome x_a è infinitesima, sostituiamo e^{-x} in $(*)$ con il suo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in 0, e cioè $1 + x + \frac{x^2}{2}$, ed otteniamo

$$x + \frac{x^2}{2} = \frac{x(2a - x)}{a^2}$$

che ha come soluzioni 0 e $\dfrac{a(2-a)}{2+a^2} \simeq 2a$. Quindi $x_a \simeq 2a$.

2. Equazione a variabili separabili:

$$\frac{x'}{1+x^2} = 2t \text{ ovvero } \arctan x = t^2 + c \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Per far sì che $x = 0$ quando $t = 0$ si deve imporre $c = 0$, per cui $x = \tan(t^2)$.

3. L'unico caso in cui ci sono soluzioni periodiche (oltre alla soluzione identicamente nulla) si ha quando le soluzioni dell'equazione caratteristica sono puramente immaginarie, cioè quando il polinomio caratteristico è del tipo $\lambda^2 + c$ con $c > 0$. Nel caso specifico questo equivale ad imporre le condizioni $a(a^2 - 1) = 0$ e $1 - a > 0$, che sono verificate solo per $a = 0$ ed $a = -1$.

4. Per $k = -1, 1/2$ i ranghi della matrice incompleta e di quella completa sono uguali a 3, quindi il sistema ammette una sola soluzione, e cioè

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -1 \end{cases} \text{per } k = -1 \text{ e } \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -4/3 \\ z = 2/3 \end{cases} \text{per } k = 1/2.$$

Per $k \neq -1, 1/2$, il rango della matrice completa è diverso da quello della matrice incompleta e quindi non esistono soluzioni.

5. Si ponga $t = 1/x$. Siccome $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ per $t \to 0$, allora $f(x) = 1/(6x) + O(1/x^3)$ per $x \to \infty$. Quindi $\int_1^\infty f(x)\,dx = +\infty$ perché f è un infinitesimo di ordine 1 all'infinito.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. [*Uguale al gruppo A.*]
2. Si procede come per il gruppo A e si ottiene $x = \log(t^2 + 1)$.
3. Si procede come per il gruppo A, e si ottiene $a = 4$.
4. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1/2 \\ z = -1/2 \end{cases}$ per $k = -1$, $\begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$ per $k = 1/2$. Per $k \neq -1, 1/2$ non ci sono soluzioni.
5. $f(x) \simeq \dfrac{1}{2x}$ per $x \to +\infty$, per cui l'integrale improprio risulta uguale a $+\infty$.

SECONDO APPELLO, 2 LUGLIO 1999

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. Deve essere $x^2 - 3 \geq 1$, e cioè $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$.
2. 1/6 (6 casi favorevoli su 36 casi possibili).
3. 1 e 0 rispettivamente.
4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
5. Se (x, y) è un punto della retta, allora i vettori $(x, y) - (1, 0)$ e $(2, 1)$ devono essere perpendicolari, vale a dire $(x - 1, y - 0) \cdot (2, 1) = 0$ ovvero $2x + y = 2$.
6. $\frac{1}{2} e^{x^2}$ (tramite il cambio di variabile $x^2 = t$.
7. [*Omessa*.]

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

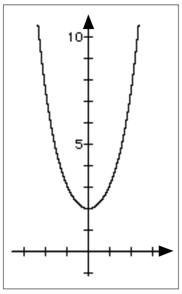
1. Deve essere $5 - x^2 \geq 1$, e cioè $-2 \leq x \leq 2$.
2. 1/6.
3. 0 entrambi.
4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
5. $x = 2$.
6. $\frac{1}{2} \sin(x^2)$ (tramite il cambio di variabile $x^2 = t$).
7. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e traslato in alto di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. Se $h \neq 3, 4$ il determinante della matrice incompleta è non nullo, per cui il sistema ammette un'unica soluzione
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3-h} \\ z = \frac{4-h}{3-h} \ . \end{cases}$$
Per $h = 3$ la matrice completa ed incompleta hanno ranghi diversi, per cui non ci sono soluzioni. Per $h = 4$ la matrice completa ed incompleta hanno rango due entrambe, per cui ci sono ∞^1 soluzioni:
$$\begin{cases} x \text{ qualunque} \\ y = 3x - 1 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

2. Possiamo supporre che la suddivisione casuale avvenga attraverso il seguente procedimento: vengono tirati a sorte 30 biglietti con su scritto un numero compreso tra 1 e 30, gli studenti che estraggono i numeri 1, 2 e 3 formano il primo gruppo, quelli che estraggono i numeri 4,5 e 6 il secondo e così via. A questo punto le possibili estrazioni per Andrea e Barbara sono $30 \cdot 29$, mentre quelle che li assegnano allo stesso gruppo sono $30 \cdot 2$ (qualunque numero estragga Andrea, ne rimangono esattamente 2 per Barbara). La probabilità è dunque $P = 2/29 \simeq 7\%$.

3. Le soluzioni di $x'' - x = 0$ sono della forma $x(t) = ae^t + be^{-t}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi $x'(t) = ae^t - be^{-t}$. Calcolando i limiti prescritti nel testo otteniamo $a = 1$ e $-b = -1$, ovvero $x(t) = e^t + e^{-t}$. Il grafico di questa funzione è dato nella figura qui accanto.



4. Sia $a \geq 1$. In tal caso la funzione integranda è ben definita, continua e positiva su $[0, +\infty)$. Allora la finitezza di $(*)$ dipende esclusivamente dal comportamento dell'integranda all'infinito, e poiché questa risulta asintoticamente equivalente a $x^2 \cdot x^{a-1}/x^4 = x^{a-3}$, $(*)$ è finito se e solo se $a - 3 < -1$, cioè per $a < 2$.
   Quando $0 < a < 1$, invece, l'integranda risulta positiva finita e continua solo in $(0, +\infty)$, ed in 0 ha un asintoto verticale. Allora la finitezza di $(*)$ dipende sia dal comportamento dell'integranda all'infinito (e già sappiamo che deve essere $a < 2$) che da quello in 0, ma qui l'integranda risulta asintoticamente equivalente a x^{a-1}, per cui deve essere $a - 1 > -1$, e cioè per $a > 0$, che è sempre verificata! Concludiamo che $(*)$ è finito se e solo se $a < 2$.

Seconda parte, gruppo B.

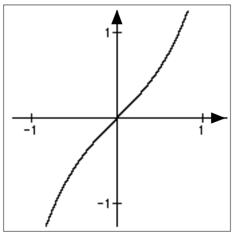
1. Per $h \neq -2, -3$ la soluzione è unica:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2+h} \\ z = \frac{3+h}{2+h} \ . \end{cases}$$

   Per $h = -2$ non ci sono soluzioni. Per $h = -3$ ci sono ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x \text{ qualunque} \\ z = 0 \\ y = 3x - 1 \ . \end{cases}$$

2. Procedendo come per A si ottiene $P = \dfrac{3 \cdot 2}{27 \cdot 26} = \dfrac{1}{9 \cdot 13} \simeq 0,8\%$.
3. Le soluzioni di $x'' - 4x = 0$ sono della forma $x(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi $x'(t) = 2ae^{2t} - 2be^{-2t}$. Calcolando i limiti dati sopra otteniamo $2a = -2b = 1/2$, ovvero $x(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})$. Il grafico di questa funzione è dato nella figura qui accanto.



4. Procedendo come per il gruppo A, si ottiene che l'integranda è asintoticamente equivalente a x^{a-3} all'infinito ed a x^{a-2} in 0, per cui $(*)$ è finito se e solo se $a - 3 < -1$ e $a - 2 > -1$, e cioè per $1 < a < 2$.

TERZO APPELLO, 3 SETTEMBRE 1999

PRIMA PARTE.

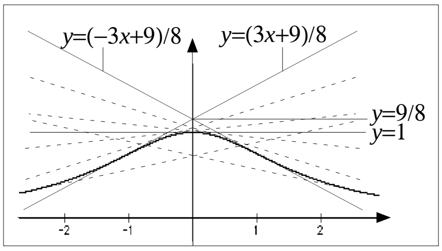
1. L'espressione è ben definita per $x > 1$, ed in tal caso $\arctan x > \pi/4$. Dunque il segno dell'espressione coincide con quello di $\log(x-1)$, ed è dunquer positivo per $x > 2$.
2. 0 e 1 rispettivamente.
3. Scrivendo $z = x + iy$ l'equazione si riduce a $xy = 1$, per cui l'insieme delle soluzioni è dato dal grafico della funzione $y = 1/x$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Deve essere (x, y, z) perpendicolare a $(1, -2, 1)$, ovvero $z - 2y + z = 0$.
6. $1/2$ (tramite il cambio di variabile $t = x^2$).
7. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e traslato in basso di 1.

SECONDA PARTE.

1. a) Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. La funzione costante $x = 0$ è sempre una soluzione (soluzione banale) e tende a 0 a $+\infty$. Vediamo quando ce ne sono altre. Siccome il polinomio caratteristico dell'equazione ha radici $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$, distinguiamo quindi due casi:
   I) Per $-1 < \alpha < 1$ si ha $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta i$ (avendo posto $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$) per cui $x(t) = e^{-\alpha t}(a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t))$ con $a.b \in \mathbb{R}$. Quindi quando α è negativo o nullo $x(t)$ non tende mai a 0 a $+\infty$ (cioè per nessuna scelta di a, b tranne $a = b = 0$, che dà la soluzione banale), mentre quando α è positivo $x(t)$ tende sempre a 0 a $+\infty$ (cioè per tutte le scelte di a, b).
   II) Per $\alpha = \pm 1$ si ha $\lambda_{1,2} = -\alpha$ per cui $x(t) = e^{-\alpha t}(a + bt)$. Quindi per $\alpha = 1$, $x(t)$ tende sempre a 0 a $+\infty$, mentre per $\alpha = -1$ non tende mai a 0 (a parte la soluzione banale).
   b) Per $\alpha = 1$ si ha che $x(t) = e^{-t}(a + bt)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, ed imponendo le condizioni $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$ si ottiene $a = 0$, $b = 1$, cioè $x(t) = te^{-t}$.
2. Sia $a > 0$. Raccogliendo x^a si ottiene $f(x) = x^a\big[(1 + 1/x)^a - (1 - 1/x)^a\big]$. Usandoo lo sviluppo di Taylor (per t che tende a 0) $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$ prima con $t = 1/x$ e poi con $t = 1/x$ otteniamo
   $$f(x) = x^a\big(2a/x + O(x^{-2}\big) = 2ax^{a-1} + O(x^{a-2}) \; .$$
   Dunque la parte principale di f è $2ax^{a-1}$.
3. Fissato t, la retta r_t ha equazione $y - f(t) = f'(t)(x - t)$, e poiché $f'(t) = -\dfrac{6t}{(3 + t^2)^2}$,
   $$y = \frac{-6tx + 9(t^2 + 1)}{(3 + t^2)^2} \; .$$
   Il resto dell'esercizio è difficile. Consideriamo direttamente il caso generale c). Dal disegno delle rette tangenti al grafico di f si vede che queste ricoprono tutto il piano tranne l'angolo delimitato inferiormente dalle rette tangenti ai due punti di flesso di f. Siccome i punti di flesso sono ± 1, le rette tangenti corrispondenti $r_{\pm 1}$ hanno equazioni $y = \frac{3}{8}(\mp x + 3)$ ed il vertice dell'angolo in questione è $(0, 9/8)$.

Quindi per tutti i punti $(0, a)$ con $a > 9/8$ le rette tangenti più vicine sono $r_{\pm 1}$. Se invece $a \leq 9/8$, esistono delle rette tangenti r_t che passano per $(0, a)$, e che sono dunque le più vicine. In questo caso t deve soddisfare $\frac{9(t^2+1)}{(3+x^2)^2} = a$, da cui si ottiene

$$t = \pm\sqrt{\frac{3}{2a}\left(3 - 2a \pm \sqrt{9 - 8a}\right)} \ .$$



4. Sia C il volume d'acqua che evapora per unità di tempo ed unità di superficie (costante di dimensione cm/s, che dipende presumibilmente dalle condizioni del momento, ma che noi assumiamo fissa), e siano $S = S(t)$ e $V = V(t)$ rispettivamente la superficie esposta all'aria ed il volume dell'acqua (all'istante t). Il volume d'acqua che evapora in un intervallo di tempo Δt piccolo è dunque, in prima approssimazione,

$$V(t) - V(t + \Delta t) = C \cdot S(t) \cdot \Delta t \ .$$

Dividendo quindi per Δt e mandando Δt a 0 otteniamo l'equazione $-V' = C \cdot S$. Poiché $S = \pi(\tan\alpha)^2 x^2$ e $V = \frac{\pi}{3}(\tan\alpha)^2 x^3$, si ottiene $x' = -C$. Per risolvere effettivamente l'equazione serve conoscere il valore di C e l'altezza dell'acqua ad un certo istante.

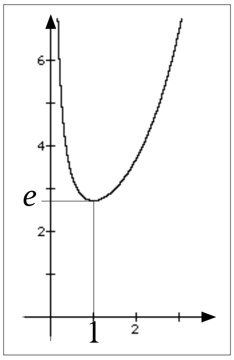
Si noti infine che non solo questa equazione non dipende da α, ma in ultima analisi non dipende neanche dalla forma del contenitore! Infatti si ha sempre che $V(t + \Delta t) - V(t) = S(t)(x(t + \Delta t) - x(t))$, ovvero $V' = Sx'$, che insieme all'equazione $-V' = C \cdot S$ ottenuta prima, diventa $x' = -C$.

QUARTO APPELLO, 23 SETTEMBRE 1999

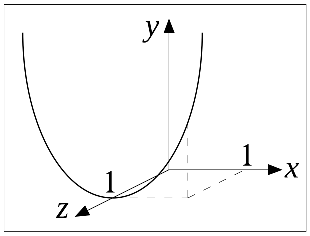
PRIMA PARTE.

1. $0 < x \leq 1$.
2. 2^{4x} (scartando la potenza, tra i due esponenziali il maggiore è $2^{4x} = 16^x$).
3. Si tratta delle radici cubiche di -8 cioè $z = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$.
4. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Il centro è $(1,1)$, quindi l'equazione è $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, cioè $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
6. $x = a\cos(\sqrt{\alpha}t) + b\sin(\sqrt{\alpha}t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $V(t) = (1 - e^{-t})' = e^{-t}$, $A(t) = v'(t) = -e^{-t}$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato in alto di 1 e a destra di 1.

SECONDA PARTE.



1. La disequazione è sempre verificata per $x \leq 0$, qualunque sia c. Per $x > 0$ la si riscrive invece come $e^x/x \geq c$, per cui risulta vera per ogni x positivo se e solo se c è minore o uguale al valore minimo di $f(x) = e^x/x$. Un veloce studio della derivata di f mostra che il punto di minimo assoluto di f si ha per $x = 1$, ed il valore minimo è dunque $f(1) = e$ (figura accanto).



2. Un punto generico della parabola è dato da $(b, b^2, 1)$ dove b varia in $\mathbb{R}$ (figura accanto). La retta passante per l'origine e per detto punto è parametrizzata da $x = bt$, $y = b^2t$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$, ovvero ha equazioni $x = bz$ e $y = b^2z$. Inoltre, chiedere che detta retta intersechi la retta r significa chiedere che il sistema a 4 equazioni e 3 incognite

$$\begin{cases} x = bz \\ y = b^2z \\ z = 2 \\ y = x - a \end{cases}$$

abbia soluzione. Dalle prime tre equazioni otteniamo $x = 2b$, $y = 2b^2$ ed quindi l'ultima è verificata solo se $2b^2 - 2b + a = 0$. Ma allora, fissato a si può trovare una retta del fascio che interseca r se e solo se si può trovare $b \in \mathbb{R}$ che risolve l'equazione di secondo grado $2b^2 - 2b + a = 0$, ovvero se il determinante di questa equazione è positivo, vale a dire per $a < 1/2$.

3. La derivata di $x(e^x - 1)$ si annulla in 0, dove la derivata seconda vale 2, dunque 0 è un punto di minimo locale per $x(e^x - 1)$. Dobbiamo far vedere che l'aggiunta di g non cambia niente, e cioè che $g'(0) = g''(0) = 0$. Ma questo segue dal fatto che lo sviluppo di Taylor di g in 0 non contiene termini di ordine inferiore a 3 perché $g(x) = o(x^2)$, e dunque $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

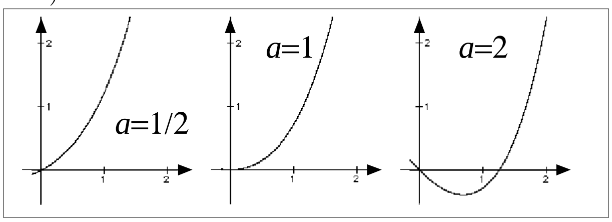
Quinto appello, 3 novembre 1999

Prima parte.

1. $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5\pi}{6}$.
2. $x = 2y - 2$.
3. $(\sqrt{3} + i)^3 = (2e^{i\pi/6})^3 = 8e^{i\pi/2} = 8i$.
4. Il determinante è 1.
5. Sostituendo $t = x^3$ nello sviluppo di Taylor all'ordine 2 di e^t si ottiene $e^{x^3} = e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3) = 1 + x^3 + x^6/2 + O(x^9)$.
6. Equazione a variabili separabili: $x = t^3$.
7. 2, 1 e 0 rispettivamente.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$ traslato in alto di 1 e a sinistra di π.

Seconda parte.

1. Ci limitiamo al caso generale b). Dobbiamo determinare per quali valori di a la funzione $f(x) = e^x - ax - 1$ è positiva su $[0, +\infty)$. Siccome $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1 - a$, se $a > 1$ allora f è decrescente in 0, e quindi assume anche valori negativi. Viceversa, se $a \le 1$ allora si vede che $f' \ge 0$ su $[0, +\infty)$, dunque f è crescente in $[0, \infty)$, e quindi è sempre maggiore di $f(0) = 0$ (figura sotto).



2. a) L'equazione generale del piano è $ax + by + cz = d$, ed imponendo che sia soddisfatta dai tre punti dati si ottiene $d = 0$, $b = 0$, $a+c = 0$. Scegliendo $a = 1$ si ottiene dunque $x - z = 0$.
   b) Procedendo come prima si ottiene $d = 0$ e $a + c = 2b$.
   c) Il sistema in questione è
$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ x - y = 2 \\ -2x + z = 1 \ . \end{cases}$$
   I piani del fascio paralleli alla retta sono quelli per cui non c'è intersezione, ovvero per cui il sistema non ha soluzioni. Affinché si verifichi ciò, la matrice ridotta deve avere determinante nullo, cioè $2c + a + b = 0$, e siccome deve anche essere $a + c = 2b$, otteniamo $c = -3b$ ed $a = 5b$. Si verifica che in questo caso la matrice completa ha invece rango 3, per cui il sistema non ha effettivamente soluzioni. Scegliendo $b = 1$ otteniamo dunque $c = -3$ e $a = 5$, ovvero il piano $5x + y - 3z = 0$.

3. a) I casi possibili sono 100^2, mentre quelli favorevoli sono 99 (cioè le coppie (A, B) date da $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4), \dots$, $(99, 100)$), per cui $P = \frac{99}{100^2} = 0,99\%$.
   b) Come prima, solo che i casi possibili sono ora $100 \cdot 99$, per cui $P = \dfrac{1}{100} = 1\%$.
   c) Analogo: $P = \dfrac{49}{50 \cdot 100} = 0,98\%$. d) Analogo: $P = \dfrac{n-k}{n^2}$.

SESTO APPELLO, 7 FEBBRAIO 2000

PRIMA PARTE.

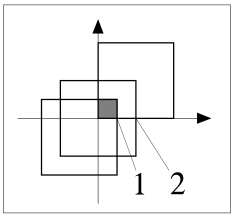
1. $7/13$.
2. $[0, 2)$.
3. $0 < x < 1$.
4. L'equazione generale di un piano è del tipo $ax+by+cz=d$. Imponendo che sia soddisfatta dai punti dati si ottengono le seguenti condizioni sui parametri: $a+b=d$, $0=d$ e $a+2b-c=d$, ovvero $d=0$, $b=-a$, $c=-a$, e scegliendo $a=1$ otteniamo $x-y-z=0$.
5. 0 entrambi.
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = \Big| -e^{-t}\Big|_1^{+\infty} = 1/e.$
7. $\displaystyle\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
8. [*Omesso.*]
9. $1 = z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$. Si tratta dunque dell'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

SECONDA PARTE.

1. Uso lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ insieme alla sostituzione $t = x + x^3 \sim x$, ed ottengo
$$f(x) = (x+x^3) - \frac{1}{6}(x+x^3)^3 + O((x+x^3)^5) - x = \frac{5}{6}x^3 + O(x^5)$$
2. Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata sono $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$. Si hanno dunque tre possibilità:
I) Se $0 < a < 1$, allora $\lambda_{1,2}$ sono complesse coniugate della forma $\lambda_{1,2} = -a \pm ib$, e dunque le soluzioni dell'equazione in questione sono date da
$$x = e^{-at}\rho\sin(bt+\theta) \quad \text{con } \rho > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi.$$
Quindi convergono tutte a zero per $t \to +\infty$ perché $a > 0$. D'altra parte nessuna di queste soluzioni è decrescente.
II) Se $a = 1$ allora $\lambda_{1,2} = -1$, quindi la soluzione generale dell'equazione è
$$x = e^{-t}(\alpha + \beta t)\ ,$$
che tende sempre a zero per $t \to +\infty$. Inoltre, imponendo le condizioni $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ otteniamo $\alpha = \beta = 1$, ovvero $x = e^{-t}(1+t)$, che è decrescente poiché la derivata $-te^{-t}$ è sempre negativa per $t > 0$.
III) Se $a > 1$ allora $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ e procedendo come prima si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy in questione tende a zero decrescendo per $t \to +\infty$.
3. Siccome la colonna dei termini noti è fatta solo di zeri, il sistema ha una sola soluzione (cioè $x = y = z = 0$) se il determinante della matrice ridotta è diverso da 0, e ne ha infinite altrimenti. La matrice ridotta associata al sistema ha determinante $3a+3$, che si annulla dunque per $a = -1$. In questo caso il sistema può essere facilmente risolto esplicitando prima z in funzione di y nella seconda equazione, e poi esplicitando x in funzione di y nella prima (o, equivalentemente, nella terza), e si ottiene $x = 5y/3$, $z = y/3$ con $y \in \mathbb{R}$. Imponendo poi la condizione $x^2+y^2+z^2 = 1$ si ottiene $y = \pm 3/\sqrt{35}$.

Sesto appello (bis), 18 febbraio 2000

Prima parte.



1. 1/3.
2. L'intersezione è il quadrato grigio nella figura qui accanto.
3. Siccome la funzione $\log x$ è definita per $x > 0$ e positiva per $x > 1$, le soluzioni della disequazione sono $0 < x < 1$ oppure $x > 3$.
4. Deve essere $(0, 1, 1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 0)) = 0$, ovvero $y + z = 1$.
5. 0 entrambi.
6. $\displaystyle\int_0^\pi \sin t\, \cos t\, dt = \Big| \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^\pi = 0$
7. $\displaystyle\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
8. [*Omesso.*]
9. $(1 + i)^4 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4 = 4e^{i\pi} = -4$.

Seconda parte.

1. Raccolgo x^a e quindi uso lo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = 2/x$:

$$(x + 2)^a - x^a = x^a\big[(1 + 2/x)^a - 1\big] = x^a(1 + 2a/x + O(4/x^2)) = 2ax^{a-1} + O(x^{a-2})\ .$$

   Il limite per $x \to +\infty$ risulta dunque uguale a 0 se $a < 1$, uguale a 2 se $a = 1$, ed uguale a $+\infty$ se $a > 1$.

2. La distanza del punto $(x, (1 + x^2)^{-1})$ dall'origine è data da $d = \sqrt{x^2 + (1 + x^2)^{-2}}$. Per semplificare i conti, sostituisco x^2 con t e minimizzo, invece di d, il suo quadrato, cioè la funzione $f(t) = t+(1+t)^{-2}$ per $t \geq 0$ (in realtà queste semplificazioni non sono strettamente necessarie). Siccome $f'(t) = 1 - 2(1 + t)^{-3}$, che risulta positiva per $t > \sqrt[3]{2} - 1$ e negativa altrimenti, si ha che $t = \sqrt[3]{2} - 1$ è il punto di minimo assoluto di $f(t)$. Pertanto la distanza d risulta minima per $x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}$.

3. La retta r passa sempre per l'origine, mentre il piano P non contiene mai l'origine, e quindi non può neanche contenere r. Inoltre r è parallela la vettore $(1, a, a^2)$, mentre P è ortogonale a $(2 - 3a, -a, 2)$, e quindi P ed r sono paralleli se e solo se questi due vettori sono perpendicolari, ovvero quando $(1, a, a^2) \cdot (2 - 3a, -a, 2) = 0$. Risolvendo si ottiene $a^2 - 3a + 2 = 0$, ovvero $a = 1, 2$.

Settimo appello, 10 aprile 2000

Prima parte.

1. Detto n il numero di biglie nere da aggiungere, deve essere $\dfrac{5}{5+(7+n)} = \dfrac{1}{3}$, per cui $n = 3$.
2. $f'(x) := -2xe^{-x^2+1}$; dallo studio del segno di f' si ottiene che 0 è il punto di massimo assoluto, e non ci sono punti di minimo.
3. Essendo $|z| = \rho$, si ha l'equazione $\rho^3 = \rho$, ovvero $\rho(\rho^2-1) = 0$, ovvero $\rho = 0$, che corrisponde a $z = 0$, e $\rho = 1$, che corrisponde a tutti i punti z sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
4. $(x-1)e^x$.
5. $-1/2$ e 0.
6. Si richiede che l'equazione generale del piano $ax + by + cz = d$ sia soddisfatta dai punti in questione, cosa che equivale alle condizioni $b = 0$, $d = 2a$, $c = a/\alpha$. Prendendo $a = \alpha$ si ottiene quindi $\alpha x + z = 2\alpha$.
7. $x = ae^{t^2}$ con $a \in \mathbb{R}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Seconda parte.

1. Dalla definizione di esponenziale complesso (e dal binomio di Newton) si ottiene
$$\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \ ,$$
e predendone la parte immaginaria
$$\sin(nx) = \sum_h (-1)^h \binom{n}{2h+1} (\sin x)^{2h+1} (\cos x)^{n-2h-1} \qquad (*)$$
dove h varia tra 0 (incluso) ed $n/2$ (escluso). In particolare
$$\sin(4x) = 4 \sin x\,(\cos x)^3 - 4\,(\sin x)^3 \cos x = 4 \sin x\, \cos x\,(1 - 2(\sin x)^2) \ .$$
Si vede infine che per n dispari $\cos x$ appare in $(*)$ solo con esponente pari, ovvero nella forma $(\cos x)^{2m}$, che può essere sempre riscritta come $(1-(\sin x)^2)^m$. Dunque la formula $(*)$ può essere in tal caso (e solo in tal caso) riscritta come un polinomio in $\sin x$.

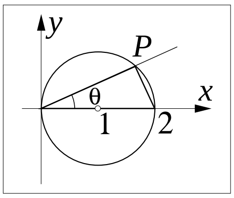
2. L'equazione del piano p passante per i tre punti assegnati può essere trovata in diversi modi, ed è (ad esempio), $x+2y+2z = 1$. Mettendola a sistema con le due equazioni che definiscono r_λ si ottiene
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ \lambda y + z = 2 \\ x + y + \lambda z = -1 \ . \end{cases}$$
Siccome il determinante della matrice ridotta è $(\lambda-1)^2$, per $\lambda \neq 1$ il sistema ha sempre una ed una sola soluzione, cioè la retta interseca il piano in un solo punto. Per $\lambda = 1$ si vede che sia la matrice completa che quella ridotta hanno rango 2, quindi ci sono infinite soluzioni, il che significa che la retta giace sul piano.

3. La disequazione si riscrive come $x \log x - x - 1 \geq 0$. La derivata della funzione $f(x) := x\log x - x - 1$ è $f'(x) = \log x$. Dallo studio del segno di f' si ottiene che 1 è il punto di minimo assoluto di f, e siccome $f(1) = 0$, ne deduciamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

Soluzioni 1999/00

Prima parte, gruppo A.

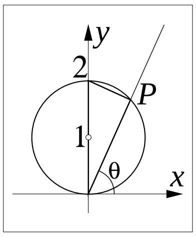
1. $P = \dfrac{3}{3+7+5} = \dfrac{1}{5} = 20\%$.
2. [*Omesso.*]
3. $2^{1000} = (2^{10})^{100} = 1024^{100}$ che vale approssimativamente $(10^3)^{100} = 10^{300}$ ed ha dunque circa 300 cifre. Alternativamente, $\log_{10}(2^{1000}) = 1000 \log_{10} 2 \simeq 301{,}03$, per cui il numero esatto delle cifre è 302.
4. Siccome il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e P in figura è rettangolo in P ed ha ipotenusa di lunghezza 2, mentre θ è l'angolo in $(0,0)$, la distanza cercata è $2\cos\theta$.



5. Deve essere $x^2 - 3x + 2 > 0$, ovvero $x < 1$ oppure $x > 2$.
6. Si tratta del grafico di $y = \dfrac{1}{x}$ traslato a sinistra di 1.
7. $(1-i)^8 = (\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i})^8 = 2^4\, e^{-2\pi i} = 16$
8. $x > 2$ oppure $-2 < x < 0$. Una possibile formula è $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{2}$.
9. 0 e 1 rispettivamente. La prima è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot +\infty$, in cui "prevale" l'infinitesimo perché è un esponenziale. La seconda è una forma indeterminata del tipo $+\infty/+\infty$, siccome denominatore e numeratore sono asintoticamente equivalenti a x^2, il limite del rapporto tende a 1.

Prima parte, gruppo B.

1. $P = \dfrac{4}{4+2+10} = \dfrac{1}{4} = 25\%$.
2. [*Omesso.*]
3. $4^{400} = 2^{800} = 1024^{80} \simeq 10^{240}$ ha circa 240 cifre (esattamente 241).
4. Siccome il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e P in figura è rettangolo in P ed ha ipotenusa di lunghezza 2, mentre l'angolo in $(0,2)$ è uguale a θ, la distanza cercata è $2\cos\theta$.



5. Deve essere $x > 0$.
6. Si tratta del grafico di $y = x^2$ traslato a destra di 1 ed in basso di 1.
7. $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$; le quattro radici quarte di -1.
8. $x > 1$ oppure $-1 < x < 0$ (dal disegno). Una possibile formula è $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{2}$.
9. 0 e $+\infty$ rispettivamente.

Prima parte, gruppo C.

1. $P = \dfrac{3+3}{3+3+6} = \dfrac{1}{2} = 50\%$.
2. [*Omesso.*]

3. Circa 120 cifre (per l'esattezza 121).
4. La distanza cercata è $2\sin\theta$.
5. $-1 < x < 1$ (si usi il fatto che $\arctan y > 0$ se e solo se $y > 0$).
6. Si tratta del grafico di $y = x^2$ riflesso rispetto all'asse delle ascisse, e traslato in alto di 1.
7. $z = 2, -1 \pm \sqrt{3}\,i$.
8. $x^2 + (y-1)^2 = 1$, ovvero $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
9. $+\infty$ e 0 rispettivamente.

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. $P = \dfrac{3+3}{3+3+6} = \dfrac{1}{2} = 50\%$.
2. [*Omesso.*]
3. Circa 600 cifre (per l'esattezza 603).
4. La distanza cercata è $2\sin\theta$.
5. $x > \dfrac{1}{e}$.
6. Si tratta del grafico di $y = e^x$ riflesso rispetto all'asse delle y, e traslato in basso di 1.
7. $(1+i)^8 = 16$.
8. $y = x^2 - 1$.
9. 0 ed 1 rispettivamente.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Per ogni carattere si hanno $26 + 10 = 36$ possibili scelte, per un totale di $36^5 \simeq 6,05 \cdot 10^7$ sigle.
   b) Per ciascuno dei primi due caratteri si hanno 26 possibili scelte, e 10 per i restanti tre, per un totale di $26^2 \cdot 10^3 \simeq 6,7 \cdot 10^5$ sigle.
   c) Tra le sigle descritte in b), il numero di quelle con caratteri tutti diversi è $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$, e dunque
   $$P = \frac{26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{26^2 \cdot 10^3} \simeq 69\%$$
   d) Se fissassimo quali caratteri sono lettere (il primo ed il secondo, oppure il secondo ed il quinto, ecc. ecc.), il numero delle sigle possibile sarebbe dato in b), e cioè $26^2 \cdot 10^3$. La risposta si ottiene dunque moltiplicando questo numero per tutti i possibili posizionamenti delle due lettere, che sono $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$, ed è quindi $26^2 \cdot 10^3 \cdot 10 \simeq 6,7 \cdot 10^6$.

2. Dimostrazione per induzione. (P_1) si riduce all'identità $a = \frac{(a-2)a^2+a}{(a-1)^2}$, che si dimostra facilmente. Data per buona (P_n), aggiungiamo ad entrambe i termini il fattore $(n+1)a^{n+1}$. A sinistra otteniamo così il termine di sinistra di (P_{n+1}), mentre a destra otteniamo
   $$\frac{(na-n-1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2} + (n+1)a^{n+1} \ ,$$

che con qualche calcolo si dimostra essere uguale al termine di destra di (P_{n+1}), e cioè

$$\frac{((n+1)a-(n+1)-1)a^{n+2}+a}{(a-1)^2}$$

Dunque anche (P_{n+1}) è vera.

3. a) Sviluppando la potenza del binomio $(1+1)^n$ si ottiene subito

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots.$$

b) Difficile. Se poniamo $S_p:=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ e $S_d:=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$, sviluppando le potenze dei binomi $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$ otteniamo

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=S_p+S_d \quad , \quad 0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=S_p-S_d\ .$$

I valori di S_p ed S_d sono dunque determinati dal sistema

$$\begin{cases} S_p+S_d=2^n \\ S_p-S_d=0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $S_p=S_d=2^{n-1}$.
c) Difficile. Procediamo come in b), ed indichiamo con S_0,S_1,S_2,S_3 le somme degli $\binom{n}{k}$ con, rispettivamente, $k=0,4,8,12,\cdots$, $k=1,5,9,13,\cdots$, $k=2,6,10,14,\cdots$, $k=3,7,11,15,\cdots$. Sviluppando le potenze $(1+1)^n$, $(1-1)^n$ e $(1+i)^n$ otteniamo

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=S_0+S_1+S_2+S_3 \quad , \quad 0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=S_0-S_1+S_2-S_3\ ,$$
$$2^{n/2}e^{\frac{n\pi}{4}i}=(1+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k=S_0+iS_1-S_2-iS_3\ ,$$

da cui si ottiene il sistema (nelle incognite $S_0\dots S_3$)

$$\begin{cases} S_0+S_1+S_2+S_3=2^n \\ S_0-S_1+S_2-S_3=0 \\ S_0-S_2=2^{n/2}\cos(n\pi/4) \\ S_1-S_3=2^{n/2}\sin(n\pi/4) \end{cases} \text{che dà} \begin{cases} S_0=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_1=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4) \\ S_2=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_3=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4)\ . \end{cases}$$

In particolare la somma cercata è $S_0=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4)$.

4. Dalla definizione si ottengono direttamente le identità

$$\begin{aligned} x_1&=x_0\,a \\ x_2&=x_1\,a-b=x_0a^2-b \\ x_3&=x_2\,a-b=x_0a^3-b(1+a) \\ x_4&=x_3\,a-b=x_0a^4-b(1+a+a^2) \\ x_5&=x_4\,a-b=x_0a^5-b(1+a+a^2+a^3) \end{aligned}$$

che suggeriscono la formula generale $x_n = x_0\, a^n - b(1+a+a^2+\dots a^{n-2})$. Questa può anche essere scritta come

$$x_n = x_0\, a^n - b\frac{a^{n-1}-1}{a-1} = a^n\Big(x_0 - \frac{b}{a(a-1)}\Big) + \frac{b}{a-1}\ .$$

Per stabilizzare la popolazione basta dunque scegliere b in modo tale che $x_0 - \frac{b}{a(a-1)} = 0$, ovvero $b = a(a-1)\,x_0$.

5. Il sistema è

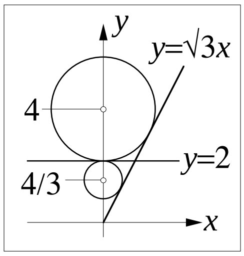
$$\begin{cases} x^2+y^2+a=0 \\ y = 2-\sqrt{3}\,x \end{cases} \begin{cases} 4x^2-4\sqrt{3}x+4+a=0 \\ y=2-\sqrt{3}\,x \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1-a}) \\ y=2-\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

Per $a>-1$ non si hanno dunque intersezioni, se ne hanno due per $a<-1$, ed una sola per $a=-1$, allorché la retta è tangente alla circonferenza.

Le intersezioni della circonferenza con le due rette sono determinate (rispettivamente) dai sistemi

$$\begin{cases} x^2+y^2+by+a=0 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2+y^2+by+a=0 \\ y=\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

che hanno soluzione unica quando $4+2b+a=0$ e $3b^2-16a=0$ (rispettivamente). Queste due condizioni sono verificate contemporaneamente per $a=4/3$, $b=-8/3$ (circonferenza piccola in figura) e per $a=12$, $b=-8$ (circonferenza grande).



Seconda parte, gruppo B.

1. Si procede come per il gruppo A: a) $36^6 \simeq 2,17\cdot 10^9$; b) $26^3\cdot 10^3 \simeq 1,76\cdot 10^7$; c) $P = \frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{26^3\cdot 10^3} \simeq 64\%$; d) $26^3\cdot 10^3\cdot\binom{6}{3} \simeq 3,51\cdot 10^8$.
2. [*Omesso.*]
3. Si procede come per il gruppo A: a) 2^n; b) 2^{n-1}; c) $S_1 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4)$.
4. [*Omesso.*]
5. b) $a=\pm\sqrt{2}$; c) $a=4/3$ e $b=8/3$, oppure $a=12$ e $b=8$.

Seconda parte, gruppo B.

1. a) $31^5 \simeq 2,86\cdot 10^7$; b) $21^3\cdot 10^2 \simeq 9,26\cdot 10^5$; c) $P = \frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 10\cdot 9}{21^3\cdot 10^2} \simeq 77\%$; d) $26^3\cdot 10^2\cdot\binom{5}{3} \simeq 9,26\cdot 10^6$.
2. [*Omesso.*]
3. a) 2^n; b) 2^{n-1}; c) $S_2 = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4)$.
4. [*Omesso.*]
5. b) $a=-2$; c) $a=4/3$ e $b=-8/3$ oppure $a=12$ e $b=-8$.

Secondo compitino, 10 aprile 2000

Prima parte, gruppo A.

1. Detto n il numero di biglie nere da aggiungere, deve valere $\dfrac{5}{5+(7+n)} = \dfrac{1}{3}$, per cui $n = 3$.
2. $f'(x) = -2xe^{-x^2+1}$. Dallo studio del segno si ottiene che 0 è il punto di massimo assoluto, e non ci sono punti di minimo.
3. Essendo $|z| = \rho$, si ha l'equazione $\rho^3 = \rho$, ovvero $\rho(\rho^2-1) = 0$, ovvero $\rho = 0$, che corrisponde al punto $z = 0$, e $\rho = 1$, che corrisponde a tutti i punti z sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
4. $0 < x \leq 1$ oppure $x \geq 2$.
5. $-1/2$ e 0 rispettivamente.
6. Si richiede che l'equazione generale del piano $ax + by + cz = d$ sia soddisfatta dai punti in questione, che equivale alle condizioni $b = 0$, $d = 2a$, $c = a/\alpha$. Prendendo $a = \alpha$ si ottiene (ad esempio) $\alpha x + z = 2\alpha$.
7. $f(x) = x^2\big(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big) - x^3 = -\frac{1}{6}x^5 + O(x^7)$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Prima parte, gruppo B.

1. 5.
2. $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$; 0 punto di minimo assoluto.
3. L'origine più la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.
4. $-1 < x \leq 0$ opp. $x \geq 1$.
5. 1 e 0 rispettivamente.
6. $\alpha x - z = \alpha$.
7. $f(x) = x^2\big(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big) - x^3 = -\frac{1}{6}x^5 + O(x^7)$.
8. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Prima parte, gruppo C.

1. 10.
2. $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2}$; 0 punto di minimo assoluto.
3. $x \geq 0$.
4. $(1-i)^6 = (\sqrt{2}e^{-\pi i/4})^6 = 2^3 e^{-3\pi i/2} = 8i$.
5. 0 entrambi.
6. $\alpha x - z = \alpha$.
7. $f(x) = x\big(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) - 1\big) = -\frac{1}{2}x^3 + O(x^5)$.
8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

SECONDO COMPITINO, 10 APRILE 2000

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. L'equazione del piano p passante per i tre punti assegnati può essere trovata in diversi modi, ed è (ad esempio) $x+2y+2z=1$. Mettendola a sistema con le due equazioni che definiscono la retta r_λ si ottiene
$$\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ y+\lambda z=2 \\ x+\lambda y+z=-1 \end{cases}$$
Siccome il determinante della matrice ridotta è $-(\lambda-1)^2$, per $\lambda \neq 1$ il sistema ha sempre una ed una sola soluzione, cioè la retta interseca il piano in un solo punto. Per $\lambda=1$ si vede che sia la matrice completa che quella ridotta hanno rango 2, quindi ci sono infinite soluzioni, il che significa che la retta giace sul piano.

2. La disuguaglianza $(**)$ si riscrive come $x\log x - ax - b \geq 0$. Determiniamo dunque il punto di minimo di $f(x) := x\log x - ax - b$. Siccome $f'(x) = \log x - (a-1)$, si vede che f' si annulla per $x = e^{a-1}$, ed è negativa prima e positiva dopo. Ne consegue che e^{a-1} è il punto di minimo assoluto di f, ed $f(e^{a-1}) = (a-1)e^{a-1} - ae^{a-1} - b = -e^{a-1} - b$ è il valore minimo di f. Pertanto la $(**)$ vale se e solo se $-e^{a-1} - b \geq 0$, ovvero $b \leq -e^{a-1}$. Infine otteniamo la $(*)$ prendendo $a=1$ e $b=-1$.

3. Determino la parte principale di numeratore e denominatore: $\log(1+x) \simeq x$ e dunque
$$(\log(1+x))^2 \simeq x^2 \ .$$
D'altra parte $e^x - 1 = 1 + x + O(x^2) - 1 = x + O(x^2)$, inoltre $\sin t = t + O(t^3)$, per cui
$$\sin(e^x-1) = \sin(x+O(x^2)) = x + O(x^2) + O(x^3) \simeq x \ .$$
Per il principio di sostituzione degli infinitesimi
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(e^x-1)}{(\log(1+x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \ .$$

4. Dalla definizione di esponenziale complesso (e dal binomio di Newton) si ottiene
$$\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i\sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \ ,$$
e prendendone la parte immaginaria
$$\sin(nx) = \sum_h (-1)^h \binom{n}{2h+1} (\sin x)^{2h+1} (\cos x)^{n-2h-1} \tag{3}$$
dove la somma viene fatta su tutti gli h interi compresi tra 0 (incluso) ed $n/2$ (escluso). Si vede infine che per n dispari $\cos x$ appare in (3) solo con esponente pari, ovvero nella forma $(\cos x)^{2m}$, che può essere sempre riscritta come $(1-(\sin x)^2)^m$. Dunque la formula (3) può essere in tal caso (e solo in tal caso) riscritta come un polinomio in $\sin x$. In particolare
$$\begin{aligned} \sin(5x) &= 5\,\sin x\,(\cos x)^4 - 10\,(\sin x)^3(\cos x)^2 + (\sin x)^5 \\ &= 5\,\sin x\,(1-(\sin x)^2)^2 - 10\,(\sin x)^3(1-(\sin x)^2) + (\sin x)^5 \\ &= \sin x\,(5 - 20\,(\sin x)^2 + 16\,(\sin x)^4) \ . \end{aligned}$$

5. Il numero delle estrazioni possibili è $(n+4)\cdot(n+3)$, corrispondenti a $(n+4)$ scelte per la prima biglia estratta ed $(n+3)$ per la seconda. Le estrazioni favorevoli al giocatore sono quelle per cui la prima biglia è bianca e la seconda è nera ($n \cdot 4$ casi) oppure il contrario ($4 \cdot n$ casi). Pertanto la probabilità di vittoria è data da
$$P_n = \frac{8n}{(n+4)(n+3)} \qquad \text{(e in particolare } P_4 = 4/7\text{)}.$$
Ovviamente conviene giocare quando la probabilità di vittoria è superiore a 1/2. Questo si traduce nella disequazione $n^2 - 9n + 12 < 0$, che è verificata per $\frac{9-\sqrt{33}}{2} < n < \frac{9+\sqrt{33}}{2}$, ovvero, trattandosi di n interi, per n compreso tra 2 e 7 (inclusi).

Seconda parte, gruppo B.

1. L'equazione di p è $x+2y+2z = 1$. Il determinante della matrice ridotta associata al sistema è $(\lambda-1)^2$, e quindi per $\lambda \neq 1$ la retta interseca il piano in un solo punto, mentre per $\lambda = 1$ si vede che la retta giace sul piano.
2. Uguale al gruppo A (si ottiene la $(*)$ prendendo $a = 2$ e $b = -e$).
3. Procedendo come per il gruppo A si vede che $\log(1+x^3) \simeq x^3$ mentre $\log(\cos x) = \log(1 - x^2/2 + O(x^4)) = (-x^2/2 + O(x^4)) + O(x^4) \simeq -x^2/2$. Pertanto il limite è $-1/2$.
4. Procedendo come per il gruppo A si ottiene
$$\cos(nx) = \sum_h (-1)^h \binom{n}{2h} (\sin x)^{2h} (\cos x)^{n-2h}$$
dove la somma viene fatta su tutti gli h interi compresi tra 0 ed $n/2$ (inclusi). Siccome $\sin x$ appare sempre con esponente pari, $\cos(nx)$ può essere sempre scritto come un polinomio di $\cos x$. In particolare
$$\begin{aligned}\cos(4x) &= (\cos x)^4 - 6\,(\sin x)^2(\cos x)^2 + (\sin x)^4 \\ &= 1 - 8\,(\cos x)^2 + 8\,(\cos x)^4 \;.\end{aligned}$$
5. La probabilità di vittoria è $P_n = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$, ed in particolare $P_4 = 4/7$. Conviene giocare per $P_n > 1/2$, cioè per n compreso tra 2 e 5 (inclusi).

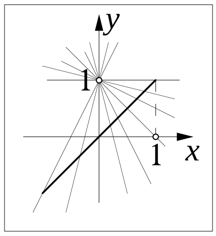
Seconda parte, gruppo C.

1. L'equazione di p è $2x+y+2z = 1$. Il resto è uguale al gruppo A.
2. Uguale al gruppo A (si ottiene la $(*)$ prendendo $a = 3$ e $b = -9$).
3. Procedendo come per il gruppo B si vede che $(\sin x)^3 \simeq x^3$ mentre $\log(\cos x) \simeq -x^2/2$. Pertanto il limite è $-1/2$.
4. Per $\cos(nx)$ vale la stessa formula ottenuta per il gruppo B, e siccome $\cos x$ vi appare con esponente $n-2h$, $\cos(nx)$ può essere scritto come un polinomio di $\sin x$ solo per n pari. In particolare
$$\begin{aligned}\cos(4x) &= (\cos x)^4 - 6\,(\sin x)^2(\cos x)^2 + (\sin x)^4 \\ &= 1 - 8\,(\sin x)^2 + 8\,(\sin x)^4 \;.\end{aligned}$$
5. La probabilità di vittoria è $P_n = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$, ed in particolare $P_4 = 4/7$. Conviene giocare per $P_n > 1/3$, cioè per n compreso tra 1 e 21 (inclusi).

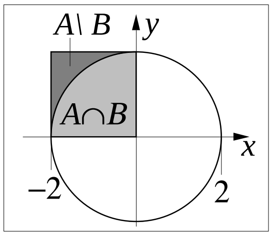
Primo appello, 2 giugno 2000

Prima parte, gruppo A.

1. $-\pi \leq x \leq \pi$ (perché $\sin x \geq 0$ per $x \in [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi]$, mentre $e^x \geq 1$ per $x \in [0, 2\pi]$).
2. $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$; 1 è punto di minimo assoluto.
3. π.
4. $x(t) = ae^t + be^{-5t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $f(x) \simeq \sqrt{x^3} = x^{3/2}$.
6. $P = (5/6)^2 = 25/36 \simeq 69\%$.
7. Le rette passanti per il punto $(0, 1)$ hanno equazione $y = mx + 1$ con $m \in \mathbb{R}$. Come si può vedere nella figura qui accanto, il coefficiente angolare m deve valere $m \geq 2$ (si ha $m = 2$ per la retta passante per $(-1, -1)$) oppure $m \leq 0$ (si ha $m = 0$ per la retta passante per $(1, 1)$). Và poi aggiunta la retta verticale $x = 0$.

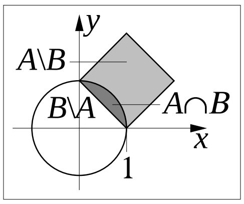


8. Vedere figura accanto.



Prima parte, gruppo B.

1. $x \geq 1/2$ (perché $\arctan t \geq 0$ per $t \geq 0$.
2. $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}$; 1 è punto di massimo assoluto.
3. $e - 1$.
4. $x(t) = e^{-3t}(a + bt)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $f(x) \simeq x^3(1/x) = x^2$.
6. $P = (4/6)^2 = 4/9 \simeq 44\%$.
8. Vedere figura accanto.



Seconda parte, gruppo A.

1. La probabilità che tirando un dado non esca il numero 6 è 5/6. Quindi, la probabilità che tirando n dadi non esca il numero 6 è $P(n) = (5/6)^n$. Pertanto la vincita media è data da $V(n)$ volte la posta, dove
$$V(n) = n^3 P(n) = n^3 (5/6)^n \ .$$
Per trovare n che massimizza $V(n)$, studiamo la funzione $V(x) = x^3(5/6)^x = x^3 e^{-\log(6/5)\,x}$ per x reale e positivo. Siccome
$$V'(x) = \left(3x^2 - \log(6/5)\, x^3\right) e^{-\log(6/5)\,x} = (3 - \log(6/5)\, x)\, x^2\, e^{-\log(6/5)\,x} \ ,$$

la funzione $V(x)$ cresce per $x \leq x_M := 3/\log(6/5) \simeq 16,45$. e decresce per $x \geq x_M$, si vede che il numero intero n che massimizza $V(n)$ deve essere 16 o 17. Usando una calcolatrice di vede che $V(16) \simeq 221,54$ che è maggiore di $V(17) \simeq 221,44$.
Invece il giocatore non va in perdita finché $V(n) \geq 1$. Per vedere per quali n si verifica ciò, distinguiamo gli n compresi tra 1 e 16, dove $V(n)$ è crescente, e quelli maggiori di 17, dove $V(n)$ è decrescente. Nel primo caso si vede che $V(1) \simeq 0,83$ mentre $V(2) \simeq 5,55$, e dunque $V(n) \geq 1$ per $n \geq 2$; nel secondo caso invece si vede (dopo un po' di tentativi) che $V(69) \simeq 1,12$ mentre $V(70) \simeq 0,98$, e quindi $V(n) \geq 1$ per $n \leq 69$. Mettendo insieme questi due risultati si ottiene che $V(n) \geq 1$ per tutti gli n interi compresi tra 2 e 69 (inclusi).

2. Il piano P ha equazione $(a,0,2)\cdot(x-1,y,z-1) = 0$, ovvero $ax+2z = a+2$. Viceversa, la retta R è data in forma parametrica da $(x,y,z) = (1,2,-2) + [(-2,-4,4)-(1,2,-2)]\cdot t$, ovvero
$$\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2-6t \\ z = -2+6t \end{cases} \quad \text{che diventa} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = -y \end{cases} .$$
Pertanto il sistema che determina le intersezione di P ed R è
$$\begin{cases} 2x-y = 0 \\ y+z = 0 \\ ax+2z = a+2 \end{cases} \quad \text{ed ha matrice ridotta} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$
Il determinante della matrice ridotta è $4-a$. Quindi per $a \neq 4$ il sistema ammette una ed una sola soluzione (la retta è incidente), per $a = 4$ il rango della matrice ridotta è minore di 3, mentre si vede che quello della matrice completa è ancora 3, e quindi non vi sono soluzioni (la retta è parallela).
Ragionando geometricamente, si osserva che $(a,0,2)$ è ortogonale a P, mentre $(-3,-6,6)$ è il vettore direttore di R. Il loro prodotto scalare è dato da $(a,0,2)\cdot(-3,-6,6) = -3(a-4)$; quindi se $a \neq 4$ i due vettori non sono ortogonali, ovvero R non è parallela a P né giace su P, mentre per $a = 4$ i due vettori sono ortogonali, e quindi R è parallela a P oppure giace su P, e si esclude facilmente quest'ultima possibilità.

3. L'equazione $\dot{x} = e^x$ è a variabili separabili. Allora $\dot{x}\, e^{-x} = 1$, ed integrando $-e^{-x} = t + c$ con $c \in \mathbb{R}$. usando ora il dato iniziale $x(0) = 0$ si ottiene $c = -1$, ovvero $-e^{-x} = t-1$, da cui si ricava infine $x(t) = -\log|t-1|$.
Quando $a \neq 0$ l'equazione resta a variabili separabili, ma per risolverla bisognerebbe trovare una primitiva di $(e^x + ax)^{-1}$, che non è facile. Tuttavia, detta $x(t)$ la soluzione, possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in 0 a patto di conoscere $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$. Ma sappiamo dal dato iniziale che $x(0) = 0$, e quindi l'equazione dà $\dot{x}(0) = e^{x(0)} + a\, x(0) = 1$. Derivando l'equazione si ottiene inoltre che
$$\ddot{x} = (e^x + ax)' = e^x\dot{x} + a\dot{x}$$
e quindi $\ddot{x}(0) = 1+a$. Pertanto $x(t) = t + \dfrac{1+a}{2}\, t^2 + O(t^3)$.

4. Studiamo la funzione
$$f(x) = \int_1^x (t-1)e^{t^2}\, dt .$$
Si vede innanzitutto che f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f'(x) = (x-1)e^{x^2}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Ne consegue che f è strettamente crescente per $x \geq 1$ e strettamente decrescente altrimenti; in particolare 1 è il punto di minimo

assoluto, ed $f(1) = 0$ è il valore minimo di f. Siccome $f(\pm\infty) = +\infty$, tracciando un grafico approssimativo si vede che:
- per $a < 0$ non ci sono soluzioni dell'equazione $(*)$;
- per $a = 0$, $x = 1$ è l'unica soluzioni di $(*)$;
- per $a > 0$ la $(*)$ ammette due soluzioni, una maggiore ed una minore di 1.

5. Se $N(t)$ indica il numero di molecole presenti al tempo t, dopo un intervallo di tempo Δt piccolo, il numero delle molecole che si sono disgregate è dato da $p \cdot N \cdot \Delta t$, ovvero $N(t) - N(t + \Delta t) = p \cdot N(t) \cdot \Delta t$, e dividendo per il volume V del contenitore
$$x(t) - x(t + \Delta t) = p \cdot x(t) \cdot \Delta t \ .$$
Dividendo quindi per Δt e mandando Δt a 0 si ottiene l'equazione differenziale (lineare omogenea del primo ordine)
$$-\dot{x} = px \ ,$$
che ha soluzione $x(t) = x(0)e^{-pt}$. Pertanto dire che il tempo di dimezzamento è t_d significa dire che $x(t_d) = x(0)/2$, ovvero che $2^{-p\,t_d} = 1/2$, che infine dà la relazione $p\,t_d = \log 2$. In particolare se $t_d = 10^{-4}\,\text{sec}$, allora
$$p = 6,93 \cdot 10^{-5}\,\text{sec}^{-1} \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. La probabilità che tirando n monete non esca mai testa è $P(n) = (1/2)^n$. Pertanto la vincita media è data da $V(n)$ volte la posta, dove
$$V(n) = n^2 P(n) = n^2 2^{-n} \ .$$
Procedendo come per il gruppo A studiamo $V(x) = x^2 2^{-x}$ (per $x > 0$) ed otteniamo che $V(x)$ cresce per $x \leq x_M := 2/\log 2 \simeq 2,88$. e decresce altrimenti. Il numero intero n che massimizza $V(n)$ è 3, mentre $V(n) \geq 1$ solo per $n = 2, 3, 4$.

2. Il piano P ha equazione $ax + 4z = 2a + 8$, mentre la retta R è determinata dalle equazioni $x = 0$ ed $y = 3 - z$. Il sistema che determina le intersezione di P ed R è
$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 3 \\ ax + 4z = 2a + 8 \end{cases} \qquad \text{con matrice ridotta} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix} \ .$$
Il determinante della matrice ridotta è 4 e quindi il sistema ammette sempre una ed una sola soluzione (la retta è incidente).

3. L'equazione $\dot{x} = 1 + x^2$ è a variabili separabili ed ha soluzione generale $\arctan x = t + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Usando ora il dato iniziale $x(0) = 0$ si ottiene $c = 0$, ed infine si ha $x(t) = \tan t$. Quando $a \neq 0$ l'equazione resta a variabili separabili, ma è più difficile da risolvere. Procedendo come per il gruppo A si ottiene $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $\ddot{x}(0) = a$, per cui
$$x(t) = t + \frac{a}{2}\,t^2 + O(t^3) \ .$$

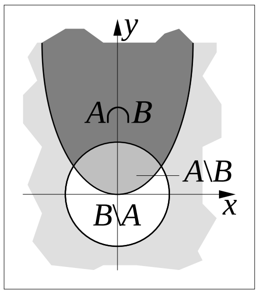
4. Procedendo come per il gruppo A si vede che f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è strettamente decrescente per $x \leq -1$, strettamente crescente per $x \geq -1$, e -1 è il punto di minimo assoluto. Pertanto il valore minimo assunto da f è $f(-1) = 0$. Siccome poi $f(\pm\infty) = +\infty$, si vede che per $a < 0$ l'equazione (2) non ha soluzioni, ne ha una sola $x = -1$ per $a = 0$, e ne ha due altrimenti.

5. [*Uguale al gruppo A.*]

Secondo appello, 30 giugno 2000

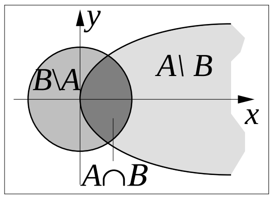
Prima parte, gruppo A.

1. $x = \rho e^{-t} \sin(t + \theta)$, con $\rho > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$.
2. $8\pi r^3$.
3. $a > 1$.
4. 1 e 0 rispettivamente.
5. Ponendo $t = \cos x$ si ottiene $\displaystyle\int_1^{-1} -e^t dt = \int_{-1}^1 e^t dt = e - \frac{1}{e}$.
6. $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
7. Si tratta di contare i possibili modi di scegliere due punti tra i cinque assegnati (senza tener conto dell'ordine); la risposta è dunque $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$.
8. Vedere la figura accanto.

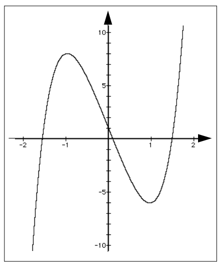


Prima parte, gruppo B.

1. $x = \rho e^{t} \sin(t + \theta)$, con $\rho > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$.
2. $4\pi r^3$.
3. $0 < a < 1$.
4. 1 e 0 rispettivamente.
5. Ponendo $t = \log x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.
6. $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
7. Si tratta di contare i possibili modi di scegliere due punti tra i quattro assegnati (senza tener conto dell'ordine); la risposta è dunque $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$.
8. Vedere la figura accanto.



Seconda parte, gruppo A.



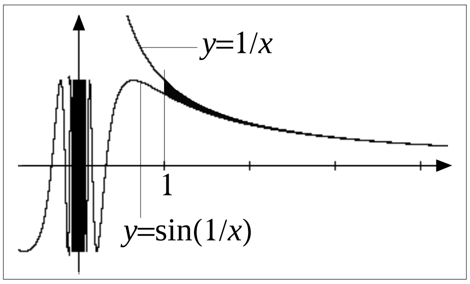
1. Studiamo la funzione $f(x) = x^5 + 2x^3 - 10x + 1$ per determinare il numero delle intersezioni con l'asse delle x. Si vede che f è definita su tutto $\mathbb{R}$, $f(\pm\infty) = \pm\infty$. Inoltre $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 10$, e ponendo $x^2 = t$ se ne possono trovare tutti gli zeri. In particolare si ottiene che $f'(x) \geq 0$ quando $x \geq x_1$ oppure $x \leq -x_1$ dove
$$x_1 := \sqrt{\frac{\sqrt{59} - 3}{5}} \simeq 0,97 \ .$$
Pertanto x_1 è un punto di minimo locale ed $f(x_1) \simeq -6$, mentre $-x_1$ è un massimo locale e $f(-x_1) \simeq 8$. Il grafico di f risulta quindi dato dalla figura qui sopra. Se ne deduce che l'equazione $f(x) = 0$ ammette tre soluzioni distinte.

2. Se il piano P deve contenere l'asse delle z, allora l'equazione generale $ax + by + cz = d$ deve essere soddisfatta da tutti i punti della forma $(0, 0, z)$ con $z \in \mathbb{R}$, ovvero deve essere del tipo $ax + by = 0$. Imponendo poi che sia soddisfatta dal punto $(1, \alpha, \alpha^2)$ si ottiene che P ha equazione $\alpha x - y = 0$. La retta R è invece definita dalle equazioni $x + 2y = 1$ ed $-y + z = 1$ (ottenute a partire dalla forma parametrica). Pertanto il sistema che determina le intersezione di P ed R è
$$\begin{cases} \alpha x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Il determinante della matrice ridotta è $2\alpha + 1$, e quindi se $\alpha \neq -1/2$ la soluzione è unica (retta incidente), mentre per $\alpha = -1/2$ il rango della matrice ridotta è inferiore a 3 e si vede facilmente che quello della matrice completa è ancora 3. Quindi per $\alpha = -1/2$ non ci sono soluzioni, ovvero la retta è parallela al piano.

3. a) Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale $(*)$ è $\lambda^2 + a\lambda + 4$, ed ha soluzioni
$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2} \ .$$
Se $a < 4$ abbiamo dunque due soluzioni complesse coniugate la cui parte reale è $-a/2$, e dunque ogni soluzione è data dal prodotto di $e^{-at/2}$ per una funzione del tipo $\rho \sin(\cdots)$. Quest'ultima è limitata in t, mentre l'esponenziale, essendo $a > 0$, tende a 0 per $t \to +\infty$, e così fa la soluzione. Se invece $a = 4$, allora $\lambda_{1,2} = -2$, per cui ogni soluzione è data dal prodotto di e^{-2t} per un polinomio del primo ordine, ed è dunque infinitesima per $t \to +\infty$. Infine, se $a > 4$ abbiamo due soluzioni reali distinte che risultano entrambe negative, per cui di nuovo le soluzioni sono infinitesime per $t \to +\infty$.
b) L'equazione differenziale $(**)$, invece, è non lineare (per via del termine x^3), e dunque non possiamo applicare formule risolutive di sorta. Tuttavia, cominciando a studiare la grandezza $\dot{x}^2 + x^4$ come suggerito, si osserva che
$$(\dot{x}^2 + x^4)' = 2\dot{x}\ddot{x} + 4\dot{x}x^3 = 2\dot{x}(\ddot{x} + 2x^3) = -2a\dot{x}^2 \ ,$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'identità $\ddot{x} + 2x^3 = -a\dot{x}$, che non è altro che una riscrittura della $(**)$.
Siccome $a > 0$, $-2a\dot{x}^2 \leq 0$, e ne consegue che il valore di $\dot{x}^2 + x^4$ decresce al crescere di t, e quindi converge ad un qualche limite finito e positivo L per $t \to +\infty$, e dunque, se eiste il limite di $\dot{x}$ all'infinito (cosa non facile da dimostrare) questo deve essere 0. Allora x deve convergere a $\pm L^{1/4}$, e dall'equazione $(**)$ si vede che $\ddot{x}$ converge a $\mp 2L^{3/4}$, ma se $L \neq 0$, questo contraddice la possibilità che $\dot{x}$ tenda a 0.
c) Infine, osserviamo che se moltiplichiamo l'equazione $(**)$ per m, otteniamo l'equazione del moto di un punto di massa m sottoposto ad una forza di attrito proporzionale alla velocità ed una forza che dipende dalla posizione a cui corrisponde un'energia potenziale $mx^4/2$. Per via dell'attrito, l'energia totale $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^4)$ (cioè la somma di energia cinetica ed energia potenziale) decresce sempre a meno che il corpo non si fermi, e l'unica posizione di equilibrio si ha quando $x = 0$.

4. Ad x fissato, si vede che l'insieme dei punti (y, z) che soddisfano la disequazione che definisce V, cioè $y^2 + z^2 \leq \frac{1}{1+x^2}$, è appunto un cerchio di centro l'origine e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Dunque la sezione V_x ha area $\pi r^2 = \frac{\pi}{1+x^2}$, e pertanto
$$\operatorname{vol}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{area}(V_x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{1 + x^2}\, dx = \pi \Big| \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi^2$$

5. Siccome $t > \sin t > 0$ per $0 < t < \pi/2$, allora $1/x > \sin(1/x) > 0$ per $x > 2/\pi$ (ed in particolare per $x \geq 1$), e pertanto, come si vede dalla figura qui sotto, l'area in questione è data dall'integrale improprio
$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$$
che è finito perché l'integranda è asintoticamente equivalente a $1/(6x^3)$ per $x \to +\infty$ (basta usare lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$).



SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Procedendo come per il gruppo A si dimostra che l'equazione ha tre soluzioni.
2. Procedendo come per il gruppo A si mostra che P ha equazione $\alpha x - y = 0$, mentre R ha equazioni $x + y = 1$ ed $5y + z = 3$. Il sistema che determina le intersezione di P ed R è
$$\begin{cases} \alpha x - y = 0 \\ x + y = 1 \\ 5y + z = 3 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Il determinante della matrice ridotta è $\alpha + 1$, e quindi se $\alpha \neq -1$ la soluzione è unica (retta incidente), mentre per $\alpha = -1$ non ci sono soluzione, ovvero la retta è parallela al piano.

[*Per gli esercizi 3), 4) e 5) si procede come per il gruppo A.*]

TERZO APPELLO, 8 SETTEMBRE 2000

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. $\dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{13} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i.$
2. $A = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| = 5.$
3. Deve essere $-1 \leq \log x \leq 1$, ovvero $1/e \leq x \leq e$.
4. $x = e^{2t}/e = e^{2t-1}$.
5. $\frac{3}{4}(2+x)^{4/3}$.
6. $+\infty$ e 3 rispettivamente.
7. $1/2^n$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse y, e quindi traslato in basso di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. $\dfrac{1}{2-3i} = \dfrac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2+3i}{13} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i.$
2. $A = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 3.$
3. Deve essere $\arcsin x > 0$, ovvero $0 < x \leq 1$.
4. $x = 1/t$.
5. $x^3 - 4\cos x$.
6. 1 e $+\infty$ rispettivamente.
7. $1/6^n$.
8. Si tratta del grafico di $\log x$ traslato a sinistra di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^4 - 4x + 3$ per $x \geq 0$. Si vede che $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3-1)$, che è positiva per $x > 1$ e negativa altrimenti. Ne segue che 1 è il punto di minimo assoluto, e siccome $f(1) = 0$, ne consegue che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.
   Se sostituiamo $y = xz$ nella disequazione al punto b), questa diventa $x^4z^4 + 3z^4 \geq 4xz^4$, ovvero $x^4 + 3 \geq 4x$, che è stata appena dimostrata. Il caso più generale segue allo stesso modo, riducendosi alla disequazione $x^t - tx + t - 1 \geq 0$ per $x \geq 0$.
2. Si ha $e^x \sin x = \left[x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right]\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right] = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$, e quindi
   $$e^x \sin x - x - ax^2 = (1-a)x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4) \ .$$
   Quindi l'ordine di infinitesimo è 2 tranne che per $a = 1$, nel qual caso è 3 e la parte principale è $\frac{1}{3}x^3$.
3. La retta r_1 si scrive in forma parametrica come $(x,y,z) = (0,0,1) + (a,0,1)t$ con $t \in \mathbb{R}$, ovvero
   $$\begin{cases} x = at \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \text{ che equivale a } \quad \begin{cases} y = 0 \\ x - az = -a \ . \end{cases}$$

Analogamente si ottiene che r_2 è data dalle equazioni

$$\begin{cases} y + (1-a)x = 1 \\ 2x + z = 2 \ . \end{cases}$$

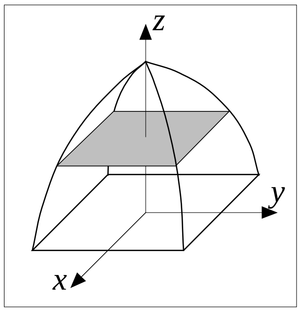
Quindi i punti (x, y, z) nell'intersezione delle due rette devono soddisfare il sistema a quattro equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - az = -a \\ y + (1-a)x = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases} \quad \text{che ha matrice completa} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & -a \\ 1-a & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Il determinante di quest'ultima, sviluppato per la prima riga, è a^2+a+1, che non si annulla mai, pertanto la matrice completa del sistema ha rango 4, mentre quella incompleta può avere al massimo rango 3, e dunque il sistema non ammette mai soluzioni. Questo dimostra che le rette non si intersecano mai. (Alternativamente, uno può risolvere direttamente il sistema, ottenendo $y = 0$ dalla prima equazione, $x = \frac{1}{1-a}$ dalla seconda, e rimanere quindi con due diverse equazioni per z, che però non sono mai soddisfatte contemporaneamente.) Resta infine da escludere che r_1 ed r_2 possano essere parallele. A questo scopo osserviamo che le rette sono parallele se i rispettivi vettori direttori, $v_1 := (a, 0, 1)$ ed $v_2 = (1, a-1, -2)$, sono uno multiplo dell'altro. Dall'esame dell'ultima componente, l'unica possibilità sarebbe $v_2 = -2v_1$, che si riduce alle equazioni $1 = -2a$ e $a - 1 = 0$, che non sono mai verificate contemporaneamente. Quindi le rette non sono mai parallele.

4. Fissato z, le disequazioni diventano $-\cos z \le x, y \le \cos z$, che definisce il quadrato di centro l'origine, assi paralleli agli assi x ed y, e lato $2\cos z$. Pertanto l'area di ciascun quadrato è $4\cos^2 z$; C è come in figura, ed il volume è dato da

$$V = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 z \, dz = \pi \ .$$



Seconda parte, gruppo B.

1. [*Come per il gruppo A.*]
2. Si ha $\log(x+1)\cos x = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)\right]\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right] = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, e quindi
$$e^x \sin x - x - ax^2 = -\Big(\frac{1}{2} + a\Big)x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \ .$$
L'ordine di infinitesimo è 2 tranne che per $a = -1/2$, allorché la parte principale è $-\frac{1}{6}x^3$.
3. [*Come per il gruppo A.*]
4. Si procede come per il gruppo A, ed il volume è dato da $V = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 4\cos z \, dz = 4$.

QUARTO APPELLO, 17 OTTOBRE 2000

PRIMA PARTE.

1. Deve essere $(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2^2$, ovvero $x^2+y^2+z^2-2x=3$.
2. Il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti. In questo caso si ottiene $(-1)\cdot(-1)=1$
3. L'argomento della radice deve essere strettamente positivo, cioè $x^3+1>0$, cioè $x>-1$.
4. 0 e -1 rispettivamente.
5. π.
6. $x(t)=0$, ovviamente!
7. Si tratta del triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$.
8. Per esempio, $y=e^{-x}$.

SECONDA PARTE.

1. a) Date 52 carte, i modi di disporle (tenendo conto dell'ordine) sono 52!. Di questi, quelli che soddisfano la richiesta a) sono 48!, perché, appunto, le prime quattro carte sono fissate, mentre le rimanenti 48 possono essere in qualunque ordine. La probabilità è dunque
$$P=\frac{48!}{52!}=\frac{1}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}\simeq 1,54\cdot 10^{-7}\ .$$
Alternativamente, si noti che estrarre le prime quattro carte da un mazzo mescolato a caso è la stessa cosa che estrarre quattro carte a caso da un mazzo ordinato. Siccome i modi di estrarre quattro carte (tenendo conto dell'ordine) sono $D_{52,4}$, e quindi la probabilità che escano i 4 assi nell'ordine voluto è $P=1/D_{52,4}=48!/52!$.
b) I modi di disporre 52 carte sono sempre 52!, mentre quelli che soddisfano la richiesta b) sono $4!\cdot 48!$, cioè tutti i modi di disporre le prime quattro carte (che devono essere assi, ma in un ordine qualunque) moltiplicati i modi di disporre le rimanenti 48. Quindi
$$P=\frac{4!\cdot 48!}{52!}=\frac{24}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}\simeq 3,69\cdot 10^{-6}\ .$$
Alternativamente, si vede che i modi di estrarre 4 carte da 52, senza stavolta tenere conto dell'ordine, sono $C_{52,4}$, e quindi la probabilità che escano i 4 assi (in un qualunque ordine) è $P=1/C_{52,4}=4!\cdot 48!/52!$.
c) Abbiamo visto in b) che i modi di disporre 52 carte per cui le prime quattro sono assi sono $4!\cdot 48!$. Lo stesso vale se richiediamo che invece siano assi le carte dalla seconda alla quinta, o dalla terza alla sesta, e così via. Siccome la posizione del primo asso varia dalla prima alla quarantanovesima, i modi di disporre 52 carte per cui i quattro assi sono consecutivi sono $4!\cdot 48!\cdot 49=4!\cdot 49!$, e la probabilità cercata è
$$P=\frac{4!\cdot 49!}{52!}=\frac{24}{52\cdot 51\cdot 50}\simeq 1,8\cdot 10^{-4}\ .$$

2. L'equazione in questione è lineare del primo ordine (a coefficienti costanti e non omogenea). La soluzione è data (ad esempio) dalla formula
$$x(t)=e^{-at}\Big(1+\int_0^t ae^se^{as}ds\Big)\ .$$

Quindi

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+a}e^{-at} + \frac{a}{a+1}e^{t} & \text{per } a \neq -1 \\ e^{t}(1-t) & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

Studiandone il limite per $t \to +\infty$ si distinguono le seguenti situazioni: $a < -1$ (il primo esponenziale è dominante), $a = -1$ (soluzione speciale), $-1 < a < 0$ (il secondo esponenziale è dominante). Alla fine si ottiene il seguente schema:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} -\infty & \text{per } a < 0 \\ 1 & \text{per } a = 0 \\ +\infty & \text{per } a > 0. \end{cases}$$

3. Un piano contiene una retta se ne contiene almeno due punti distinti, e quindi s è il piano che contiene i tre punti (a, b, c), $(0, 0, 0)$, e $(0, 0, 1)$. Da ciò si deduce l'equazione

$$bx - ay = 0$$

(che in effetti determina un piano a patto che a e b non siano entrambi nulli, ovvero che P non appartenga all'asse delle z).
La retta r_2 è invece data, in forma parametrica, da $x = 1+t$, $y = -t$, $z = 3t$, ed esplicitando t in funzione di y si ottengono le due equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y + z = 0 \ . \end{cases}$$

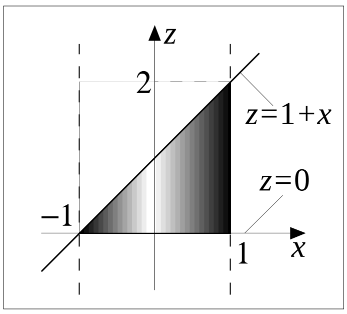
Quindi il sistema che determina le intersezioni di r_2 ed s è

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ x + y = 1 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \quad \text{con matrice completa} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice ridotta è allora $a + b$. Quindi, se $a + b \neq 0$, la matrice ridotta ha rango tre, che non può che coincidere col rango della matrice completa, e quindi abbiamo una soluzione (cioè c'è intersezione). Invece, se $a + b = 0$, il rango della ridotta è due o meno, mentre si vede facilmente che quello della completa è sempre tre (tranne il caso già escluso in cui $a = b = 0$).

4. La proiezione ortogonale di V sul piano xz è descritta nella figura qui sotto. Ne risulta chiaramente che V è la metà di un cilindro retto di altezza 2 e raggio di base 1. Quindi

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{2} \cdot (\text{area di base}) \cdot (\text{altezza}) = \pi.$$



Quinto appello, 20 Dicembre 2000

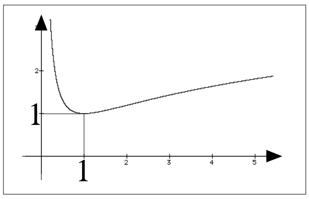
Prima parte.

1. $x \geq 3$ e $-3 \leq x < -1$.
2. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $y = x + 2$.
4. $+\infty$ e 0.
5. 1/2 (cambio di variabile $t = x^2$).
6. $x = e^{-2t}$.
7. 1/4.
8. [*Omesso.*]

Seconda parte.

1. a) Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 5$, e si annulla per $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi la soluzione generale è
$$x = e^{-t}(\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
b) Si tratta di un'equazione lineare non omogenea. Siccome abbiamo già risolto la corrispondente equazione omogenea al punto a), si tratta ora di trovare una soluzione particolare. Nel caso specifico, conviene cercarla tra i polinomi del primo ordine, cioè della forma $x = at + b$. Sostituendo nell'equazione si vede che deve essere $a = 1$, $b = 0$, ovvero $x = t$. La soluzione generale dell'equazione è dunque $x = t + e^{-t}(\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t))$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si ottiene infine
$$x = t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \ .$$

2. a) La funzione è definita per $x > 0$. Essendo $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, f risulta crescente per $x > 1$ e decrescente altrimenti, e dunque $x = 1$ è il punto di minimo assoluto. Essendo $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$, f risulta convessa (risp. concava) per $x < 2$ (risp. per $x > 2$). Infine $f(0^+) = +\infty$, e quindi c'è un asintoto verticale per $x = 0$, mentre $f(+\infty) = +\infty$ e $f'(+\infty) = 0$, e quindi non c'è asintoto per $x \to +\infty$.



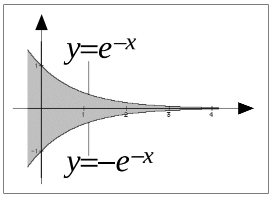
b) Fissato a, si noti che il valore di b cercato corrisponde al minimo (oppure all'estremo inferiore) della funzione
$$f_a(x) = f(x) - ax = \log x + \frac{1}{x} - ax.$$
Si osservi che per $a > 0$, $f_a(+\infty) = -\infty$, per cui $b = -\infty$, ovvero la $(*)$ non è soddisfatta per alcun b finito. Se invece $a = 0$, b è il valore minimo di $f_0 = f$, cioè $f(1) = 1$. Infine, se $a < 0$ si vede che il minimo di f_a si ha per $x_a = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{-2a}$, e quindi $b = f_a(x_a)$.

3. Si ha $\tan x = x + x^2/3$, per cui $x \tan(1/x) - 1 \simeq \frac{1}{3x^2}$ e l'integrale improprio è finito.

PRIMA PARTE.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4} = \dfrac{1}{2}e^{i\pi/6}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Deve essere $\log(x^2-3) \geq 0$, cioè $x^2 - 3 \geq 1$, cioè $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$.
4. 1 e 0 rispettivamente.
5. $e^x - e^{-x}$.
6. Equazione a variabili separabili: $y = \log(x^2 + a)$ con $a \in \mathbb{R}$.
7. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.
8. Si tratta della metà superiore del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

SECONDA PARTE.

1. Usando gli sviluppi di Taylor all'ordine 2 di e^x, $\cos x$ e $\sin x$ si ottiene
$$e^x - \cos x - \sin x = x^2 + O(x^3) \simeq x^2 \ .$$
D'altra parte $\sin x \simeq x$, e per il principio di sostituzione degli infinitesimi abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \ .$$
2. L'insieme S è la parte del piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \pm e^{-x}$ e dall'asse delle y, cioè la zona in grigio nella figura accanto, e
$$\text{Area}(S) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 \ .$$


3. L'equazione $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ è lineare, omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, e si annulla per $\lambda = -1 \pm i$. Quindi la soluzione generale è
$$x = e^{-t}(\alpha \sin t + \beta \cos t) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per risolvere l'equazione non omogenea che appare nel problema di Cauchy basta trovarne una soluzione particolare, e nel caso specifico conviene cercarla tra le funzioni della forma $x = a \sin(2t) + b \cos(2t)$. Sostituendo questa espressione nell'equazione non omogenea si ottiene l'identità
$$(-2a - 4b)\sin(2t) + (4a - 2b)\cos(2t) = \sin(2t) \ ,$$
che è verificata quando $-2a - 4b = -1$ e $4a - 2b = 0$. Risolvendo il sistema otteniamo $a = -1/10$, $b = -1/5$, e quindi la soluzione generale dell'equazione in questione è
$$x = e^{-t}(\alpha \sin t + \beta \cos t) - \frac{1}{10}\sin(2t) + \frac{1}{5}\cos(2t) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si ottiene infine $\alpha = 2/5$ e $\beta = 1/5$, ovvero
$$x = e^{-t}\Big(\frac{2}{5}\sin t + \frac{1}{5}\cos t\Big) - \frac{1}{10}\sin(2t) + \frac{1}{5}\cos(2t) \ .$$

Settimo appello, 11 aprile 2001

Prima parte.

1. $x \geq 2$.
2. $f'(x) = \dfrac{1+2x}{x+x^2}$.
3. $\log(\sin x) + c$.
4. Entrambi 0.
5. $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$.
6. $x = a\cos(2t) + b\sin(2t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $P = \dfrac{1}{36}$.
8. Si tratta del grafico della funzione $y = 1/x$ traslato verso l'alto di 1.

Seconda parte.

1. La matrice ridotta associata al sistema è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix}$$
mentre la matrice completa la si ottiene aggiungendo una colonna di 0, e quindi ha rango sempre uguale a quello della ridotta. Il determinante della ridotta è $2(1-b^2)$; pertanto per $b \neq \pm 1$ la matrice ridotta e la completa hanno rango 3, ed il sistema ammette un'unica soluzione $x = y = z = 0$, mentre per $b = 1$ oppure $b = -1$ le due matrici hanno rango minore di 3, e più precisamente uguale a 2 (basta considerare il minore 2×2 in basso a sinistra), e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni. In particolare per $b = -1$ il sistema si riduce alle due equazioni
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z \text{ qualunque.} \end{cases}$$

2. Far vedere che $\sqrt{x} \geq \log x$ per ogni x positivo equivale a dimostrare che il valore minimo della funzione $f(x) := \sqrt{x} - \log x$ è maggiore o uguale a 0. La derivata di f è
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}.$$
Dunque f risulta crescente per $x \geq 4$, e decrescente per $x < 4$, e quindi $x = 4$ è il punto di minimo assoluto. Pertanto il valore minimo di f è
$$\min_{x>0} f(x) = f(4) = 2(1 - \log 2) \simeq 0,6 > 0 \ .$$

3. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x(t) = a\cos t + b\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare della non omogenea può essere trovata tra i polinomi di secondo grado, ed è $x(t) = t^2$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $x(t) = t^2 + a\cos t + b\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Imponendo infine le condizioni iniziali $x(0) = 2$ ed $\dot{x}(0) = 1$ si ottiene
$$x(t) = t^2 + 2\cos t + \sin t \ .$$

Soluzioni 2000/01

Primo compitino, 10 gennaio 2001

Prima parte, gruppo A.

1. $5/52 \simeq 9,6\%$.
2. Siccome $e^t \geq e$ se e solo se $t \geq 1$, $e^{x^2-2x+1} \geq e$ se e solo se $x^2 - 2x + 1 \geq 1$, ovvero se $x \geq 2$ oppure $x \leq 0$.
3. $\cos(x^4 + x) \cdot (4x^3 + 1)$.
5. $z = \dfrac{3i \pm \sqrt{(-3i)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3i \pm i}{2} = 2i, i$.
6. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{24} = (e^{i\pi/4})^{24} = e^{i6\pi} = 1$.
7. $x \geq 1,41$ oppure $-1,41 \leq x \leq 0$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse y e traslato in basso di 1.

Prima parte, gruppo B.

1. $5/40 = 12,5\%$.
2. $x \geq 0$ oppure $x \leq -2$.
3. $-2x \cdot \sin(x^2 + 2)$.
4. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, ovvero $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.
5. $z = \dfrac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{-3i \pm i}{2} = -2i, -i$.
6. $(1 + i)^{24} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{24} = 2^{12}e^{i6\pi} = 2^{12} = 4096$.
7. $x \leq -1,41$ oppure $0 \leq x \leq 1,41$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato a destra di $\pi/2$.

Prima parte, gruppo C.

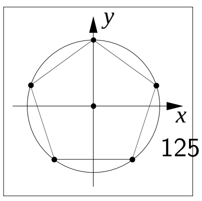
1. $10/40 = 1/4 = 25\%$.
3. $e^{x^3+\sin x}(3x^2 + \cos x)$.
2. $x \geq 0$ oppure $x \leq -2$.
4. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, ovvero $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
5. $z = \dfrac{5i \pm \sqrt{(-5i)^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5i \pm i}{2} = 3i, 2i$.
6. $(1 + i)^{-24} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{-24} = 2^{-12}e^{-i6\pi} = 2^{-12} = \dfrac{1}{4096}$
7. $x \geq 0$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato a sinistra di $\pi/2$, ovvero del grafico di $\cos x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. b) La retta passa per l'origine, ed ha dunque un'equazione del tipo $y = m_t x$. Passa inoltre per il punto di coordinate $(t, f(t))$, e quindi il coefficiente angolare m_t è $f(t)/t$. Questa retta risulta tangente se il coefficiente angolare coincide con la derivata di f nel punto t, ovvero se $f'(t) = f(t)/t$, cioè $f'(t) - f(t)/t = 0$, e dividendo per t
$$0 = \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2} = \left(\frac{f(t)}{t}\right)' .$$
Alternativamente, si può osservare che i punti di tangenza corrispondono a punti di massimo o minimo locale del coefficiente angolare m_t, ovvero punti in cui si annulla la derivata di m_t rispetto a t, e siccome $m_t = f(t)/t$ abbiamo dimostrato la tesi.
a) Se $f(t) = e^{t^4}$, la condizione $tf'(t) - f(t) = 0$ diventa $t \cdot e^{t^4} 4t^3 = e^{t^4}$, ovvero, essendo l'esponenziale sempre diverso da zero, $4t^4 = 1$, cioè $t = \pm 1/\sqrt{2}$. Questo sono i punti di tangenza cercati.

2. a) Tutti i modi di estrarre tre carte da un mazzo di 40 senza tener conto dell'ordine sono $C_{40,3} = \binom{40}{3} = 9880$. Il modi di estrarne due carte di cuori ed una non di cuori, sono invece dati dal prodotto di $C_{10,2} = \binom{10}{2} = 45$ (modi di estrarre due carte tra le 10 di cuori) per $C_{30,1} = \binom{30}{1} = 30$ (modi di estrarre una carta tra le 30 non di cuori). La probabilità cercata è
$$P = \frac{C_{10,2} \cdot C_{30,1}}{C_{40,3}} = \frac{135}{988} \simeq 0,1366 \simeq 14\% .$$
Alternativamente possiamo calcolare questa probabilità tenendo conto dell'ordine. In tal caso, i modi di estrarre tre carte sono $D_{40,3} = 40{\cdot}39{\cdot}38 = 59280$, Viceversa, i modi di estrarre tre carte in modo tale che la prima e la seconda siano di cuori è $D_{10,2}{\cdot}D_{30,1} = 10{\cdot}9{\cdot}30 = 2700$. Questo numero va poi moltiplicato per il numero di possibili scelte per le posizioni delle due carte di cuori, e cioè $C_{3,2} = 3$ (prima e seconda, prima e terza, seconda e terza), e come prima $P = \frac{2700 \cdot 3}{59280} = \frac{135}{988}$.
b) Rispetto al caso precedente, dobbiamo aggiungere i casi in cui le carte sono tutte di cuori. Dunque
$$P = \frac{C_{10,2} \cdot C_{30,1} + C_{10,3}}{C_{40,3}} = \frac{1350 + 120}{9880} \simeq 0,1488 \simeq 15\% .$$
c) Estendendo il ragionamento del caso precedente si ha:
$$P = \frac{C_{10,k} \cdot C_{30,n-k} + C_{10,k+1} \cdot C_{30,n-k-1} + \cdots + C_{10,10} \cdot C_{30,0}}{C_{40,n}} = \frac{\sum_{h=k}^{n} \binom{10}{h}\binom{30}{n-h}}{\binom{40}{n}}$$

3. Scrivo l'incognita z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$. Dunque $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, e siccome $i = e^{i\pi/2}$, l'equazione diviene $(\rho e^{i\theta})^4 = e^{i\pi/2} \rho e^{-i\theta}$, ovvero $\rho^4 e^{i4\theta} = \rho e^{i(\pi/2 - \theta)}$, che si riduce al sistema
$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho(\rho^3 - 1) = 0 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0, 1 \\ \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases} .$$
Per $\rho = 0$, l'unica soluzione corrisponde a $z = 0$. Per $\rho = 1$, essendo $2\pi/5$ un quinto di angolo giro, mi basta prendere $k = 0, 1, 2, 3, 4$, ed ottengo dunque i vertici di un pentagono regolare inscritto nel cerchio di



raggio 1 e centro l'origine (figura accanto) ed in particolare, per $k = 1$ ottengo $\theta = \pi/2$.

4. I numeri della successione sono $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10\ldots$ Siccome ad ogni passo aggiungo 3, il numero k-esimo sarà dato da $x_k = x_1 + (k-1)\cdot 3 = 3k-2$. Allora, ricordando che la somma dei primi n interi è data da $n(n+1)/2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} 3k - 2 = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2 = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{(3n-1)n}{2} \ .$$

Altrimenti, si può seguire il suggerimento e cercare una formula del tipo $S_n = an^2 + bn + c$. Per determinare i coefficienti a, b, c, imponiamo che la formula funzioni per $n = 1, 2, 3$, ottenendo le tre equazioni

$$\begin{cases} S_1 = 1 = a + b + +c \\ S_2 = 5 = 4a + 2b + c \\ S_3 = 12 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $a = 3/2$, $b = -1/2$, $c = 0$, ovvero $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$. Per dimostrare che questa formula vale per tutti gli n, e non solo per $n = 1, 2, 3$, si procede per induzione. Per $n = 1$ è certamente vera. Supponiamola dunque vera per n generico, ovvero $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$, ed aggiungiamo $x_{n+1} = 3n + 2$ a ciascun membro dell'identità. Così facendo otteniamo

$$S_{n+1} = \frac{3n^2 - n}{2} + (3n + 2) \ .$$

Ma il termine a sinistra è effettivamente uguale a $\frac{1}{2}\big(3(n+1)^2 - (n+1)\big)$ e quindi la dimostrazione è completa.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. La parte b) è uguale al gruppo A, e per la parte a) si procede comunque in maniera analoga: se $f(t) = 1 + \frac{1}{2}t^3$, la condizione di tangenza diventa $t \cdot \frac{3}{2}t^2 = 1 + \frac{1}{2}t^3$, ovvero $t^3 = 1$, ovvero $t = 1$.

2. Si risolve come per il gruppo A, con minime variazioni:

a) $$P = \frac{C_{13,3} \cdot C_{39,1}}{C_{52,4}} = \frac{286 \cdot 39}{270725} \simeq 0,0412 \simeq 4,1\% \ ;$$

b) $$P = \frac{C_{13,3} \cdot C_{39,1} + C_{13,4}}{C_{52,4}} = \frac{286 \cdot 39 + 715}{270725} \simeq 0,0438 \simeq 4,4\% \ ;$$

c) $$P = \frac{\sum_{h=k}^{n} C_{13,h} \cdot C_{39,n-h}}{C_{52,n}} \ .$$

3. Si procede come per il gruppo A, scrivendo z come $z = \rho e^{i\theta}$. L'equazione diviene $\rho^4 e^{i4\theta} = \rho e^{i(\pi/2+\theta)}$, che si riduce al sistema

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 0, 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \ .$$

Dunque le soluzioni sono $z = 0$, $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = -i$. In particolare le ultime tre costituiscono i vertici di un triangolo equilatero iscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 con punta rivolta verso il basso (il vertice $-i$).
Alternativamente, si osservi che $z = 0$ è soluzione, e se $z \neq 0$, allora possiamo semplificare l'equazione, che diventa $z^3 = i$: vanno dunque aggiunte le radici cubiche di i.

4. Si procede come per il gruppo A: i numeri della successione sono $x_k = 4k - 3$, mentre $S_n = n(2n - 1)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. La parte b) è uguale al gruppo A, e per la parte a) si procede comunque in maniera analoga: se $f(t) = t^2 + 1$, la condizione di tangenza diventa $t \cdot 2t = t^2 + 1$, ovvero $t^2 = 1$, cioè $t = \pm 1$.
2. Si risolve come per il gruppo A, con minime variazioni:

a) $$P = \frac{C_{13,2} \cdot C_{39,1}}{C_{52,3}} = \frac{78 \cdot 39}{22100} \simeq 0,1376 \simeq 13,8\% \ ;$$

b) $$P = \frac{C_{13,2} \cdot C_{39,1} + C_{13,3}}{C_{52,3}} = \frac{78 \cdot 39 + 286}{22100} \simeq 0,1505 \simeq 15\% \ ;$$

c) $$P = \frac{\sum_{h=k}^{n} C_{13,h} \cdot C_{39,n-h}}{C_{52,n}} \ .$$

3. Si procede come per il gruppo A, scrivendo z come $z = \rho e^{i\theta}$. L'equazione diviene $\rho^4 e^{-i4\theta} = \rho e^{i(\pi/2+\theta)}$, che si riduce al sistema

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ -4\theta = \frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 0, 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases} .$$

Dunque le soluzioni sono $z = 0$, ed i vertici di un pentagono regolare iscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 con punta rivolta verso l'alto (la soluzione $z = i$). Il disegno corrisponde a quello del gruppo A, riflesso rispetto all'asse delle x.

4. Si procede come per il gruppo A: i numeri della successione sono $x_k = 4k - 2$, mentre $S_n = 2n^2$.

Secondo compitino, 2 aprile 2001

Prima parte, gruppo A.

1. $x > 0$.
2. $f'(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)$.
3. $\log(\sin x) + c$.
4. 0 e $+\infty$ rispettivamente.
5. $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$.
6. $(-1+i)^4 = (\sqrt{2}e^{3\pi i/4})^4 = 4e^{3\pi i} = -4$.
7. $P = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36} \simeq 2{,}78\%$.
8. [*Omesso.*]

Prima parte, gruppo B.

1. $-1 \leq x \leq 1$.
2. $f'(x) = \dfrac{1+2z}{x+x^2}$.
3. $\dfrac{x^2}{4}(2\log x - 1) + c$.
4. 0 e 1 rispettivamente.
5. $\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.
6. $(1-i)^{-8} = (\sqrt{2}e^{-\pi i/4})^{-8} = \dfrac{1}{16}e^{2\pi i} = \dfrac{1}{16}$.
7. $P = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} = 12{,}5\%$.
8. [*Omesso.*]

Prima parte, gruppo C.

1. $-1 \leq x \leq 0$ oppure $x \geq 1$.
2. $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
3. $\dfrac{x^3}{9}(3\log x - 1) + c$.
4. 0 entrambi.
5. $\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.
6. $(1-i)^{-4} = (\sqrt{2}e^{-\pi i/4})^{-4} = \dfrac{1}{4}e^{\pi i} = -\dfrac{1}{4}$.
7. $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16} = 6{,}25\%$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso l'alto di 1.

SECONDO COMPITINO, 2 APRILE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. $x \geq 1$.
2. $f'(x) = (1 + 2x^2)e^{(x^2)}$.
3. $-\log(cosx) + c$.
4. 0 e $+\infty$.
5. $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$.
6. $(-1 + i)^6 = (\sqrt{2}e^{-3\pi i/4})^6 = 8e^{-9\pi i/2} = 8e^{-\pi i/2} = -8i$.
7. $P = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36} \simeq 2,78\%$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato verso sinistra di π, ovvero del grafico di $-\sin x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. La matrice ridotta del sistema è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$
ed ha determinante $2(1 - a^2)$. Siccome la matrice completa si ottiene aggiungendo una colonna di zeri, ha sempre lo stesso rango di quella incompleta. Per $a \neq \pm 1$ questo rango è 3, e si ha quindi una sola soluzione $x = y = z = 0$, mentre per $a = \pm 1$ il rango è 2 (basta osservare che il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante 2) e dunque si hanno ∞^1 soluzioni. In particolare, per $a = -1$ il sistema si riduce alle sole due equazioni $x + y + z = 1$ e $x - y - z = 0$ e
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -z, \\ z \text{ arbitrario.} \end{cases}$$

2. Cominciamo direttamente con la parte b). Richiedere che la disequazione $2a\sqrt{x} \geq \log x$ valga per ogni x positivo equivale a richiedere che il valore minimo della funzione $f(x) := 2a\sqrt{x} - \log x$ sia maggiore o uguale a 0. Non resta che trovare questo valore minimo. La derivata di f è
$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{a\sqrt{x} - 1}{x},$$
e dunque il segno è determinato dal numeratore (perché $x > 0$). Ponendo $a\sqrt{x} - 1 \geq 0$ si ottiene $\sqrt{x} \geq 1/a$ ovvero $x \geq 1/a^2$. Dunque f risulta crescente per $x \geq 1/a^2$, e decrescente per $x < 1/a^2$, e quindi $x = 1/a^2$ è il punto di minimo assoluto. Pertanto il valore minimo di f è
$$\min_{x>0} f(x) = f(1/a^2) = 2 - \log(1/a^2) = 2(1 + \log a),$$
che è maggiore o uguale a zero per $a \geq 1/e \simeq 0,368$. Prendendo $a = 1/2$ si ottiene la disuguaglianza $\sqrt{x} \geq \log x$.

3. Usando gli sviluppi di Taylor (per $t \to 0$) $e^t = 1 + t + O(t^2)$ e $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(x^3 - 8x^2)} - \cos(4x) \\ &= \big[1 + (-8x^2 + x^3) + O((-8x^2 + x^3)^2)\big] - \big[1 - (4x)^2/2 + O((4x)^4)\big] \\ &= \big[1 - 8x^2 + x^3 + O(x^4)\big] - \big[1 - 8x^2 + O(x^4)\big] \\ &= x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

e quindi la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è x^3.

4. I modi di scegliere 4 mucche tra le 10 dell'allevamento sono (se non si tiene conto dell'ordine) $\binom{10}{4}$. Se però della scelta devono fare parte le due povere mucche pazze, allora il numero delle scelte possibili si riduce al numero di modi di scegliere le restanti 2 mucche tra le 8 sane, e cioè $\binom{8}{2}$. La probabilità che ci interessa diventa dunque

$$P = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15} \simeq 13,3\%.$$

5. Dimostriamo le identità (P_n) per induzione su $n = 1, 2, \ldots$. Per $n = 1$ abbiamo $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ che è ovviamente vera. Supponiamo ora che la (P_n) sia vera e cerchiamo di dedurne la (P_{n+1}). Per fare ciò, aggiungiamo $1/(2^{n+1})$ ad entrambe i membri della (P_n), vale a dire

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Così facendo il termine di sinistra dell'uguaglianza è diventato il termine di sinistra della (P_{n+1}), e si verifica facilmente che il termine di destra è uguale a $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, che è proprio il termine di destra della (P_{n+1}).

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Si procede come per il gruppo A. La matrice ridotta del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 4 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante $a^2 - 3a + 2 = (a - 2)(a - 1)$. Per $a \neq 1, 2$, $x = y = z = 0$ è l'unica soluzione del sistema, mentre per $a = 1, 2$ si hanno ∞^1 soluzioni. In particolare, per $a = 2$ le soluzioni sono le stesse che per il gruppo A.

2. b) Si procede come per il gruppo A, determinando il valore minimo della funzione $f(x) := 3a\sqrt[3]{x} - \log x$. Studiandone la derivata si vede che $x = 1/a^3$ è il punto di minimo assoluto di f, e pertanto

$$\min_{x>0} f(x) = f(1/a^3) = 3 - \log(1/a^3) = 3(1 + \log a),$$

che è maggiore o uguale a zero per $a \geq 1/e \simeq 0,368$. La parte a) dell'esercizio segue prendendo $a = 1$.

3. Usando lo sviluppo $\sin t = t + O(t^3)$ si ottiene
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2+x^3) - \sin^2 x \\ &= \big[(x^2+x^3) - O((x^2+x^3)^3)\big] - \big[x + O(x^3)\big]^2 \\ &= \big[(x^2+x^3 - O(x^6)\big] - \big[x^2 + O(x^4)\big] = x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

4. Come per il gruppo A: $P = \dfrac{\binom{9}{1}}{\binom{12}{4}} = 9 \cdot \dfrac{4! \cdot 8!}{12!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \dfrac{1}{55} \simeq 1,82\%.$

5. [*Omesso.*]

Seconda parte, gruppo C.

1. Si procede come per il gruppo A. La matrice ridotta del sistema è
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$
ed ha determinante $-2a^2+8a-6 = -2(a-3)(a-1)$. Per $a \neq 1,3$, $x=y=z=0$ è l'unica soluzione del sistema, mentre per $a = 1,3$ si hanno ∞^1 soluzioni. Per $a=1$ le soluzioni sono
$$\begin{cases} x \text{ arbitrario}, \\ y = -x, \\ z = 0. \end{cases}$$

2. La parte b) è identica a quella del gruppo B, mentre la parte a) segue dalla b) prendendo $a = 2/5$.

3. Si procede come per il gruppo B, ottenendo $f(x) = x^3 + O(x^4)$.

4. Come per il gruppo A: $P = \dfrac{\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7 \cdot \dfrac{4! \cdot 6!}{10!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{30} \simeq 3,33\%.$

5. [*Omesso.*]

Seconda parte, gruppo D.

1. Si procede come per il gruppo A. La matrice ridotta del sistema è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & 1 \\ a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$
ed ha determinante $2a^3 - 2a = 2a(a-1)(a+1)$. Per $a \neq \pm 1$, $x=y=z=0$ è l'unica soluzione del sistema, mentre per $a = \pm 1$ si hanno ∞^1 soluzioni. Per $a=-1$ le soluzioni sono le stesse del gruppo A.

2. La parte b) è identica a quella del gruppo A, mentre la parte a) segue dalla b) prendendo $a = 2/5$.

3. Si procede come per il gruppo A, ottenendo $f(x) = x^3 + O(x^4)$.

4. Come per il gruppo A: $P = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \dfrac{5! \cdot 5!}{10!} = \dfrac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \dfrac{2}{9} \simeq 22,2\%.$

5. [*Omesso.*]

Prima parte, gruppo A.

1. $x \geq 0$.
2. $(1+\sqrt{3}i)^{10} = (2e^{\pi i/3})^{10} = 2^{10}e^{10\pi i/3} = 2^{10} \cdot e^{-2\pi i/3} = -2^9(1+\sqrt{3}i)$.
3. $e^{\sin x} + c$.
4. $+\infty$ e 1 rispettivamente.
5. $(1,2,3) \times (1,2,0) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -6i + 3j = (-6,3,0)$.
6. Le soluzioni di $\dot{x} - 3x = 0$ sono $x = ae^{3t}$ con $a \in \mathbb{R}$, e la condizione $x(0) = 1$ implica $x = e^{3t}$.
7. Ovviamente il numero di volte che si lancia il dado non è rilevante: la probabilità che tirando un dado esca un numero dispari è sempre $P = 3/6 = 50\%$.
8. [*Omesso.*]

Prima parte, gruppo B.

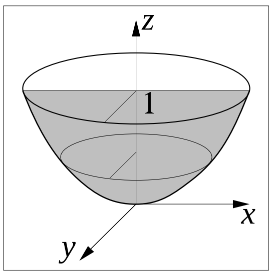
1. $1 \leq x \leq 2$.
2. $(1-\sqrt{3}i)^{10} = (2e^{-\pi i/3})^{10} = 2^{10}e^{-10\pi i/3} = 2^{10} \cdot e^{2\pi i/3} = 2^9(-1+\sqrt{3}i)$.
3. $(\sin x)^6 + c$.
4. 0 e $+\infty$ rispettivamente.
5. $(1,0,2) \times (2,1,3) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -2i + j + k = (-2,1,1)$.
6. Le soluzioni di $\dot{x} + 5x = 0$ sono $x = ae^{-5t}$ con $a \in \mathbb{R}$, e la condizione $x(0) = 1$ implica $x = e^{-5t}$.
7. Ovviamente il numero di volte che si lancia il dado non è rilevante: la probabilità che tirando un dado esca un numero pari è sempre $P = 3/6 = 50\%$.
8. Si tratta della circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 2.

Seconda parte, gruppo A.

1. a) Se fissiamo $z \in (0.1]$, la disequazione $x^2 + y^2 \leq z$ descrive un cerchio (pieno!) di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{z}$, che ha dunque area πz. Pertanto il volume di S è dato da

$$\text{volume}\,(S) = \int_0^1 [\text{area della sezione di } S \text{ ad altezza } z]\, dz = \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{\pi}{2}.$$

b) Siccome S è un solido di rotazione rispetto all'asse z, per disegnarlo basta capire com'è fatta l'intersezione di S con il piano xz (o con un qualunque altro piano che contiene l'asse z). L'intersezione con questo piano si ottiene imponendo $y = 0$ nella disequazione che definisce S, vale a dire $x^2 \leq z$. Questa disequazione descrive una parabola, ed infatti S è un esempio di paraboloide di rotazione (figura accanto).



c) Si procede come per il punto a): per $z \in (0.1]$, la disequazione $\alpha x^2 + (2-\alpha)y^2 \leq z$ può essere riscritta come

$$\frac{x^2}{z/\alpha} + \frac{y^2}{z/(2-\alpha)} \leq 1$$

e dunque descrive un'ellisse di semiassi $\sqrt{z/\alpha}$ e $\sqrt{z/2-\alpha}$, che ha area $\pi z/\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$. Pertanto il volume di S è dato da

$$\text{volume}\,(S) = \int_0^1 [\text{area della sezione di } S \text{ ad altezza } z]\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(2-\alpha)}}.$$

Per trovare ora il valore di α (compreso tra 0 e 2) che minimizza questo volume, si può derivare l'espressione $1/\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$. Altrimenti, si può osservare che questo α è quello che massimizza la funzione $\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$, o, equivalentemente, il suo quadrato $\alpha(2-\alpha)$. Ma quest'ultima funzione descrive una parabola rivolta verso il basso, che raggiunge il valore massimo in $\alpha = 1$.

2. a) L'equazione $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ è lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, che si annulla per $\lambda = -1 \pm i$. Quindi la soluzione generale è
$$x(t) = e^{-t}(\alpha \sin t + \beta \cos t) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
b) L'equazione $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$ è del secondo ordine non omogenea, e siccome la corrispondente equazione omogenea è stata risolta al punto a), basta trovare una soluzione particolare. Poiché il termine noto è l'esponenziale e^{-t} (che non è soluzione dell'equazione omogenea) proviamo a cercare una soluzione particolare della forma $\bar{x} = ae^{-t}$ con $a \in \mathbb{R}$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $(a - 2a + 2a)e^{-t} = e^{-t}$, identità che è verificata solo per $a = 1$. Dunque la soluzione generale è
$$x(t) = e^{-t}(1 + \alpha \sin t + \beta \cos t) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
ed imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ si ottiene $\beta = -1$ e $\alpha = 1$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è
$$x(t) = e^{-t}(1 + \sin t - \cos t).$$

3. a) Un vettore ortogonale al piano π è $(1,2,3)$, e quindi r è rappresentata in forma parametrica da $(x,y,z) = (1,2,3)t$, con $t \in \mathbb{R}$.
b) Sostituisco i valore di x, y, z nell'equazione di π con quelli della rappresentazione parametrica di r, ottenendo l'equazione $t + 4t + 9t = 7$, che ha soluzione $t = 1/2$. Dunque il punto di intersezione cercato è $(1/2, 1, 3/2)$.
c) La retta s può essere scritta in forma parametrica come $(x,y,z) = (1,2,1/2)t + (0,-4,-1)$ (basta esplicitare y e z in funzione di x e poi porre $x = t$), e quindi passa per il punto $(0,-4,-1)$ ed ha vettore direttore $(1,2,1/2)$. Per verificare se s ed r sono complanari, baste vedere se i due vettori direttori (rispettivamente $(1,2,3)$ e $(1,2,1/2)$) ed il vettore congiungente due punti a caso delle due rette (ad esempio $(0,0,0)$ e $(0,-4,-1)$) risultano linearmente dipendenti. Calcoliamo dunque il determinante
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} = -10.$$

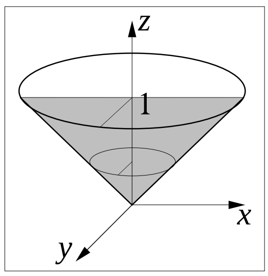
Siccome questo determinante non è nullo, i tre vettori in questione sono linearmente indipendenti, e quindi le due rette non sono complanari ma sghembe.

4. La funzione $f(x) := e^{x/2} - x$ ha derivata
$$f'(x) = \frac{e^{x/2} - 2}{2}$$
che risulta negativa per $x < 2\log 2$ e positiva altrimenti. Quindi $x = 2\log 2$ è il punto di minimo assoluto di f, ed il valore minimo di f è $f(2\log 2) = 2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2)$ che è positivo. Quindi f è sempre positiva, e la disuguaglianza $e^{x/2} \geq x$ vale per ogni x.
b) Se si considera invece la funzione $f(x) := e^{x/2} - 2x$, il punto di minimo assoluto è $x = 4\log 2$, ed il valore minimo di f è $f(4\log 2) = 4 - 8\log 2 = 4(1 - 2\log 2)$ che invece è negativo. Quindi f non è sempre positiva, e la disuguaglianza $e^{x/2} \geq 2x$ non è sempre verificata.

5. a) I modi di ordinare 40 carte sono 40!.
b) Tra tutti questi ordinamenti, quelli le cui prime tre carte sono le tre suddette (in quel dato ordine) sono dati dai modi di ordinare le rimanenti 37, ovvero 37!, per cui
$$P = \frac{37!}{40!} = \frac{1}{40 \cdot 39 \cdot 38} \simeq 1,687 \cdot 10^{-5}.$$
Alternativamente si può ottenere lo stesso risultato osservando che la probabilità che la prima carta estratta sia l'asso di quadri è $1/40$, quella che la seconda sia il due di quadri è $1/39$, ed infine quella che la terza sia il tre di quadri è $1/38$.
c) Se non si prescrive l'ordine in cui le tre carte devono uscire, allora la probabilità calcolata prima va moltiplicata per le possibili permutazioni delle tre carte, e cioè per 6, ovvero
$$P = \frac{6}{40 \cdot 39 \cdot 38} \simeq 1,012 \cdot 10^{-4}.$$
Altrimenti si osservi che la probabilità che la prima carta estratta sia una delle tre assegnate è $3/40$, quella che la seconda sia una delle due rimanenti è $2/39$, ed infine quella che la terza sia l'unica rimasta è $1/38$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. a) Come per il gruppo A, solo che la disequazione $x^2 + y^2 \leq z^2$ descrive un cerchio di raggio z, e quindi
$$\text{volume}\,(S) = \int_0^1 \pi z^2\, dz = \frac{\pi}{3}.$$
b) Procedendo come per il gruppo A si vede che l'intersezione di S con il piano xz è definita dalla disequazione $y^2 \leq z^2$, ovvero $z \geq |y|$. Si tratta dunque di un cono (figura accanto).
c) Si procede come per il gruppo A.



2. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea è $x(t) = e^t(\alpha \sin t + \beta \cos t)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
b) Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $\bar{x} = e^{-t}$, e quindi la soluzione generale è $x(t) = e^{-t} + e^t(\alpha \sin t + \beta \cos t)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ si ottiene $\beta = -1$ e $\alpha = 3$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è $x(t) = e^{-t} + e^t(3 \sin t - \cos t)$.

3. a) Come il gruppo A: r è rappresentata in forma parametrica da $(x, y, z) = (2, 5, 1)t$, con $t \in \mathbb{R}$. b) Il punto di intersezione tra r e π si ha per $t = 4/15$, ovvero è $(8/15, 4/3, 4/15)$. c) le due rette sono sghembe.

4. [*Come il gruppo A.*]

5. b) $P = \dfrac{36!}{40!} = \dfrac{1}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} \simeq 4,55 \cdot 10^{-7}$; c) $P = \dfrac{24}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} \simeq 1,09 \cdot 10^{-5}$.

SECONDO APPELLO, 3 LUGLIO 2001

PRIMA PARTE.

1. $2^{2000} > 10^{300} > 100^{100}$. Infatti $100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200}$, mentre $2^{2000} = (2^{10})^{200} = 1024^{200} > 1000^{200} = 10^{600}$.
2. Vera, falsa, vera.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \log 2 - \log 1 = \log 2.$
4. $x \le 1$, oppure $2 \le x \le 3$, oppure $x \ge 4$.
5. $a = -1$. Sostituendo infatti $x = t^a$ nell'equazione $\dot{x} + x^2 = 0$ si ottiene $at^{a-1} + t^{2a}) \equiv 0$, ovvero $a + t^{a+1} \equiv 0$, identità che è verificata se (e solo se) $a = -1$.
6. Equazione a variabili separabili: $\dfrac{\dot{x}}{1+x^2} = 2t$, $\arctan x = t^2 + c$, $x = \tan(t^2 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.
7. Il rango della matrice è 2. Infatti il determinante è 0, mentre il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante diverso da 0.
8. Ovviamente $4x^5$.

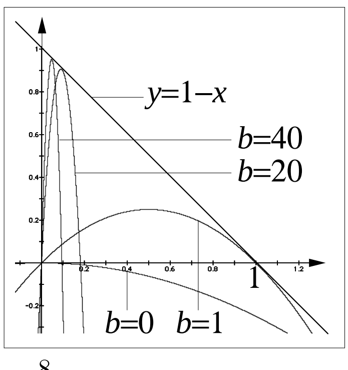
SECONDA PARTE.

1. Se deriviamo la prima equazione otteniamo $\ddot{x} = \dot{y}$, e sostituendo nella seconda si ottiene $\ddot{x} = -x$, ovvero $\ddot{x} + x = 0$, che ha soluzione generale $x(t) = a\cos t + b\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Ritornando all'equazione $y = \dot{x}$ otteniamo allora quindi $y(t) = b\cos t - a\cos t$.
2. a) La parabola in questione ha la concavità rivolta verso il basso, ed interseca l'asse delle x in 0 e b/a. L'area cercata è dunque data da

$$\text{Area} = \int_0^{b/a} (-ax^2 + bx)\,dx = \frac{b^3}{6a^2}\ .$$

b) La parabola $y = -ax^2 + bx$ e la retta $y = 1 - x$ si intersecano nel punto x se i valori delle due funzioni (in x) coincidono, e sono tangenti se anche i valori delle derivate coincidono. Deve quindi essere soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} -ax^2 + bx = 1 - x \\ -2ax + b = -1\ . \end{cases}$$



Dalla seconda equazione si ottiene che il punto di tangenza deve essere $x = \frac{b+1}{2a}$; sostituendo poi questo valore nella prima equazione si ottiene che a e b devono soddisfare la relazione $-a\big(\frac{b+1}{2a}\big)^2 + b\frac{b+1}{2a} = 1 - \frac{b+1}{2a}$ ovvero

$$a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

e dunque si ha tangenza solo per $a = (b+1)^2/4$. Nella figura qui accanto sono riportati i casi $b = 0$, 1, 20, 40.

c) Per le parabole descritte al punto b) l'area cercata vale $A(b) = \dfrac{8}{3}b^3(b+1)^{-4}$ ed ha derivata

$$A'(b) = \frac{8}{3}b^2(b+1)^{-5}(3-b)\ .$$

Studiandone il segno in $(0, +\infty)$ si vede che A cresce per $b < 3$ e decresce per $b > 3$. Dunque il massimo assoluto di A viene raggiunto per $b = 3$.

3. La matrice incompleta associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & a+2 & a \\ -1 & 3+a & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-(a-3)(a+2)$. Dunque per $a \neq 3, -2$ la matrice incompleta ha rango 3 come la matrice completa, ed il sistema ammette una ed una sola soluzione (che si può ottenere, ad esempio, applicando l'inversa della matrice incompleta al vettore $(-1, 0, 1)$ dei termini noti). Per $a = 3$ la matrice incompleta ha rango strettamente inferiore a 3 mentre la completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e si verifica facilmente che il determinante del minore 3×3 che si ottiene eliminando la seconda colonna è non nullo. Dunque la matrice completa ha rango 3, e quindi non ci sono soluzioni. Per $a = -2$ il discorso è analogo: la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e il determinante del minore 3×3 che si ottiene eliminando la prima colonna è non nullo, e come prima non ci sono soluzioni.

4. Un punto generico sul grafico della funzione f ha coordinate $(x, f(x))$, ovvero, nel caso specifico $\big(x, 2(1+x^2)^{-1}\big)$. Pertanto la sua distanza dall'origine è la radice quadrata della funzione

$$g(x) := x^2 + 4(1+x^2)^{-1} \ ,$$

e per trovarne il punto di minimo studiamo la derivata di g

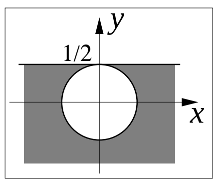
$$g'(x) = 2x + 4(-2)(1+x^2)^{-3}2x = 2x(1+x^2)^{-3}\big((1+x^2)^3 - 8\big) \ .$$

Il segno del primo fattore è ovvio, quello del secondo è sempre positivo, mentre quello del terzo lo otteniamo studiando la disequazione $(1+x^2)^3 - 8 \geq 0$, e cioè

$$(1+x^2)^3 \geq 8 \ , \quad 1+x^2 \geq 2 \ , \quad x^2 \geq 1 \ , \quad x \geq 1 \text{ e } x \leq -1.$$

Mettendo insieme questi risultati si ottiene che $g'(x)$ è positiva per $-1 \leq x \leq 0$ e $x \geq 1$, e negativa altrimenti e quindi si vede che g ha minimo assoluto per $x = \pm 1$ (si ricordi che g è una funzione pari).

5. La disequazione $|z| \geq 1/2$ ha come soluzione l'insieme dei punti z la cui distanza dell'origine è maggiore di $1/2$, ovvero il complementare del cerchio di centro l'origine e raggio $1/2$. La disequazione $|z| \leq |z - i|$ ha come soluzione l'insieme dei punti z la cui distanza dell'origine è inferiore a quella dal punto i, cioè il punto di coordinate $(0, 1)$, e si tratta quindi del semipiano limitato superiormente dalla retta $y = 1/2$. L'intersezione delle due soluzioni è disegnata in grigio nella figura accanto.



TERZO APPELLO, 10 SETTEMBRE 2001

PRIMA PARTE.

1. Deve essere $1 - \log x \geq 0$, ovvero $1 \geq \log x$, ovvero $e \geq x > 0$.
2. $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ ha soluzione $\lambda = -2 \pm i$, e quindi $x = e^{-2t}(a\cos t + b\sin t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Big| - xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = \Big| - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$
4. $+\infty$ e 1 rispettivamente.
5. La matrice è invertibile per tutti i valori di a, e l'inversa è $\dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
6. Cerco una soluzione della forma $x = ae^{-t}$, e trovo che deve essere $a = 1/5$, ovvero $x = \frac{1}{5}e^{-t}$.
7. Ad esempio si può prendere $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato a sinistra di π (ovvero il grafico di $-\sin x$) e quindi traslato in alto di 1.

SECONDA PARTE.

1. a) Se estraiamo le carte una ad una, la prima può essere qualunque, mentre la seconda deve essere dello stesso colore della prima, cosa che si verifica in 12 casi su 51 (tra le 51 carte rimaste, 12 sono quelle dello stesso colore di quella estratta). Per la terza carta, la probabilità di avere lo stesso colore si abbassa a 11/50 e così via. Dunque

$$P_a = \frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{9}{48} = \frac{33}{16660} \simeq 0,2\% \ .$$

a-bis) Alternativamente, si può osservare che i possibili modi di scegliere 5 carte tra 52 (senza tener conto dell'ordine) sono $C_{52,5} = \binom{52}{5}$, mentre i modi di scegliere 5 carte tra le 13 di un dato colore sono $C_{13,5} = \binom{13}{5}$, e 4 sono i colori: quindi

$$P_a = \frac{4\cdot\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} = \cdots$$

b) Ragionando come in a) troviamo che la probabilità che, estraendo 5 carte, le prime 4 abbiano lo stesso colore e la quinta no è

$$\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{39}{48}\ ;$$

questa probabilità va a sua volta moltiplicata per 5, ovvero per le possibili posizioni che può assumere la carta "sbagliata". Quindi

$$P_b = 5\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{39}{48} = \frac{143}{3332} \simeq 4,3\% \ .$$

c) Ragionando come in a-bis), vediamo che, se non teniamo conto dell'ordine, i modi di estrarre 5 carte di cui 4 sono gli assi sono equivalenti ai modi diestrarre la carte rimanente, e cioè 48. Dunque

$$P_c = \frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{48\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} = \frac{1}{54145} \simeq 1,85\cdot 10^{-5}\ .$$

d) Basta moltiplicare il risultato di c) per 13 (i diversi tipi di poker):

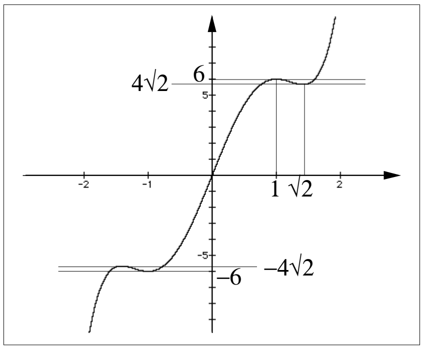
$$P_d = 13 \cdot P_c = \frac{1}{4165} \simeq 0,024\% \ .$$

e) procediamo com in a-bis): se scegliamo un valore, le possibili coppie di quel valore sono (se non si tiene conto dell'ordine) $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$, e 13 è il numero dei valori possibili, per cui i modi di scegliere una coppia sono $13 \cdot 6$. Similmente, se scegliamo un valore tra i 12 rimanenti, i possibili tris di quel valore sono $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$. Quindi i modi di scegliere una coppia ed un tris (senza tener conto dell'ordine) sono $13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4$, e dunque

$$P_e = \frac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \simeq 0,14\% \ .$$

2. a) Mettendo a sistema le equazioni della retta r e quella del piano p, si vede facilmente che non ci sono soluzioni, e dunque r non interseca p (ovvero è parallela a p).
   b) Siccome la retta r è l'asse delle y ed è parallela a p, la distanza tra r e p può essere calcolata limitandoci al piano xz, e diventa la distanza tra il punto $(0,0)$ (l'origine) e la retta di equazione $3x + 4z = 5$ ovvero $z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Ma il punto di minima distanza (o proiezione) dell'origine su questa retta è dato dall'intersezione con la retta di equazione $z = \frac{4}{3}x$, e cioè $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, e la distanza è $d = 1$.
   c) Siccome un vettore normale a p è $(3,0,4)$, la retta in questione è data in forma parametrica da $(x,y,z) = (3,0,4)t + (1,1,1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

3. Come al solito, si tratta di studiare la funzione $f(x) := x^5 - 5x^3 + 10x$. Si vede innanzitutto che la funzione è definita ovunque e derivabile a piacere, e tende a $\pm\infty$ quando x tende a $\pm\infty$. Inoltre, la derivata $f'(x) := 5(x^4 - 3x^2 + 2)$ si annulla per $x^2 = 1, 2$, ovvero per $x = \pm 1, \pm\sqrt{2}$. Dallo studio del segno di f' si ottiene che $-\sqrt{2}$ ed 1 sono punti di massimo locale, dove la funzione vale rispettivamente $-4\sqrt{2} \simeq -5,65$ e 6, mentre -1 ed $\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale, dove la funzione vale -6 e $4\sqrt{2} \simeq 5,65$.



A questo punto possiamo disegnare sommariamente il grafico di f (figura accanto), e tracciando la retta orizzontale di ordinata a si vede subito che l'equazione $x^5 - 5x^3 + 10x = a$ ha un'unica soluzione se e solo se

$$a < -6 \text{ oppure } -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2} \text{ oppure } a > 6 \ .$$

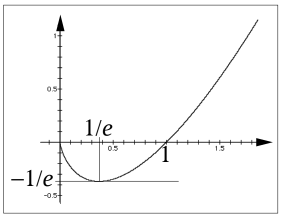
Quarto appello, 4 ottobre 2001

Prima parte.

1. Dal grafico della funzione arcsin si vede che deve essere $0 < x/2 \leq 1$, ovvero $0 < x \leq 2$.
2. Equazione a variabili separabili: $x = \dfrac{-1}{t^3 + a}$ con $a \in \mathbb{R}$.
3. $-\cos(x^2) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.
4. $+\infty$ e 1 rispettivamente.
5. Siccome il suo determinante è $a^4 - a^2 = a^2(a^2 - 1)$, la matrice risulta invertibile per $a \neq 0, \pm 1$, e l'inversa è $\dfrac{1}{a(a^2-1)} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.
6. Cerco una soluzione della forma $x = ae^{-t}$, e trovo $x = \frac{1}{5}e^{-t}$.
7. $9 \cdot 10^4$.
8. Si tratta del della circonferenza (piena) di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

Seconda parte.

1. a) Le possibili coppie (m, n) sono $90 \cdot 90$, mentre quelle che ci interessano sono 89, e più precisamente $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \ldots, (88, 89), (89, 90)$. Quindi
$$P = \frac{89}{90^2} \simeq 1,089\% \ .$$
b) Le possibili coppie (m, n) sono ora $45 \cdot 90$, mentre quelle che ci interessano sono 44, e più precisamente $(2, 3), (4, 5), \ldots, (86, 87), (88, 89)$. Quindi
$$P = \frac{44}{45 \cdot 90} \simeq 1,086\% \ .$$
2. Lo sviluppo (al secondo ordine) di e^t per $t \to 0$ è $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$. Sostituendo $t = x^2(1 - x^2) = x^2 - x^4$ si ottiene dunque
$$e^{x^2(1-x^2)} = 1 + (x^2 - x^4) + (x^2 - x^4)^2/2 + O((x^2 - x^4)^3) = 1 + x^2 - x^4/2 + O(x^6) \ .$$
Quindi $f(x) = -x^4/2 + O(x^6)$, ovvero si tratta di un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-x^4/2$. Quindi $x^{-2}f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2, ed in particolare tende a 0 quando $x \to 0$.
3. La funzione $f(x) := x \log x$ è definita per $x > 0$, e $f(0^+) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$. Inoltre $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$. La derivata di f è $f'(x) = 1 + \log x \geq 0$ per $x \geq 1/e$. Dunque f è decrescente per $0 < x < 1/e$ e crescente per $x > 1/e$, e $1/e$ è un punto di minimo assoluto, dove f vale $-1/e$. Inoltre $f'(0^+) = -\infty$ e $f'(+\infty) = +\infty$, per cui f parte in 0 con pendenza verticale, e non ha asintoto all'infinito. Infine $f''(x) = 1/x$ che è sempre positiva, e dunque f è convessa. Quando stabilito basta ad ottenere il disegno riportato qui accanto.



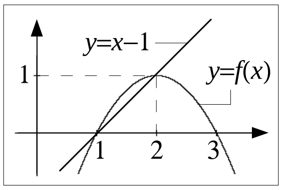
L'equazione $\log x = a/x$ si riscrive come $x \log x = a$, le cui soluzioni sono date dalle ascisse delle intersezioni del grafico di f con la retta orizzontale $y = a$. Si vede allora dal disegno che di interesezioni ce n'è una per $a \geq 0$ (si ricordi che f non è definita in 0), due per $0 > a > -1/e$, di nuovo una per $a = -1/e$, e nessuna per $a < -1/e$. Quindi si ha una sola soluzioni per $a \geq 0$ oppure $a = -1/e$.

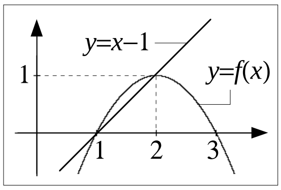
Soluzioni 2001/02

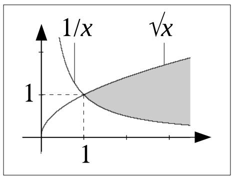
Compitino di prova, 18 ottobre 2001

Prima parte, gruppo A.

1. Falsa, vera, falsa.
2. $0 < x < 1$ oppure $x > 2$.
3. L'insieme in questione è vuoto ($A \cap B \cap C = \emptyset$).
4. $\dfrac{4\pi}{3} r^3$.
5. Deve essere $\log x > 0$, ovvero $x > 1$.
6. Si vede dal disegno qui sotto che $1 \leq x \leq 2$.

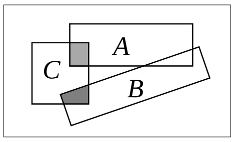


7. 

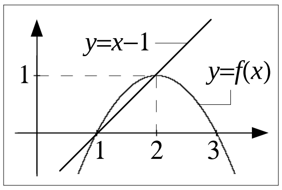
8. 

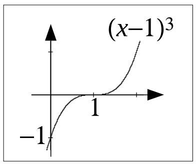
Prima parte, gruppo B.

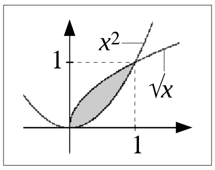
1. Vera, falsa, falsa.
2. $-3 < x < -1$ oppure $x > 1$.
3. L'insieme $(A \cup B) \cap C$ è quello in grigio nella figura accanto.



4. $\dfrac{4}{3} r^3$.
5. Deve essere $-1 \leq \log x \leq 1$, ovvero $\dfrac{1}{e} \leq x \leq e$.
6. Si vede dal disegno qui sotto che deve essere $x \leq 1$ oppure $x \geq 2$.

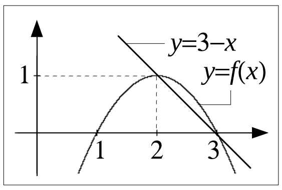


7. 

8. 

Prima parte, gruppo C.

1. Vera, vera, falsa.
2. $-2 < x < -1$ oppure $x > 0$.
3. [*Omesso.*]
4. $2\pi r^3$.
5. Deve essere $\log x < 0$, ovvero $0 < x < 1$.
6. Si vede dal disegno accanto che $2 \leq x \leq 3$.

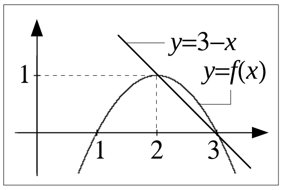


3. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato in basso di 1.
8. [*Omesso.*]

COMPITINO DI PROVA, 18 OTTOBRE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. Falsa, vera, vera.
2. $x > 3$.
3. [*Omesso.*]
4. πr^3.
5. Deve essere $1 - x^2 > 0$, ovvero $-1 < x < 1$.
6. Si vede dal disegno accanto che $x \leq 2$ oppure $x \geq 3$.
3. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato a sinistra di 1.
8. [*Omesso.*]

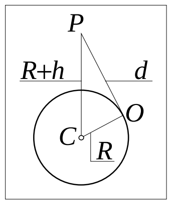


SECONDA PARTE, GRUPPO A.

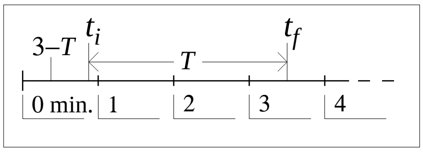
1. a) Bisogna ricordare che la diseguaglianza $t^2 - at + 1 \geq 0$ vale fintantoché l'equazione $t^2 - at + 1 = 0$ ha due soluzioni coincidenti, oppure nessuna soluzione, cosa che si verifica quando $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, ovvero per $-2 \leq a \leq 2$.
b) Dividendo la disequazione $x^2 + y^2 \geq 2ax$ per y^2, e ponendo quindi $t := x/y$, ci si riduce alla disequazione $t^2 + 1 \geq at$, che come si è visto è verificata per $-2 \leq a \leq 2$.

2. Si può procedere in tanti modi. Per esempio, si può osservare che il raggio che congiunge il centro della circonferenza con il punto di tangenza è perpendicolare alla retta assegnata, e dunque la sua lunghezza è proprio la distanza del centro da questa retta. Applicando una nota formula si trova $r = 2/\sqrt{5}$, per cui l'equazione della circonferenza diventa
$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{5} \ .$$
In alternativa si scrive il sistema che determina le intersezioni di una generica circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio r con la retta assegnata, e cioè
$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = r^2 \\ y = x/2 \end{cases} \quad \text{che si riduce a} \quad \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - x + 1 - r^2 = 0 \\ y = x/2 \ . \end{cases}$$
Si ha tangenza quando il sistema ammette un'unica soluzione, ovvero per $\Delta = 1 - 5(1 - r^2) = 0$, e di nuovo ricaviamo $r^2 = 4/5$.

3. Siccome il triangolo PCO in figura è rettangolo in O, per il teorema di Pitagora si ha
$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \simeq \sqrt{2Rh} \ ,$$
dove l'approssimazione finale consiste nel sopprimere il termine h^2 in quanto trascurabile in confronto a $2Rh$ per $h \ll R$. Siccome $R \simeq 6.4 \cdot 10^6\,\text{m} \simeq 40 \cdot 10^6\,\text{m}/6,28$, per $h = 100\,\text{m}$ si ottiene $d \simeq 35 \cdot 10^3\,\text{m}$.



4. Indichiamo con T la durata effettiva del segnale, e con t_i e t_f l'istante iniziale e finale (scegliamo come unità di misura il minuto). Possiamo supporre per comodità che t_i sia compreso nel minuto in cui l'orologio digitale segna 0, e dunque all'istante t_f l'orologio segna 2 (errato per difetto di $2 - T$) se $0 < t_i < 3 - T$, e segna 3 (errato per eccesso di $3 - T$) se $3 - T < t_i < 1$.



Supponiamo ora di fare n diverse misurazioni: come si è detto, si ottiene 3 per tutte quelle per cui l'istante iniziale t_i cade nell'intervallo $(3-T, 1)$, ed il cui numero indichiamo con k, e 2 le rimanenti. La media è dunque

$$T_{\text{media}} = \frac{3k + 2(n-k)}{n} = 2 + \frac{k}{n} \ .$$

Osserviamo ora che se gli istanti iniziali t_i delle diverse misurazioni sono uniformemente distribuiti nell'intervallo $(0, 1)$, la quantità k di quelli che cadono in $(3-T, 1)$ dovrebbe essere proporzionale alla lunghezza di questo intervallo, e cioè $k = (T-2)n$ e dunque

$$T_{\text{media}} = 2 + (T-2) = T \ . \tag{1}$$

Nel migliore dei casi, tuttavia, k è intero e non è uguale a $(T-2)n$, ma differisce di uan frazione, e dunque l'errore da introdurre in (1) è almeno dell'ordine di $1/n$, e per avere una precisione inferiore al secondo, cioè ad $1/60$, sarebbe opportuno fare almeno $n = 60$ tentativi. Ovviamente il difetto di questo ragionamento è che prendendo a caso gli istanti iniziali t_i delle diverse misurazioni, questi non risultano necessariamente distribuiti in modo uniforme, anche se è vero che le distribuzioni più uniformi sono più probabili. Un'analisi più approfondita non è però possibile con gli strumenti a disposizione al momento.

Seconda parte, gruppo B.

1. Si procede come per il gruppo A, e la risposta ad entrambe i quesiti è $-4 \le a \le 4$.
2. Come per il gruppo A: il raggio è $1/\sqrt{5}$ e l'equazione delle circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 1/5$.

[*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

Seconda parte, gruppo C.

1. Si procede come per il gruppo A, e la risposta ad entrambe i quesiti è $-6 \le a \le 6$.
2. Come per il gruppo A: il raggio è $\sqrt{2/5}$ e l'equazione delle circonferenza $(x-2)^2 + y^2 = 2/5$.

[*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

Seconda parte, gruppo D.

1. Si procede come per il gruppo A, e la risposta ad entrambe i quesiti è $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}$.
2. Come per il gruppo A: il raggio è $\sqrt{18/5}$ e l'equazione delle circonferenza $(x-2)^2 + y^2 = 18/5$.

[*Gli esercizi 3 e 4 sono uguali a quelli del gruppo A.*]

PRIMO COMPITINO, 6 NOVEMBRE 2001

PRIMA PARTE, GRUPPO A.

1. $P = \dfrac{2+6}{5+2+6} = \dfrac{8}{13}$.
2. La disuguaglianza equivale a $\log(x-2) < 0$, cioè $0 < x-2 < 1$, $2 < x < 3$.
3. $y = 2 - x$.
4. $2x(1+x^2)e^{1+x^2}$.
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4 + \sin x\, dx = \Big|\frac{x^5}{5} - \cos x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \cos(1) - \frac{-1}{5} + \cos(-1) = \frac{2}{5}$.
6. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e poi rispetto all'asse delle x.
7. $2e^{2x}$, ax^{a-1}, $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
8. $-\cos(x^3) + c$.

7'. $\dfrac{5}{1-2i} = \dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1 + 2i$.

8'. $2e^{5\pi i/6}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B.

1. $P = 6/7$.
2. La disuguaglianza equivale a $x^2 - 1 < 0$, cioè $-1 < x < 1$.
3. $y = 3 - x$.
4. $(1-2x^2)e^{-x^2}$.
5. 0.
6. [*Omesso*]
7. $-e^{-x}$, $-2x^{-3}$, $\frac{1}{3}x^{-2/3}$.
8. $\sin(x^2) + c$.

7'. $1 - 2i$.

8'. $2e^{\pi i/6}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C.

1. $P = 9/13$.
2. La disuguaglianza equivale a $e^x < 2$, cioè $x < \log 2$.
3. $y = 2 + x$.
4. $(1 + x - 2x^2)e^{x-x^2}$.
5. $2/5$.
6. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato a sinistra di π e poi in alto di 1.
7. $1 + \tan^2 x$, ae^{ax}, $2/x$.

8'. $\sin(x^4) + c$.

7'. $-1 - 2i$.

8'. $2e^{7\pi i/6}$.

Prima parte, gruppo D.

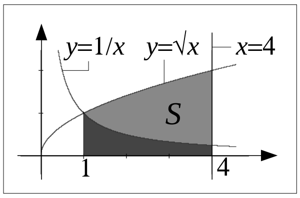
1. $P = 3/4$.
2. La disuguaglianza equivale a $e^x - 1 < 0$, cioè $x < 0$.
3. $y = 2$.
4. $(-x^3 + 3x^2 - 1)e^{-x}$.
5. 0.
6. [*Omesso*]
7. $3/x$, $1/\cos^2 x$, $\frac{1}{4}x^{-3/4}$.
8. $-\cos(x^2) + c$.

7'. $1 = -2 - 4i$.

8'. $2e^{-\pi i/6}$.

Seconda parte, gruppo A.

1. L'area in grigio scuro è pari all'integrale di $1/x$ tra 1 e 4, mentre le aree in grigio chiaro e girgio scuro insieme sono pari all'integrale di $\sqrt{x}$ tra 1 e 4. Dunque



$$S = \int_1^4 \sqrt{x}dx - \int_1^4 \frac{1}{x}dx = \frac{14}{3} - 2\log 2 \ .$$

2. a) $8^5 = 32768$. b) $D_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$. c) Utilizzanto 5 cifre fissate (tra 1 e 8), possiamo formare 5! numeri diversi prendendo tutte le possibili permutazioni, di questi però uno solo ha le cifre ordinate in modo crescente. Quindi il rapporto tra i numeri in b) e quelli con le cifre ordinate in modo crescente è di 1 a 5!, e quindi

$$P = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \simeq 0,83\% \ .$$

Alternativamente, si può osservare che la quantità di numeri di 5 cifre diverse ordinate in modo crescente è pari ai modi di estrarre 5 cifre tra le otto a disposizione *senza* tener conto dell'ordine, e di nuovo $P = C_{8,5}/D_{8,5} = 1/5! = 1/120$.

3. a) Per ogni cifra abbiamo 4 scelte possibili, e quindi il numero cercato è $4^{20} \simeq 1,10 \cdot 10^{12}$.
b) Per tutte le cifre tranne la prima abbiamo solo tre scelte possibili (perché si esclude la ripetizione della cifra precedente), e dunque il numero cercato è $4 \cdot 3^{19} \simeq 4,65 \cdot 10^9$.
c) Come per il punto b) si vede che per tutte le cifre tranne la prima abbiamo solo tre scelte possibili, e di nuovo il numero cercato è $4 \cdot 3^{19} \simeq 4,65 \cdot 10^9$.
d) Se indichiamo con N_k il numero di parole di k lettere scelte tra A, B, C, D che non contengono due A consecutive, abbiamo che $N_1 = 4$, $N_2 = 4^2 - 1 = 15$ e vale inoltre la relazione

$$N_k = 3N_{k-1} + 3N_{k-2} \quad \text{per } k = 3, 4, \ldots \tag{1}$$

Infatti, le parola di k caratteri senza A consecutive possono essere ottenuta aggiungendo una lettera scelta tra B, C, D a tutte le parola di $k-1$ caratteri senza A consecutive (che sono N_{k-1}), oppure aggiungendo una A a tutte le parole di $k-1$ caratteri senza A consecutive che non finiscono per A; quest'ultime sono a loro volta ottenute aggiungendo una lettera scelta tra B, C, D atutte le parole di $k-2$ caratteri senza A consecutive (che sono N_{k-2}). La relazione (1) e le condizioni $N_1 = 4$, $N_2 = 15$ permettono di determinare univocamente tutti i numeri N_k: si ottiene infatti

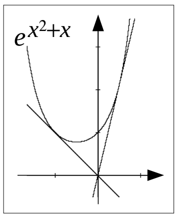
$$\begin{aligned} N_3 &= 3(N_2 + N_1) = 3(4+15) = 57\ , \\ N_4 &= 3(N_3 + N_2) = 3(15+57) = 216\ , \\ N_5 &= 3(N_4 + N_3) = 3(57+216) = 819\ , \\ N_6 &= \cdots \end{aligned}$$

Infine si arriva (con molta pazienza) a $N_{20} \simeq 3,94 \cdot 10^{11}$. Esiste anche una formula esplicita (difficile da ricavare) per tutti gli N_k:

$$N_k = \Big(2 + \frac{9}{\sqrt{21}}\Big)\Big(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\Big)^{k-1} + \Big(2 - \frac{9}{\sqrt{21}}\Big)\Big(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\Big)^{k-1}\ .$$

4. La retta generica passante per l'origine ha equazione $y = mx$. Se la retta deve anche passare per il punto $(t, f(t))$ deve essere

$$m = \frac{f(t)}{t} = \frac{e^{t^2+t}}{t}\ .$$



Infine, la retta in questione risulta tangente se il coefficiente angolare coincide con la derivata di f in t, vale a dire se

$$m = \frac{f(t)}{t} = f'(t) \quad \text{ovvero} \quad \frac{e^{t^2+t}}{t} = (2t+1)e^{t^2+t}\ .$$

Semplificando otteniamo $2t^2 + t - 1 = 0$, e cioè $t = 1/2, -1$, che corrispondono rispettivamente alle rette tangenti

$$y = 2e^{3/4}x \quad \text{e} \quad y = -x\ .$$

4'. Facendo un disegno si vede subito che $\bar z$ si ottiene riflettendo z rispetto all'asse delle x, e che $\bar z = \rho e^{-i\theta}$. A questo punto l'equazione $z^3 = 4\bar z$ diventa $\rho^3 e^{i3\theta} = 4\rho e^{-i\theta}$, che si riduce al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = 4\rho \\ 3\theta = -\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho(\rho^2-4) = 0 \\ 4\theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0, 2 \\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \end{cases}\ .$$

Dunque le soluzioni sono 0, ± 2 e $\pm 2i$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Si procede come per il gruppo A: l'area di S è $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{7}{3} - \log 2$.

2. a) $7^5 = 16807$; b) $D_{7,5} = 2520$; c) $P = \dfrac{1}{5!} = 0,83\%$.

3. a) $5^{20} \simeq 9,54 \cdot 10^{13}$; b) e c) $5 \cdot 4^{19} \simeq 1,37 \cdot 10^{12}$; d) Se chiamiamo N_k il numero delle parole (tra quelle del punto a)) che non contengono due A consecutive, si ha che $N_1 = 5$, $N_2 = 24$ e vale la relazione $N_k = 4(N_{k-1} + N_{k-2})$, da cui si ricava $N_{20} \simeq 4.88 \cdot 10^{13}$. La formula esplicita per N_k è

$$N_k = \Big(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\Big)(2+2\sqrt{2})^{k-1} + \Big(\frac{10-7\sqrt{2}}{4}\Big)(2-2\sqrt{2})^{k-1} \ .$$

4. Si procede come per il gruppo A: in questo caso l'equazione che individua i punti di tangenza è $2t^2 - t - 1 = 0$, le cui soluzioni $t = 1, -1/2$ corrispondono alle rette

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -2e^{3/4}x \ .$$

4'. [*Uguale al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. Si procede come per il gruppo A: l'area di S è $\displaystyle\int_1^4 x^2 dx - \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{49}{3}$.
2. a) $8^4 = 4096$; b) $D_{8,4} = 1680$; c) $P = \dfrac{1}{4!} = 4,17\%$.
3. a) $4^{30} \simeq 1,15 \cdot 10^{18}$; b) e c) $4 \cdot 3^{29} \simeq 2,75 \cdot 10^{14}$; d) Definendo N_k come per il gruppo A, si ottiene $N_{30} \simeq 2,42 \cdot 10^{17}$.
4. Si procede come per il gruppo A: in questo caso l'equazione che individua i punti di tangenza è $2t^2 + t - 1 = 0$, le cui soluzioni $t = 1/2, -1$ corrispondono alle rette

$$y = 4e^{3/4}x \quad \text{e} \quad y = -2x \ .$$

4'. [*Uguale al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. Si procede come per il gruppo A: l'area di S è $\displaystyle\int_1^3 x^3 dx - \int_1^3 \frac{1}{x} dx = 20 - \log 3$.
2. a) $7^4 = 2401$; b) $D_{7,4} = 848$; c) $P = \dfrac{1}{4!} = 4,17\%$.
3. a) $5^{30} \simeq 9,31 \cdot 10^{20}$; b) e c) $5 \cdot 4^{29} \simeq 1,44 \cdot 10^{18}$; d) Definendo N_k come per il gruppo B, si ottiene $N_{30} \simeq 3,37 \cdot 10^{20}$.
4. Si procede come per il gruppo A: in questo caso l'equazione che individua i punti di tangenza è $8t^2 - 2t - 1 = 0$, le cui soluzioni $t = 1/2, -1/4$ corrispondono alle rette

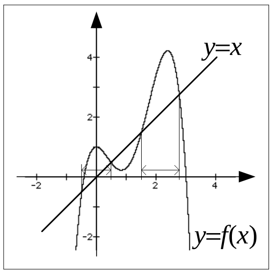
$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = -4e^{3/4}x \ .$$

4'. [*Uguale al gruppo A.*]

Secondo compitino, 4 dicembre 2001

Prima parte, gruppo A.

1. $P = 3/10$.
2. Limite della forma $0/0$: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot (1+x) = 0$.
3. $+\infty$, $+\infty$.
4. $e^{\sin x}$.
5. $2xe^{x^2-1}$ si annulla solo per $x = 0$, punto di minimo assoluto.
6. La soluzione è l'unione dei due segmenti sull'asse delle x indicati nel disegno con delle freccie.



7. e^x.
8. $2e^{2x}$, $\frac{4}{3}x^{1/3}$, $\frac{1}{x\log x}$.

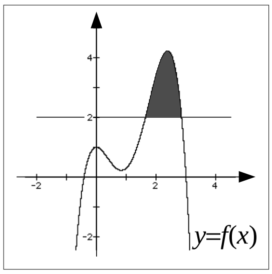
7'. $(1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{\pi i/4})^{10} = 2^5 e^{5\pi i/2} = 32i$.

8'. $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9'. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Prima parte, gruppo B.

1. $P = 2/11$.
2. 1.
3. 0, $+\infty$.
4. $\frac{1}{2}\sin(x^2)$.
5. $2(1-x)e^{x^2-1}$ si annulla per $x = 1$, punto di massimo assoluto.
6. La soluzione è la parte di piano in grigio scuro nel disegno.



7. x.
8. 0, $2xe^{x^2}$, $2 + \log x$.

Prima parte, gruppo C.

1. $P = 2/15$.
2. 1.
3. $+\infty$, 0.
4. $\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2(x-1)e^x$.
5. $\frac{-2x}{1-x^2}$ si annulla solo per $x = 0$, punto di massimo assoluto (la funzione è definita solo per $-1 < x < 1$).

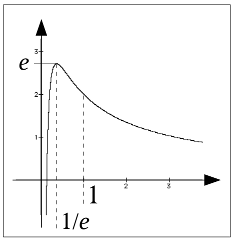
6. [*Omesso.*]
7. x^3.
8. 0, $2xe^{x^2}$, $-\dfrac{\sin(\log x)}{x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. $P = 3/17$.
2. 2.
3. 0, $+\infty$.
4. $\displaystyle\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{4}(2 \log x - 1)$.
5. $\dfrac{2(1-x)}{2x - x^2}$ si annulla solo per $x = 1$, punto di massimo assoluto (la funzione è definita solo per $0 < x < 2$).
6. [*Omesso.*]
7. 4^x.
8. 0, $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\dfrac{1}{x \log x}$.

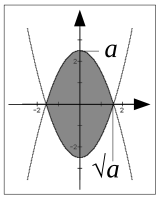
SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$, $f(x) = 0$ solo per $x = 1/e^2$, $f(x) < 0$ per $x < 1/e^2$ e $f(x) > 0$ per $x > 1/e^2$, mentre i limiti in 0^+ e $+\infty$ sono, rispettivamente, $-\infty$ e 0. Inoltre $f'(x) = -x^{-2}(1 + \log x)$, che è positiva per $x < 1/e$ e negativa altrimenti. Dunque f cresce per $x < 1/e$, decresce poi, e pertanto $1/e$ è il punto di massimo assoluto, e $f(1/e) = e$. Lo studio del segno di $f''(x) = x^3(2 \log x + 1)$ mostra che f è concava per $x < 1/\sqrt{e}$ e convessa altrimenti. Questo permette di ottenere il disegno qui accanto.



   A partira da questo si vede che l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > e$, ne ha una per $a = e$, due per $0 < a < e$ e di nuovo una per $a \leq 0$. Il valore massimo di $f(x)$ è e, mentre il minimo è $-\infty$ ("raggiunto" quando x tende a 0). Sulla semiretta $[1, +\infty)$, f è decrescente, e quindi il valore massimo è $f(1) = 2$ ed il minimo è 0 ("raggiunto" quando x tende a $+\infty$).

2. L'insieme A_a consiste dei punti compresi tra i grafici di $y = a - x^2$ ed il suo opposto $y = x^2 - a$. Quindi A_a è vuoto per $a < 0$, mentre per $a \geq 0$ è come l'insieme in grigio nel disegno accanto, e



$$\text{Area}(A_a) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) - (x^2 - a) \, dx = \frac{8}{3} a^{3/2} \ .$$

   Per ogni $x \geq 1$, l'intersezione di V con il piano parallelo al piano yz passante per $(x, 0, 0)$ è una figura piana uguale ad A_a con $a = 1/x$, e quindi ha area $\frac{8}{3} x^{-3/2}$. Dunque

$$\text{Vol}(V) = \int_1^\infty \frac{8}{3} x^{-3/2} dx = \frac{8}{3} \bigg| \frac{x^{-1/2}}{-1/2} \bigg|_1^\infty = \frac{16}{3} \Big| x^{-1/2} \Big|_\infty^1 = \frac{16}{3} \ .$$

3. La superficie totale ed il volume del parallelepipedo in questione sono $A = 2(x + y + xy)$ e $V = xy$. Imponendo $A = 1$ possiamo esplicitare y in funzione di x, ottenendo

$$y = \frac{1 - 2x}{2(1 + x)} \quad \text{e quindi} \quad V = xy = \frac{x - 2x^2}{2(1 + x)} \ .$$

Si vede in particolare (dalla prima formula) che i valori ammissibili di x sono quelli compresi tra 0 e 1/2. Derivando l'espressione di V nella seconda formula rispetto alla variabile x otteniamo

$$V' = \frac{1 - 4x - 2x^2}{2(1 + x)^2} \ ,$$

e quindi V cresce per $0 < x < \sqrt{3/2} - 1 \simeq 0,225$, e decresce per $\sqrt{3/2} - 1 < x < 1/2$. Quindi il volume del parallelepipedo è massimo per $x = \sqrt{3/2} - 1$ (e $y = \sqrt{3/2} - 1$). Invece, per x che tende a 0 oppure a 1/2 il volume V tende a 0, che è dunque il volume minimo (che ovviamente corrisponde solo a dei parallelepipedi "degeneri").

3'. Usando gli sviluppi di Taylor $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^3)$ e $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + o(t^5)$ si ottiene

$$f(x) = 1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2} + o((-2x^2)^2) - \Big[1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2xs)^5)\Big] = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

e quindi la parte principale di f è $\frac{4}{3}x^4$.

3". La matrice ridotta del sistema è $\begin{pmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$ ed ha determinante $2(1 - a^2)$.

Pertanto, per $a \neq \pm 1$ matrice ridotta e completa hanno rango 3, ed il sistema ammette una sola soluzione (che ovviamente deve essere $x = y = z = 0$). Invece per $a = \pm 1$ matrice ridotta e completa hanno rango 2, per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni. In particolare, per $a = -1$ il sistema si riduce alle due equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y + z = 0$, e le soluzioni sono $z = 0$, $y = -x$ con x qualunque.

4. Indichiamo con n il numero delle biglie bianche. I modi di estrarre due biglie tra le 11 date (tenendo conto dell'ordine) sono $11 \cdot 10$, ed essendo $11 - n$ il numero delle biglie nere presenti nel sacchetto, i modi di estrarre due nere sono $(11 - n)(10 - n)$. Quindi

$$P = \frac{(11 - n)(10 - n)}{110} \quad \text{(in particolare } P = \frac{21}{55} \simeq 38\% \text{ quando } n = 4).$$

Ponendo $P = \frac{3}{11}$, otteniamo l'equazione $\frac{3}{11} = \frac{(11-n)(10-n)}{110}$, e cioè $n^2 - 21n + 80 = 0$, che ha soluzione $n = 5$ (ed $n = 16$ che chiaramente non è ammissibile).

SECONDA PARTE, GRUPPO B.

1. Il grafico è molto simile a quello del gruppo A: $f(x)$ è definita per $x > 0$, con limiti $-\infty$ in 0^+ e 0 in $+\infty$. Lo studio della derivata prima $f'(x) = -x^{-2}(2 + \log x)$ mostra che f cresce a sinistra di $1/e^2$ e decresce a destra, per cui $1/e^2$ è il punto di massimo assoluto, ed $f(1/e^2) = e^2$. A partire da questo si vede che l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > e^2$, ne ha una per $a = e^2$, due per $0 < a < e^2$ e di nuovo una per $a \leq 0$. Il valore

massimo di $f(x)$ è e^2, mentre il minimo è $-\infty$. Nell'intervallo $[1, e]$ il valore massimo è $f(1) = 3$ ed il minimo $f(e) = 4/e$.

2. L'insieme A_a consiste dei punti compresi tra i grafici di $y = a - x^4$ ed il suo opposto, e

$$\text{Area}(A_a) = 2\int_{-\sqrt[4]{a}}^{\sqrt[4]{a}} a - x^4\,dx = \frac{16}{5}a^{5/4} \quad ; \quad \text{Vol}(V) = \int_1^{\infty} \frac{16}{5}x^{-5/4}dx = \frac{64}{5}\ .$$

3. La superficie totale ed il volume del parallelepipedo sono $A = 4(x + y) + 2xy$ e $V = 2xy$. Procedendo come per il gruppo A si vede che, fissato $A = 1$, il volume è massimo per $x = y = 2(\sqrt{9/8} - 1) \simeq 0,12$, mentre per x che tende a 0 oppure a $1/4$ il volume V tende a 0.

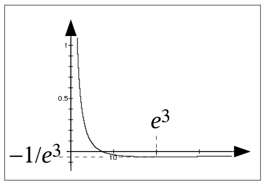
4. Indichiamo con n il numero delle biglie bianche. I modi di estrarre due biglie tra le 11 date (tenendo conto dell'ordine) sono $11 \cdot 10$, ed essendo $11 - n$ il numero delle biglie nere, i modi di estrarre prima una bianca e poi una nera sono $n(11 - n)$, mentre i modi di estrarre prima una nera e poi una bianca sono $(11 - n)n$. Quindi

$$P = \frac{n(11-n)}{55} \quad (\text{in particolare } P = \frac{28}{55} \simeq 38\% \text{ quando } n = 4).$$

Ponendo $P = \frac{6}{11}$, otteniamo l'equazione $n^2 - 11n + 30 = 0$, che ha soluzioni $n = 5$ ed $n = 6$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C.

1. La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$, con limiti $+\infty$ in 0^+ e 0 in $+\infty$. Lo studio della derivata prima $f'(x) = x^{-2}(\log x - 3)$ mostra che f decresce a sinistra di e^3 e cresce a destra, per cui e^3 è il punto di minimo assoluto, ed $f(e^3) = -1/e^3$ (vedi disegno accanto). A partire da questo si vede che l'equazione $f(x) = a$ ha una soluzione per $a > 0$, due per $0 > a > -1/e^3$, di nuovo una per $a = -1/e^3$, e nessuna per $a < -1/e^3$.



Il valore massimo di f è $+\infty$ ed il minimo è $f(e^3) = -1/e^3$, mentre nella semiretta $[e^3, +\infty)$ sono rispettivamente 0 e $f(e^3) = -1/e^3$.

2. L'insieme A_a e l'insieme V sono le metà superiori degli insiemi A_a e V del gruppo A, e quindi hanno area $\frac{4}{3}a^{3/2}$ e volume $\frac{8}{3}$ rispettivamente.

3. La superficie totale ed il volume del parallelepipedo sono $A = 2x^2 + 4xy$ e $V = x^2y$. Procedendo come per il gruppo A si vede che, fissato $A = 1$, il volume è massimo per $x = y = 1/\sqrt{6} \simeq 0,41$, mentre per x che tende a 0 oppure a $1/\sqrt{2}$ il volume V tende a 0.

4. Si procede come per il gruppo B: $P = \frac{n(15-n)}{105}$, e in particolare $P = \frac{44}{105} \simeq 42\%$ per $n = 4$, mentre $P = \frac{8}{15}$ per $n = 7, 8$.

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. Analogo al gruppo C: $f(x)$ è definita per $x > 0$, con limiti $+\infty$ in 0^+ e 0 in $+\infty$. Lo studio della derivata prima $f'(x) = x^{-2}(\log x - 4)$ mostra che f decresce a sinistra di e^4 e cresce a destra, per cui e^4 è il punto di minimo assoluto, ed $f(e^4) = -1/e^4$. A partire da questo si vede che l'equazione $f(x) = a$ ha una soluzione per $a > 0$, due per $0 > a > -1/e^4$, di nuovo una per $a = -1/e^4$, e nessuna per $a < -1/e^4$. Il valore massimo di f è $+\infty$ ed il minimo è

$f(e^4) = -1/e^4$, mentre nell'intervallo $[1, e]$ f decresce ed essi sono rispettivamente $f(1) = 3$ e $f(e) = 2/e$.

2. L'insieme A_a e l'insieme V sono le metà superiori degli insiemi A_a e V del gruppo B, e quindi hanno area $\frac{8}{5}a^{5/4}$ e volume $\frac{32}{5}$ rispettivamente.

3. Come per il gruppo C, il volume è massimo per $x = y = 1/\sqrt{3} \simeq 0,58$, mentre per x che tende a 0 oppure a 1 il volume tende a 0.

4. Si procede come per il gruppo A: $P = \frac{(15-n)(14-n)}{210}$, in particolare $P = \frac{11}{21} \simeq 52\%$ quando $n = 4$, mentre $P = \frac{4}{15}$ per $n = 7$.

ERRORI PIÙ FREQUENTI.

1. Nell'esercizio 1 della seconda parte si chiede di calcolare il limite di $\frac{\log x}{x}$ per $x \to 0^+$ (a meno di dettagli che variano col gruppo). Siccome $\lim \log x = -\infty$ e $\lim x = 0^+$, non si tratta di una forma indeterminata, ed in particolare il limite è $-\infty$. L'applicazione del teorema di de l'Hopital in questo caso è sbagliata, ed infatti dà come risultato $+\infty$. Viceversa, il limite della stessa funzione per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata, ed è possibile applicare de l'Hopital (anche se basterebbe ricordarsi che $\log x = o(x)$).
2. Il calcolo errato del limite descritto al punto precedente porta ad una conclusione che è in contraddizione con lo studio del segno della derivata della funzione. Spesso questa contraddizione è stata semplicemente ignorata.
3. Nell'esercizio 4 della seconda parte, si dovrebbe spiegare, almeno con una breve frase, come si è ottenuta la formula per la probabilità.

Primo appello, 7 gennaio 2002

Prima parte, gruppo A.

1. $1 < x < 2$. Infatti $x - 2 > 0$ per $x > 2$, $\log x > 0$ per $x > 1$, e non è definito per $x \leq 0$.
2. Si tratta del grafico di $\log x$ traslato a sinistra di 1.
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \Big|\log x\Big|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log(1) = +\infty$.
4. $\displaystyle\int 2x\, e^x dx = 2x\, e^x - \int 2\, e^x dx = 2x\, e^x - 2\, e^x = 2(x-1)e^x$.
5. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e quindi il risultato è $-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
6. 1 e $+\infty$, rispettivamente.
7. I lanci possibili sono $6 \cdot 6 = 36$, e quelli che danno come somma 3 sono invece 2 ($1 + 2$ e $2 + 1$), quindi $P = 2/36 = 1/18 \simeq 5,5\%$.
8. Due vettori sono ortogonali solo quando il loro prodotto scalare è nullo, cioè $0 = (1, a, 0) \cdot (a, -3, a^3) = -2a$, che si verifica per $a = 0$.

7'. $x = \alpha e^{3t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

8'. $1 - i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$.

Prima parte, gruppo B.

1. $x > 1$ oppure $x < -1$ (il segno di e^x è sempre positivo).
2. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e dilatato verticalmente di un fattore 2.
3. $+\infty$ (basta osservare che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$).
4. Sostituendo $x^2 = t$, si ha $2x\, dx = dt$ e $\displaystyle\int 2x\, e^{x^2} dx = \int e^t dt = e^t = e^{x^2}$.
5. $-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Entrambi 0.
7. I lanci che danno come somma 4 sono 3 (1+3, 2+2 e 3+1) e quindi $P = 3/36 = 1/12 \simeq 8,3\%$.
8. $0 = (0, a + 1, a) \cdot (4, a - 1, 1 - a) = a - 1$, che si verifica per $a = 1$.

7'. $x = \alpha e^t + \beta e^{-t}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8'. $-1 + i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$.

Prima parte, gruppo C.

1. $x < 0$ (il segno di x^2 è sempre positivo).
2. Si tratta di una parabola con concavità rivolta verso il basso, vertice in $(-1, 0)$ e passante per $(0, -1)$.
3. $1/2$.

4. $\displaystyle\int 2x\,\log x dx = x^2\,\log x - \int x^2\frac{1}{x}dx = 2x\,\log x - x^2/2 = x^2(\log x - 1/2)$.
5. $-\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
6. 0 e 1/2, rispettivamente.
7. $P = 2/36 = 1/18 \simeq 5,5\%$.
8. $0 = (a,1,2)\cdot(2,a,-3) = 3a-6$, che si verifica per $a=2$.

7'. $x = \alpha\sin t + \beta\cos t$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

8'. $-2i = 2e^{-\pi i/2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. $0 < x < 1$.
2. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato a sinistra di π.
3. 1.
4. $2x^2(\log x - 1/2)$ (infatti $2x\,\log(x^2) = 4x\,\log x$ e poi si procede per parti).
5. $-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
6. Entrambi 0.
7. $P = 1/36 \simeq 2,8\%$.
8. $0 = (1,a,1)\cdot(a,1,a) = 3a$, che si verifica per $a=0$.

7'. $x = \alpha e^{-3t}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

8'. $-2 = 2e^{\pi i}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Calcoliamo prima la matrice dei cofattori (o complemento algebrico) di A:

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 12 & a(a+1) & -3(a+1) \\ 0 & 2(a-1) & 0 \\ -6 & -a^2 & 3a \end{pmatrix} .$$

Quindi il determinante di A è dato, per esempio, dal prodotto scalare delle seconde colonne di A e $\operatorname{cof} A$:

$$\det A = (0,3,0)\cdot(a(a+1), 2(a-1), -a^2) = 6(a-1) ,$$

mentre l'inversa è

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\operatorname{cof} A)^T = \frac{1}{6(a-1)}\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ a(a+1) & 2(a-1) & -a^2 \\ -3(a+1) & 0 & 3a \end{pmatrix} .$$

b) Il sistema si scrive come $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dunque $x = A^{-1}b$, e siccome A coincide con la matrice del punto precedente quando $a = 2$, possiamo calcolare A^{-1} usando la formula sopra, e

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 6 & 2 & -4 \\ -9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8/3 \\ -9/2 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 8/3 \\ x_3 = -9/2 \end{cases} .$$

2. La matrice ridotta associata al sistema è $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 3 & a \\ (a+1) & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $\det A = 6(a-1)$.

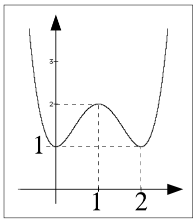
   Quindi per $a \neq 1$ la matrice ridotta (e quindi anche la completa) ha rango tre, ed il sistema ammette una sola soluzione. Per $a = 1$ si vede che sia la matrice ridotta che quella completa hanno rango 2, e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Risolvendolo esplicitamente, si trova che la terza equazione equivale alla prima, e può quindi essere omessa. risolvendo le restanti due equazioni si ottiene $x = 5 + 6y$ e $z = -1 - 3y$, con y qualunque.

3. Si ricorda che $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, e quindi, sostituendo ad x prima x^2 e poi $-x^2$,

$$f(x) = [1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)] + [1 - x^2 + x^4/2 + o(x^4)] - 2 = x^4 + o(x^4) .$$

   Pertanto la parte principale di $f(x)$ è x^4, e $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{-4} x^4 = 1$.

4. a) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ha limite uguale a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, e $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2)$, che si annulla in $0, 1, 2$. Il segno della derivata è quindi positivo per $0 < x < 1$ e per $x > 2$ f è crescente), e negativo altrove (f è decrescente); 0 e 2 sono minimi locali, e siccome $f(0) = f(2) = 1$, sono anche i punti di minimo assoluto (e $\min f = 1$), mentre 1 è un punto di massimo locale (vedi figura accanto).



   b) L'equazione $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = a$ può essere riscritta come $f(x) = a + 1$, che, come si deduce dal disegno, ha due soluzioni per $a + 1 > 2$ (cioè $a > 1$), tre per $a + 1 = 2$ (cioè $a = 1$), quattro per $2 > a + 1 > 1$ (cioè $1 > a > 0$), di nuovo due per $a + 1 = 1$ (cioè $a = 0$), e nessuna per $a + 1 < 1$ (cioè $a < 0$).

5. a) La probabilità di estrarre il due di picche come prima carta è $1/52$, per il tre come seconda (avendo già estratto il due) è $1/51$ e così via. Dunque

$$P_a = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{1}{6497400} \simeq 1,54 \cdot 10^{-7} .$$

   b) La probabilità di estrarre il due (di uno qualunque dei quattro semi) come prima carta è $4/52$, per un tre come seconda è $4/51$, etc. etc. Dunque

$$P_b = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{256}{6497400} \simeq 3,94 \cdot 10^{-5} .$$

   c) se non si prescrive l'ordine di uscita delle carte, la probabilità P_b va moltiplicata per il numero dei possibili modi di ordinare quattro carte, e cioè

$$P_c = 4! \cdot P_b = \frac{24 \cdot 256}{6497400} \simeq 9,46 \cdot 10^{-4} .$$

Alternativamente, per il punto a) si osserva che i possibili modi di estrarre quattro carte tenendo conto dell'ordine sono $D_{52,4}$, mentre quello che va bene è uno solo, e dunque $P_a = 1/D_{52,4} = 1/(52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49)$. Un analogo ragionamento si applica i punti b) e c).

6. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $\ddot{x} + 4x = 0$ è $\lambda^2 + 4$, ed ha radici $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, e quindi la soluzione generale dell'omogenea è $x = a\sin(2t) + b\cos(2t)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Non ci resta che trovare una soluzione particolare della non omogenea; in questo caso la cerchiamo del tipo $\bar{x} = \alpha e^{-t}$, e sostituendo nell'equazione otteniamo $\alpha = 1$. Dunque la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $x = a\sin(2t) + b\cos(2t) + e^{-t}$. Imponendo ora le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ricaviamo $b = -1$ e $a = 1/2$, ovvero

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \cos(2t) + e^{-t} .$$

Seconda parte, gruppo B.

1. a) $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} a(a+1) & -3(a+1) & 12 \\ 2(a-1) & 0 & 0 \\ -a^2 & 3a & -6 \end{pmatrix}$, $\det A = (3, a, 0) \cdot (2(a-1), 0, 0) = 6(a-1)$, e
$$A^{-1} = \frac{1}{6(a-1)} \begin{pmatrix} a(a+1) & 2(a-1) & -a^2 \\ -3(a+1) & 0 & 3a \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$
b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
2. [*Uguale al gruppo A.*]
3. $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ e $f(x) = [x^3 - x^6/2 + o(x^6)] + [-x^3 - x^6/2 + o(x^6)] = -x^6 + o(x^6)$. Dunque la parte principale di $f(x)$ è $-x^6$, e $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x) = \lim_{x\to 0} -x^{-4}x^6 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$.
4. Il grafico della funzione f è quello del gruppo A riflesso rispetto all'asse delle y. In particolare, come per il gruppo A, l'equazione in questione ha due soluzioni per $a > 1$, tre per $a = 1$, quattro per $1 > a > 0$, due per $a = 0$, e nessuna per $a < 0$.
5. $P_a = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{2193360} \simeq 4,56 \cdot 10^{-7}$, $P_b = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{4}{37} = \frac{256}{2193360} \simeq 1,17 \cdot 10^{-4}$, $P_c = 4! \cdot P_b = \frac{24 \cdot 256}{2193360} \simeq 2,80 \cdot 10^{-4}$.
6. [*Uguale al gruppo A.*]

Seconda parte, gruppo C.

1. a) $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 12 & a(a-1) & -3a \\ 0 & 2(a-2) & 0 \\ -6 & -(a-1)^2 & 3(a-1) \end{pmatrix}$, $\det A = (0, 3, a-1) \cdot (0, 2(a-2), 0) = 6(a-2)$, e
$$A^{-1} = \frac{1}{6(a-2)} \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ a(a-1) & 2(a-2) & -(a-1)^2 \\ -3a & 0 & 3(a-1) \end{pmatrix}.$$
b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 6 & 2 & -4 \\ -9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/3 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

2. [*Uguale al gruppo A.*]

3. $e^x = 1+x+x^2/2+o(x^2)$ e $f(x) = [1+x^3+x^6/2+o(x^6)]+[1+x^3+x^6/2+o(x^6)]-2 = x^6+o(x^6)$. Dunque la parte principale di $f(x)$ è x^6, e $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

4. Il grafico della funzione f è quello del gruppo A riflesso rispetto all'asse delle x e traslato in alto di 2. In particolare l'equazione in questione non ha soluzioni per $a > 1$, ne ha due per $a = 1$, quattro per $1 > a > 0$, tre per $a = 0$, e due per $a < 0$.

5. $P_a = \dfrac{1}{52} \cdot \dfrac{1}{51} \cdot \dfrac{1}{50} = \dfrac{1}{132600} \simeq 7,54 \cdot 10^{-6}$, $P_b = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{4}{51} \cdot \dfrac{4}{50} = \dfrac{64}{132600} \simeq 4,82 \cdot 10^{-4}$, $P_c = 3! \cdot P_b = \dfrac{6 \cdot 64}{132600} \simeq 2,89 \cdot 10^{-3}$.

6. [*Uguale al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO D.

1. a) $\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} a(a-1) & -3a & 12 \\ 2(a-2) & 0 & 0 \\ -(a-1)^2 & 3(a-1) & -6 \end{pmatrix}$, $\det A = (3, a-1, 0) \cdot (2(a-2), 0, 0) = 6(a-2)$, e
$A^{-1} = \dfrac{1}{6(a-2)} \begin{pmatrix} a(a-1) & 2(a-2) & -(a-1)^2 \\ -3a & 0 & 3(a-1) \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2/9 \\ -1/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

2. [*Uguale al gruppo A.*]

3. $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ e $f(x) = [x^2 - x^4/2 + o(x^4)] + [-x^2 - x^4/2 + o(x^4)] = -x^4 + o(x^4)$. Dunque la parte principale di $f(x)$ è $-x^4$, e $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x) = -1$.

4. Il grafico della funzione f è quello del gruppo B riflesso rispetto all'asse delle x e spostato in alto di 3. L'equazione in questione non ha soluzioni per $a > 1$, ne ha due per $a = 1$, quattro per $1 > a > 0$, tre per $a = 0$, e due per $a < 0$.

5. $P_a = \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{1}{39} \cdot \dfrac{1}{38} = \dfrac{1}{59280} \simeq 1,69 \cdot 10^{-5}$, $P_b = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{39} \cdot \dfrac{4}{38} = \dfrac{64}{59280} \simeq 1,08 \cdot 10^{-3}$, $P_c = 3! \cdot P_b = \dfrac{6 \cdot 64}{59280} \simeq 6,48 \cdot 10^{-3}$.

6. [*Uguale al gruppo A.*]

ERRORI PIÙ FREQUENTI.

1. Esercizio 1: errori nei segni della matrice dei cofattori.

2. Esercizio 1: se si usa la notazione matriciale con i vettori-colonna, il sistema si scrive nella forma $Ax = b$, con A metrice dei coefficienti, x vettore delle incognite e b vettore dei termini noti, ed in tal caso la soluzione è $x = A^{-1}b$, e non $x = bA^{-1}$; si ricordi infatti che il prodotto di matrici non è commutativo, ed in particolare il prodotto bA^{-1} non si può fare.

3. Esercizio 2: per dimostrare che la matrice completa ha rango 2 (e non 3) quando $a = 1$ non basta far vedere che il determinante di una sola sottomatrice non 3×3 è nullo, ma bisogna verificarlo per tutte.

4. Esercizio 3, gruppo B: se sostituisco $-x^3$ a x nell'espressione $x - x^2/2 + o(x^2)$, il risultato è $(-x^3) - (-x^3)^2/2 + o((x^3)^2) = -x^3 - x^6/2 + o(x^6)$, e non $-x^3 + x^6/2 + \cdots$ o altro! Simili errori sono stati fatti per gli altri gruppi.
5. Esercizio 5, punti a) e b): calcolando la probabilità come il numero dei casi favorevoli diviso il numero dei casi possibili, quest'ultimi corrispondono ai modi di estrarre quattro carte da un mazzo di quaranta (i numeri sono diversi per i diversi gruppi) *tenendo conto dell'ordine*, e quindi sono $D_{40,4}$, e non $C_{40,4}$.

Secondo appello, 4 febbraio 2002

Prima parte, gruppo A.

1. Le cifre a disposizione sono $\{1,3,5,7,9\}$, e quindi la risposta è $5^3 = 125$.
2. Deve essere $1 + x^3 > 0$, ovvero $x > -1$.
3. Ponendo $x = 0$ e $x = 1$ si ottiene $2 = a2^0$ e $1 = a2^b$, ovvero $a = 2$, $b = -1$.
4. $\sin x - x\cos x$.
5. $(2x^2+1)e^{x^2}$, $\sin(3-x)$, $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
6. $x^2 - 2\log(x^4) = x^2 - 8\log x$ ha parte principale x^2 e limite $+\infty$.
7. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^n)$.
8. $\begin{pmatrix} 3 & 14 & -8 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6'. $\big[(x,y,z) - (0,1,0)\big] \cdot (3,-1,-2) = 0$, ovvero $3x - y - 2z + 1 = 0$.

7'. Equazione a variabili separabili: $x(t) = \dfrac{1}{\cos t + a}$ con $a \in \mathbb{R}$.

8'. Siccome $-8 = 8e^{\pi i}$, si tratta dei vertici di un triangolo equilatero iscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio 2, uno dei quali deve essere -2. In altre parole, $z = -2$, $z = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Prima parte, gruppo B.

1. Le cifre a disposizione sono $\{1,3,5,7,9\}$, e quindi la risposta è $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
2. Deve essere $1 - x^3 > 0$, ovvero $x < 1$.
3. Ponendo $x = 0$ e $x = 1$ si ottiene $-1 = b$ e $1 = a + b$, ovvero $a = 2$, $b = -1$.
4. $(2+x)^5$.
5. $\sin(3-x)$, $-\dfrac{x+2}{x^3}$, $\log x + 1$.
6. Siccome $2/x$ è un infinitesimo, la parte principale è $-\log x$ ed il limite $+\infty$.
7. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + -1^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
8. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

[*Gli esercizi 6', 7' e 8' sono uguali al gruppo A.*]

Prima parte, gruppo C.

1. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
2. Deve essere $1 + x^2 > 0$, che è vera per ogni x.
3. $a = -2$, $b = -1$.
4. $\dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}$.

5. $-\dfrac{x+2}{x^3}$, $(1-x)e^{-x}$, $3\cos(3x)$.
6. La parte principale è e^x ed il limite $+\infty$.
7. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^n)$.
8. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 & -10 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 14 & -14 \end{pmatrix}$.

[*Gli esercizi 6', 7' e 8' sono uguali al gruppo A.*]

PRIMA PARTE, GRUPPO D.

1. $5^4 = 625$.
2. Deve essere $1 - x^2 > 0$, e cioè $-1 < x < 1$.
3. $a = -2$, $b = 1$.
4. $\dfrac{1}{3}\sin^3 x$.
5. $(1-x)e^{-x}$, $\dfrac{1}{x\log x}$, $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
6. Siccome e^{-x} è un infinitesimo, la parte principale è $-x$ ed il limite $-\infty$.
7. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
8. $\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$.

[*Gli esercizi 6', 7' e 8' sono uguali al gruppo A.*]

SECONDA PARTE, GRUPPO A.

1. a) Si suppone chiaramente che dopo ogni estrazione la biglia venga rimessa nel sacchetto. Siccome le biglie nere sono $100 - n$, la probabilità di estrarne una è $(100-n)/100$. Quindi la probabilità di estrarne quattro per quattro volte consecutive è $((100-n)/100)^4$, e quella dell'evento complementare, cioè di estrarre almeno una bianca, è

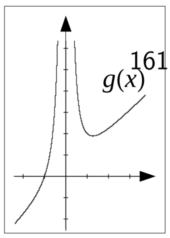
$$P_a = 1 - \left(\frac{100-n}{100}\right)^4 .$$

b) Se $n \geq 97$, il numero delle biglie nere non arriva a quattro, e quindi la probabilità cercata è 1. Altrimenti, la probabilità che la prima biglia estratta sia nera è $(100-n)/100$, e si riduce a $(99-n)/99$ per la seconda, e così via, e quindi, ragionando come prima,

$$P_b = 1 - \frac{100-n}{100} \cdot \frac{99-n}{99} \cdot \frac{98-n}{98} \cdot \frac{97-n}{97} .$$

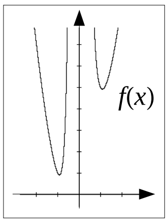
Alternativamente, si noti che i modi di estrarre quattro biglie tenendo conto dell'ordine (oppure no) sono $D_{100,4}$ (risp. $C_{100,4}$), mentre quelli di etrarne quattro nere sono $D_{100-n,4}$ (risp. $C_{100-n,4}$) e dunque

$$P_b = 1 - \frac{D_{100-n,4}}{D_{100,4}} = 1 - \frac{C_{100-n,4}}{C_{100,4}} .$$



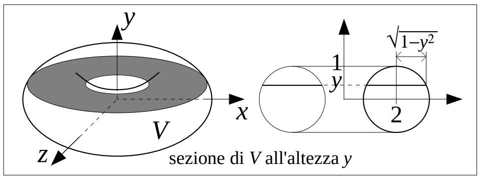
2. a) La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 0$, è positiva per $x > -1$ e negativa altrimenti, e $g(\pm\infty) = \pm\infty$, $g(0^\pm) = +\infty$. Inoltre $g'(x) = 1 - 2x^{-3}$ è positiva per $x < 0$ e $x > \sqrt[3]{2} \simeq 1,26$ (g crescente), e negativa altrimenti (g decrescente), e quindi $\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo locale (si veda il disegno accanto).
b) $f(x) = (x-0)^2 + (g(x)-0)^2 = 2x^2 + 2x^{-1} + x^{-4}$ ha limite $+\infty$ all'infinito ed in 0 (si ricordi che x^{-1} è trascurabile rispetto a x^{-4} quando $x \to 0$) e derivata

$$f'(x) = \frac{4x^6 - 2x^3 - 4}{x^5} \ .$$



Usando la sostituzione $y = x^3$ il numeratore diventa $4y^2 - 2y - 4$, che è positivo per $y > \frac{1}{8}(2+\sqrt{68})$ e $y < \frac{1}{8}(2-\sqrt{68})$ (cioè $x > \frac{1}{2}(2+\sqrt{68})^{1/3} \simeq -0,92$ e $x < \frac{1}{2}(2-\sqrt{68})^{1/3} \simeq 1,08$), e negativo altrimenti. Completando lo studio del segno di f' si ottiene che f ha due minimi locali in $\frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{68})^{1/3}$; siccome $f\big(\frac{1}{2}(2+\sqrt{68})^{1/3}\big) \simeq 4,91$ e $f\big(\frac{1}{2}(2-\sqrt{68})^{1/3}\big) \simeq 0,91$, quest'ultimo è il valore minimo assunto da f (si veda il disegno accanto).

3. Per trovare il volume di V dobbiamo calcolare l'area della sezione V_y ad altezza y, cioè l'intersezione di V con il piano parallelo al piano xz ad altezza y. Come si vede dal disegno qui accanto, questa intersezione è una corona circolare di raggio esterno $2+\sqrt{1-y^2}$ e raggio interno $2-\sqrt{1-y^2}$, ed ha area



$$\text{Area}(V_y) = \pi\Big[\big(2+\sqrt{1-y^2}\big)^2 - \big(2-\sqrt{1-y^2}\big)^2\Big] = 8\pi\sqrt{1-y^2} \ .$$

Dunque

$$\text{Volume}(V) = \int_{-1}^{1} \text{Area}(V_y)\, dy = 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \ ,$$

ed utilizzando il cambio di variabile $y = \sin t$ (e $dy = \cos t\, dt$),

$$\begin{aligned}\text{Volume}(V) &= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos(2t) + 4\, dt = \pi \Big| 2\sin(2t) + 4t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = 4\pi^2 \ .\end{aligned}$$

3'. Il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 + a\lambda + \omega^2$, ed ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\omega^2}}{2} \ .$$

Distinguiamo allora tre casi:

I. Per $a > 2\omega$ si hanno due soluzioni reali distinte negative, quindi la soluzione generale dell'equazione è $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ con $\alpha_1, 2 \in \mathbb{R}$, e tende sempre a 0 per $t \to +\infty$. Inoltre $\ldots x(t)$ è una funzione del tipo $e^{\lambda_2 t}(\alpha_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} - \alpha_2 \lambda_2)$, che in generale si annulla in un punto solo. Quindi, se imponiamo $\dot{x}(0) = 0$, x deve essere o sempre crescente o sempre decrescente per $t > 0$, e se imponiamo $x(0) = 1$, allora non puó che essere decrescente.

II. Per $a = 2\omega$ si hanno due soluzioni reali coincidenti uguali a $-a/2$, quindi la soluzione generale dell'equazione è $x(t) = e^{-at/2}(\alpha_1 + \alpha_2 t)$ con $\alpha_1, 2 \in \mathbb{R}$, e tende sempre a 0 per $t \to +\infty$. Inoltre $\ldots x(t)$ è una funzione del tipo $e^{-at/2}(\alpha_2 - \alpha_1 a/2 - \alpha_2 at/2)$, che di nuovo si annulla in un punto solo. Ragionando come prima si vede che per $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, la soluzione non puó che essere decrescente per $t \geq 0$.

III. Per $0 < a < 2\omega$ si hanno due soluzioni complesse coniugate uguali a $-a/2 \pm bi$ con $b = \sqrt{4\omega^2 - a^2}$, quindi la soluzione generale dell'equazione è del tipo $x(t) = e^{-at/2}\rho\sin(bt+\theta)$ con $\rho > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$, e tende sempre a 0 per $t \to +\infty$, e tuttavia non è mai decrescente.

c) Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che una soluzione particolare dell'equazione in questione è la funzione costante $1/\omega^2$, e quindi la soluzione generale si ottiene sommando $1/\omega^2$ alla soluzione generale dell'equazione omogenea. Siccome abbiamo già verificato che quest'ultima tende sempre a 0, non ci resta che concludere che la soluzione della non omogenea tende a $1/\omega^2$.

Seconda parte, gruppo B.

1. Si procede come per il gruppo A: $P_a = 1 - \left(\dfrac{1000-n}{1000}\right)^4$, mentre per $n < 997$

$$P_b = 1 - \frac{1000-n}{1000} \cdot \frac{999-n}{999} \cdot \frac{998-n}{998} \cdot \frac{997-n}{997} = 1 - \frac{C_{1000-n,4}}{C_{1000,4}} \ .$$

2. a) La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 0$, è positiva per $x > 1$ e negativa altrimenti, e $g(\pm\infty) = \pm\infty$, $g(0^\pm) = -\infty$. Inoltre $g'(x) = 1 + 2x^{-3}$ è positiva per $x < -\sqrt[3]{2} \simeq -1,26$ e $x > 0$ (g crescente), e negativa altrimenti (g decrescente), e quindi $-\sqrt[3]{2}$ è un punto di massimo locale.
b) $f(x) = (x-0)^2 + (g(x)-0)^2 = 2x^2 - 2x^{-1} + x^{-4}$ ha limite $+\infty$ all'infinito ed in 0, e derivata $f'(x) = (4x^6 + 2x^3 - 4)x^{-5}$. Procedendo come per il gruppo A si vede che $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{68})^{1/3} \simeq -1,08$ è un punto di minimo locale e $\frac{1}{2}(-2+\sqrt{68})^{1/3} \simeq 0,92$ è il punto di minimo assoluto, ed il valore minimo di f è circa $0,91$.

3. Si procede come per il gruppo A: $\mathrm{Area}(V_y) = 12\pi\sqrt{1-y^2}$ e

$$\mathrm{Volume}(V) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(V_y)\, dy = 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \ , = 6\pi^2 \ .$$

3'. [*Uguale al gruppo A.*]

Seconda parte, gruppo C.

1. Si procede come per il gruppo A: $P_a = 1 - \left(\dfrac{100-n}{100}\right)^5$, mentre per $n < 96$

$$P_b = 1 - \frac{100-n}{100} \cdot \frac{99-n}{99} \cdot \frac{98-n}{98} \cdot \frac{97-n}{97} \cdot \frac{96-n}{96} = 1 - \frac{C_{100-n,5}}{C_{100,5}} \ .$$

2. a) La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 0$, è positiva per $x > -1$ e negativa altrimenti, e $g(\pm\infty) = \pm\infty$, $g(0^\pm) = -\infty$. Inoltre $g'(x) = 1 - 4x^{-5}$ è positiva per $x < 0$ e $x > \sqrt[5]{4} \simeq 1,32$ (g crescente), e negativa altrimenti (g decrescente), e quindi $\sqrt[5]{4}$ è un punto di minimo locale.

b) $f(x) = (x-0)^2 + (g(x)-0)^2 = 2x^2 + 2x^{-3} + x^{-8}$ ha limite $+\infty$ all'infinito ed in 0, e derivata $f'(x) = (4x^{10} - 6x^5 - 8)x^{-9}$. Utilizzando la sostituzione $y = x^5$ e procedendo come per il gruppo A si vede che $[\frac{1}{2}(3+\sqrt{41})]^{1/5} \simeq 1,18$ é un punto di minimo locale, $[\frac{1}{2}(3-\sqrt{41})]^{1/5} \simeq -0,97$ è il punto di minimo assoluto, ed il valore minimo di f è $0,97$.

3. Si procede come per il gruppo A: $\text{Area}(V_y) = 16\pi\sqrt{1-y^2}$ e

$$\text{Volume}(V) = \int_{-1}^{1} \text{Area}(V_y)\,dy = 16\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy\ , = 8\pi^2\ .$$

3'. [*Uguale al gruppo A.*]

Seconda parte, gruppo D.

1. Si procede come per il gruppo A: $P_a = 1 - \left(\frac{1000-n}{1000}\right)^5$, mentre per $n < 996$

$$P_b = 1 - \frac{1000-n}{1000} \cdot \frac{999-n}{999} \cdot \frac{998-n}{998} \cdot \frac{997-n}{997} \cdot \frac{996-n}{996} = 1 - \frac{C_{1000-n,5}}{C_{1000,5}}\ .$$

2. a) La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 0$, è positiva per $x > 1$ e negativa altrimenti, e $g(\pm\infty) = \pm\infty$, $g(0^\pm) = -\infty$. Inoltre $g'(x) = 1 - 4x^{-5}$ è positiva per $x < -\sqrt[5]{4} \simeq -1,32$ e $x > 0$ (g crescente), e negativa altrimenti (g decrescente), e quindi $-\sqrt[5]{4}$ è un punto di massimo locale.
b) $f(x) = (x-0)^2 + (g(x)-0)^2 = 2x^2 - 2x^{-3} + x^{-8}$ ha limite $+\infty$ all'infinito ed in 0, e derivata $f'(x) = (4x^{10} + 6x^5 - 8)x^{-9}$. Utilizzando la sostituzione $y = x^5$ e procedendo come per il gruppo A si vede che $[\frac{1}{2}(-3-\sqrt{41})]^{1/5} \simeq -1,18$ é un punto di minimo locale, $[\frac{1}{2}(-3+\sqrt{41})]^{1/5} \simeq 0,97$ è il punto di minimo assoluto, ed il valore minimo di f è $0,97$.

3. Si procede come per il gruppo A: $\text{Area}(V_y) = 4\pi\sqrt{1-y^2}$ e

$$\text{Volume}(V) = \int_{-1}^{1} \text{Area}(V_y)\,dy = 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy\ , = 2\pi^2\ .$$

Errori più frequenti.

1. Alcuni hanno avuto problemi a capire il significato esatto delle domande dell'esercizio 1: chiedere che *almeno una* biglia sia bianca, non significa chiedere che siano *tutte* bianche. Significa solo che non sono tutte nere.

2. Esercizio 2. Ricordo che il quadrato della distanza tra due punti nel piano di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è (per il teorema di Pitagora) $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Se il primo punto diventa l'origine, ed il secondo il punto di ascissa x che giace sul grafico della funzione g, allora abbiamo $x_1 = y_1 = 0$, e $x_2 = x$, $y_2 = g(x)$. La distanza in questione diventa dunque una funzione della variabile x (l'unica variabile che ci sia).

Terzo appello, 3 giugno 2002

Prima parte.

1. $2(x^{3/2} + e^{x/2})$.
2. $\text{Area}(S) = \dfrac{\alpha}{2\pi}[\text{Area del cerchio}] = \dfrac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 = \dfrac{\alpha r^2}{2}$.
3. 1 e 0 rispettivamente.
4. $(21 + 9)^2 = 30^2 = 900$.
5. Disegnando il grafico della retta $y = x - 1$, si vede subito che deve essere $x \geq 1$.
6. Sviluppando secondo la prima colonna: $\det A = (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 13$.
7. Basta sostituire x con $-x$ nello sviluppo di e^x: $P_5(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^5}{5!}$.
8. Siccome $r = h \tan(\pi/6) = h/\sqrt{3}$, allora $h = \sqrt{3}\, r$ e $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$.

7'. $2\dot{x}x = e^t$, $(x^2)' = e^t$, $x^2 = e^t + c$, e deve essere $c = 3$ per avere $x(0) = 2$. Quindi $x = \sqrt{e^t + 3}$.

8'. $3 - i$.

Seconda parte.

1. La condizione che il perimetro sia 4 diventa $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 4$, da cui si ricava
$$y = \frac{8 - 4x}{4 - x} \quad \text{e} \quad \text{Area} = \frac{xy}{2} = \frac{4x - 2x^2}{4 - x} = 2x + 4 + \frac{16}{x - 4} \ .$$
In particolare i valori ammissibili per x (cioé quelli che corrispondono ad un vero triangolo) sono $0 < x < 2$, e calcolando la derivata della funzione area, si vede che il massimo è raggiunto per $x = 4 - 2\sqrt{2}$. In questo caso si ha anche $y = 4 - 2\sqrt{2}$, cioè si tratta del triangolo rettangolo isoscele.
2. $\text{Cof}\, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -12 & 1 \\ -5 & 29 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -1$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\text{Cof}\, A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & -29 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, ed infine $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & -29 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -80 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. La disequazione $|y|e^x \leq 1$ può essere riscritta come $|y| \leq e^{-x}$, ovvero $-e^{-x} \leq y \leq e^{-x}$; S è dunque l'insieme dei punti (x, y) a destra dell'asse delle y (perch'e $x \geq 0$) e compresi tra il grafico di e^{-x} e di $-e^{-x}$ (che si ottiene riflettendo il precedente rispetto all'asse delle x). Dunque
$$\text{Area}\,(S) = \int_0^{+\infty} [e^{-x} - (-e^{-x})]\, dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx = 2\Big| - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 2 \ .$$

3'. La funzione in figura assomiglia al prodotto di un esponenziale decrescente per una sinusoide, ovvero è una funzione del tipo $x(t) = ae^{-rt} \sin(\omega t)$, con a, r, ω positivi. Questa la si ottiene come soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2r\dot{x} + (r^2 + \omega^2)x = 0$.

Errori più frequenti.

1. Prima parte, esercizio 1: la primitiva di $e^{x/2}$ è $2e^{x/2}$, e non $e^{x/2}$.
2. Prima parte, esercizio 3: quando x tende a 0, $\sqrt{x}$ tende a 0 e $\log x$ tende a $-\infty$, ma il prodotto tende a 0, e non a $-\infty$, perché il primo fattore (che è una potenza) prevale sul secondo.
3. Prima parte: errori dei tipi più vari negli esercizi 4 e 5.
4. Seconda parte, esercizio 1: impostazione giusta, ma sono stati sbagliati spesso i valori ammissibili di x. In particolare, i valori di x che corrispondono ad un vero triangolo rettangolo sono solo quelli compresi tra 0 e 2.
5. Seconda parte, esercizio 2: sistema risolto per sostituzione o con Kramer nonostante fosse già stato fatto il calcolo di A^{-1}. Molti errori nei segni della matrice dei cofattori.
6. Seconda parte: quasi nessuno ha fatto gli esercizi 3 e 3', che pure non sono difficili.

PRIMA PARTE.

1. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.
2. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e spostato verso il basso di 1.
3. $+\infty$ e 0 rispettivamente.
4. Deve essere $1 + \log x \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e$.
5. $-2\cos(4x) - \dfrac{1}{x} + c$.
6. $\begin{pmatrix} 11 & 1 & -5 \\ -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.
7. Il prodotto scalare è $2 + a^2$, e non si annulla mai.
8. $\overline{AB} = r/\tan\alpha$.

7'. $x^{-1/2}\dot{x} = 2$, $(2x^{1/2})' = 2$, $2x^{1/2} = 2t + c$, e dobbiamo porre $c = 0$ affinché sia $x(1) = 1$. Quindi $x = t^2$.

8'. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda = 1 \pm i$, e quindi $x = e^t(a\cos t + b\sin t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE.

1. b) Si tratta di vedere per quali valori di a la funzione $f(x) := e^x - ax$ è sempre positiva. I valori negativi di a non vanno bene (perché $f(-\infty) = -\infty$), mentre $a = 0$ invece va bene.
   Restano da studiare i valori positivi di a. Si vede facilmente che $f(x)$ risulta definita per ogni x reale, decrescente per $x < \log a$ e crescente per $x > \log a$. Quindi $\log a$ è il punto di minimo assoluto di $f(x)$, e $f(\log a) = a(1 - \log a)$. I valori di a cercati sono quindi quelli per cui $a(1 - \log a) \geq 0$, ovvero $0 < a \leq e$.
   Mettendo insieme tutti i casi otteniamo $0 \leq a \leq e$, che include in particolare il valore $a = 2$ considerato nella parte a) dell'esercizio.
2. b) La condizione di perpendicolarità è $v \cdot w = (x, y, z) \cdot (1, -1, 0) = 0$, ovvero $x = y$. Per questi vettori, la condizione che la lunghezza sia 1 diventa $\sqrt{x^2 + x^2 + z^2} = 1$, e cioé $z = \pm\sqrt{1 - 2x^2}$. I vettori cercati sono quindi tutti e soli quelli della forma
   $$v = (x, x, \pm\sqrt{1 - 2x^2}) \ ,$$
   con x compreso tra $\pm 1/\sqrt{2}$.
   c) L'insieme di questi vettori è dato dall'intersezione della sfera di centro l'origine e raggio 1 con il piano ortogonale P al vettore w, e cioé il piano che contiene l'asse z ed il punto di coordinate $(1, 1, 0)$. In altre parole, l'insieme cercato è la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine che giace su P.
3. Se sezioniamo il solido in figura ad un'altezza y compresa tra 0 e 1 (cioé l'altezza dello stesso), otteniamo una circonferenza il cui raggio r è determinato dall'equazione $y = 1 - r^2$. Dunque la sezione ha area $\pi r^2 = \pi(1 - y)$ ed il volume cercato è
   $$V = \int_0^1 \pi(1 - y)\, dy = \frac{\pi}{2} \ .$$

2'. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x}+x=0$ è $x=a\cos t+b\sin t$. Cerchiamo ora una soluzione particolare della non omogenea della forma $x=ce^{-t}$. Sostituendo otteniamo l'identità $ce^{-t}+c^{-t}=e^{-t}$, che è verificata solo per $c=1/2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$x=a\cos t+b\sin t+\frac{e^{-t}}{2}\quad \text{con } a,b\in\mathbb{R}.$$

Richiedendo che siano verificate le condizioni iniziali otteniamo $a=-1/2$ e $b=1/2$.

3'. Il determinante della matrice ridotta associata al sistema è $a^2-3a+2=(a-1)(a-2)$. Quindi, per $a\neq 1,2$ la matrice ridotta è invertibile, ed il sistema ha una ed una sola soluzione. Per $a=1,2$ la matrice ridotta ha rango minore di 3, mentre si vede che la completa ha rango sempre 3 (basta considerare il minore ottenuto eliminando la terza colonna), e quindi il sistema non ha soluzioni.

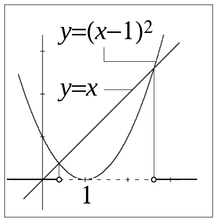
ERRORI PIÙ FREQUENTI.

1. Molti errori negli esercizi 1, 3 e 4 della prima parte, che pure sono assolutamente standard. In particolare, il limite per $x\to 0$ di $e^(- (1/x^2)$ è 0: infatti x^2 tende a 0, ed è sempre positivo, e quindi $1/x^2$ tende a $+\infty$, ed infine $e^{-\infty}=0$.

Quinto appello, 11 settembre 2002

Prima parte.

1. Si tratta dei punti del piano che giacciono sotto il grafico della funzione $y = x^2 - 1$, vale a dire la solita parabola di equazione $y = x^2$ traslata in basso di 1.
2. Deve essere $2 - e^x > 0$, ovvero $x < \log 2$.
3. I limiti valgono entrambi 0.
4. e^x, $(3 + 2x)\cos(3x + x^2)$.
5. Il prodotto scalare dei due vettori deve essere nullo: $a^2 - 3a + 2 = 0$, ossia $a = 1, 2$.
6. I possibili esiti del lancio di tre dadi sono 6^3, e quelli che ci interessano sono solo 6. Dunque la probabailità cercata è $P = 6^{-2} = 1/36 \simeq 2,8\%$.
7. Il grafico di $y = (x - 1)^2$ è la parabola di equazione $y = x^2$ traslata a destra di 1, disegnando anche il grafico di $y = x$, la soluzione si ottiene come indicato in figura.



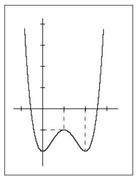
8. 2

8'. Equazione a variabili separabili: $x(t) = \log(t^2 + 1)$.

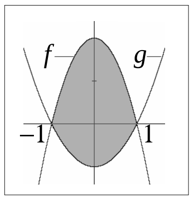
Seconda parte.

1. Tenendo presente gli sviluppi noti $e^y = 1 + y + y^2/2 + o(y^2)$ e $\cos y = 1 - y^2/2 + o(y^3)$, si ottiene
$$e^{x^3-2x^2} = 1 + (x^3 - 2x^2) + (x^3 - 2x^2)^2/2 + o((x^3 - 2x^2)^2) = 1 + (x^3 - 2x^2) + o(x^3)$$
$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$
che sono quindi gli sviluppi di Taylor (in 0) all'ordine 3 di $e^{x^3-2x^2}$ e $\cos(2x)$, rispettivamente. A questo punto è facile verificare che il limite richiesto è 1.

2. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile infinite volte (è un polinomio). I limiti a $\pm\infty$ sono uguali a $+\infty$, perciò la funzione non è limitata dall'alto. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ si deduce che il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo, in cui la funzione vale -1. I punti $x = 0$ ed $x = 2$, in cui la funzione assume il valore -2, sono invece punti di minimo assoluto.



3. Posto $f(x) := 2(1 - x^2)$ e $g(x) := x^2 - 1$, l'insieme dei punti (x, y) tali che $g(x) \le y \le f(x)$ è disegnato in grigio in figura. La sua area si ottiene calcolando
$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{1} 3(1 - x^2)\,dx = 4\ .$$



3'. Il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 - 2\lambda - a = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}$. Essendo $a > 0$ le soluzioni sono sempre reali distinte, inoltre $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 2$ e la soluzione dell'equazione è data da $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ dove A, B soddisfano le condizioni aggiuntive dovute ai dati inziali
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\lambda_1 + B\lambda_2 = -2 \end{cases}$$
Tenendo conto del segno di λ_1 e λ_2 è facile vedere che $x(t)$ ha limite 0 all'infinito se e solo se $B = 0$. Sostituendo nel sistema sopra si ottiene che si deve avere $A = 1$ e $\lambda_1 = -2$. Da quest'ultima condizione si deduce $a = 8$.

Quinto appello, 11 settembre 2002

Errori più frequenti.

1. Nell'esercizio 4 della prima parte, nessuno (!) si è accorto che il prodotto $e^{2x}e^{-x}$ si semplifica in e^x. Per quanto non si tratti a rigore di un errore, è un fatto abbastanza grave.
2. per calcolare il limite nell'esercizio 1 della seconda parte, è necessario anche tenere conto della funzione $\cos(2x)$, e cioé sottrarre dallo sviluppo di $e^{x^3-2x^2}$ quello di $\cos(2x)$. Cosa che nessuno ha fatto.
3. Nell'esercizio 2 della seconda parte, molti hanno avuto difficoltà a distinguere massimi locali e massimi relativi. Come si vede dalla figura, non ci sono massimi relativi, perché la funzione può assumere valori arbitrariamente grandi.

Sesto appello, 23 settembre 2002

Prima parte.

1. L'insieme dei punti cercato è il cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1.
2. Deve essere $2 - e^x > 1$, ovvero $x < 0$.
3. $2 < x < \infty$.
4. La primitiva è $-x\cos x + \sin x - x^4/4 + c$, e l'integrale vale 2π.
5. La derivata è 0, ed infatti $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ per ogni x!
6. 64.
7. -6.
8. Il prodotto scalare è sempre 1: i due vettori non sono ortogonali per alcun valore di a.

8'. Le soluzioni sono quattro, e precisamente $\sqrt{2}(\pm 1 + \pm i)$.

Seconda parte.

1. L'area in grigio vale $4\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 8/3$, mentre l'area del quadrato è 4; la probabilità cercata è il rapporto delle due aree, ossia $2/3$.
2. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile infinite volte. La derivata prima è $f'(x) = 2ax + \sin x$ e la derivata seconda vale $f''(x) = 2a + \cos x$. Condizione necessaria e sufficiente per la convessità è che sia $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questa condizione è verificata se e solo se $a \geq 1/2$. Poiché $\cos x \leq 1$ per ogni x reale si ha che la funzione è positiva per $a \geq 0$; viceversa, se la funzione è positiva, allora deve essere in particolare $f(0) \geq 0$, ovvero $a \geq 0$.
3. La matrice inversa è $A^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & -29 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; la soluzione è $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -80 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3'. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine. La soluzione generale è data dalla formula apposita:
$$x(t) = Ae^{2t} + e^{2t}\int_0^t e^{-s}(e^s + 2e^{2s})\,ds = (A + 2t)e^{2t} - e^t\ .$$

Errori più frequenti.

1. Nessuno ha svolto correttamente il primo esercizio della prima parte, dove di trattava semplicemnte di riconoscere un cerchio!
2. Molti errori nell'esercizio 5 della prima parte: anche non accorgendosi del fatto che la funzione in questione è sempre uguale a $\pi/2$, si tratta solo di applicare le regole di derivazione delle funzioni composte!